KREYSZIG 공업수학

문제풀이 해설

-개정 8판-

CONTENTS

Part A. Ordinary Differential Equations

CHAPTER 1

First-Order Differential Equations

In this chapter we begin our program of studying ordinary differential equations and their applications. This includes the derivation of differential equations from physical or other problems **(modeling)**, the solution of these equations by methods of practical importance, and the interpretation of the results and their graphs in terms of a given problem. We also discuss the questions of existence and uniqueness of solutions.

We start with the simplest equations. These are called **differential equations of the first order** because they involve only the ***first*** derivative of the unknown function. Our usual notation for the unknown function will be $y(x)$ or $y(t)$.

Numerical methods for these equations follow in Secs. 19.1 and 19.2, which are totally independent of other sections in Chaps. 17–19, and can be taken up immediately after this chapter.

Prerequisite for this chapter: integral calculus.
Sections that may be omitted in a shorter course: 1.7–1.9.
References: Appendix 1, Part A.
Answers to Problems: Appendix 2.

1.1. Basic Concepts and Ideas

1. $y = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

2. $y = \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$

3. $y' = \int x^{-4} dx = -\frac{1}{3}x^{-3} + c_1$
   $y = \int y' dx = \frac{1}{6}x^{-2} + c_1 x + c$

4. $y = \int xe^{-x^2} dx = \int -\frac{1}{2}t \, dt$ ($t = -x^2$치환)
   $y = -\frac{1}{4}t^2 + c == \frac{1}{4}x^4 + c$

5. $y' = -ce^{-x} + 2x - 2, y' + y = x^2 - 2$

6. $y' = -a\sin x + b\cos x$
   $y'' = -a\cos x - b\sin x, y'' + y = 0$

7. $y' = e^x + 2ax = b,\ y'' = e^x + ea$
   $y''' = e^x$

8. $y' = -e^{-x}(a\cos x + b\sin x) + e^{-x}(-a\sin x + b\cos x) = e^{-x}\{(b-a)\cos x - (a+b)\sin x\}$
   $y'' = -e^{-x}\{(b-a)\cos x - (a+b)\sin x\} + e^{-x}\{(a-b)\sin x - (a+b)\cos x\}$
   $y'' + 2y' + 2y = 0$

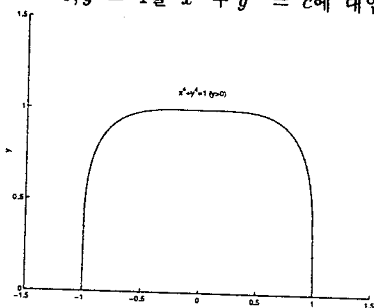
9. 음함수 미분법에 의해 $x^2 + y^2 = 1$을 x로 미분하면 $2x + 2yy' = 0$을 얻는다

참고. 음함수 미분법
$f(x, y) =$상수 라면 x와 y는 함수 관계가 있고,
$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = 0$ 의 관계가 성립한다.

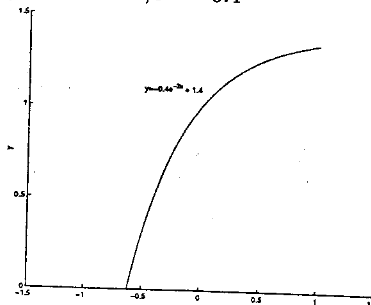
10. $x^2 - y^2 = 1$은 $x - yy' = 0$의 해

11. $x^2 + y^2 = c$는 모두 $x + yy' = 0$의 해

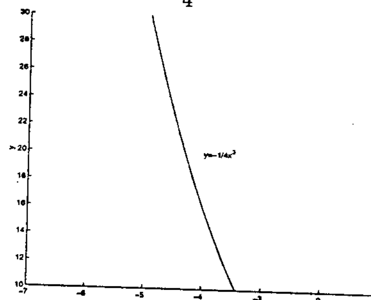
12. 음함수 미분법에 의해 $4x^3 + 4y^3 = 0$을 얻는다.
    $x = 0, y = 1$을 $x^4 + y^4 = c$에 대입하면 $c = 1$



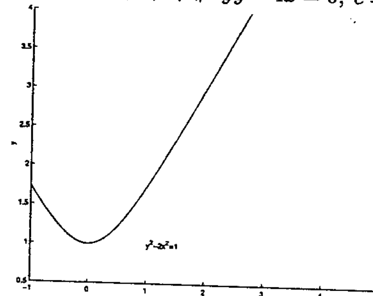
13. $y' = -2ce^{-2x}, c = -0.4$



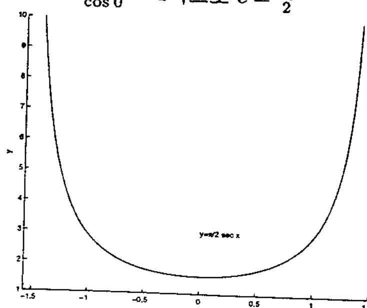
14. $y' = 3cx^2,\ c = -\frac{1}{4}$



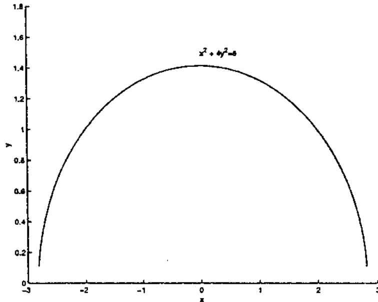
15. 음함수 미분법에 의해 $2yy' - 4x = 0,\ c = \sqrt{3}^2 - 2 = 1$



16. $y' = c(\sec x)' = c\sec x\tan x = y\tan x$
    $\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = 1$이므로 $c = \frac{\pi}{2}$



17. 음함수 미분법에 의해 $2x+8yy'=0$, $c=2^2+4=8$



18. 초기조건이 $y(a)=0$이면 $c=a^2$으로 바뀐다.

19. $\frac{dy}{dt}=ky, k=-1.4\cdot10^{-11}sec^{-1}$이므로 $y=ce^{kt}$이다.
$y_1=ce^{kt_1}, \frac{y_1}{2}=ce^{kt_2}$라 하면 반감기는 t_2-t_1인데, 두 등식을 변변 나누면 $\frac{1}{2}=e^{k(t_2-t_1}$으로부터 $t_2-t_1=-\frac{\ln 2}{k}=\frac{\ln 2}{1.4}10^{11}sec\approx 1600$년

20. 라듐의 양을 y라 하면 $\frac{dy}{dt}=ky$를 만족하고 19번으로부터 반감기 $=-\frac{\ln 2}{k}$임을 알므로 $k=-\frac{\ln 2}{3.6day}\approx -0.1925$이다. 그러므로 $y(t)=e^{-0.1925t}$(단위는 gram 과 day이고 초기치 $y(0)=1$이다)
하루후 남은 양은 $y(1)=e^{-0.1925}\approx 0.8248$
일년 후 남은 양은 $y(365)=e^{-0.1925\cdot365}\approx 3.2548\cdot10^{-31}$

21. 반감기를 x, 일년 후 남은 양을 y라 하면 20번으로부터 $y=e^{-365\frac{\ln 2}{x}}=\frac{1}{2}^{\frac{365}{x}}$임을 안다.
반감기가 3.6일 때 일년후 남은 양 $\approx \frac{1}{2}^{100}$
반감기가 3.6x0.01 일 때 일년 후 남은 양 $\approx \frac{1}{2}^{10000}$
후자가 전자보다 비교가 안 되게 작다.

22. $y'=gt$, $y=\int y'\,dt=\frac{1}{2}gt^2+y(0)$ 그러므로 움직인 거리$s=\frac{1}{2}gt^2$

23. $100=\frac{1}{2}gt^2$을 풀면 $t\approx 4.4$(초), $200=\frac{1}{2}gt^2$를 풀면 $t\approx 6.3$(초)

24. y'는 y에 비례하므로 $y'=ky$미방으로부터 $y(x)=ce^{kx}$를 얻고, $x=0$일때 (즉 해수면)$y=y_0$이므로 $c=y_0$, $x=18000$일 때 $y=\frac{y_0}{2}$이므로 $\frac{y_0}{2}=y_0e^{18000k}$으로부터 $k=-\frac{\ln 2}{18000}$.
$y(35000)=y_0e^{-\frac{\ln 2}{18000}35000}\approx y_0e^{-2\ln 2}=\frac{y_0}{4}$

25. 1800년도를 시점으로 잡으면 $y_0=5.3$이고 $13=5.3e^{30K}$로 부터 $k=\frac{\ln(13/5.3)}{30}=0.03$
이 계산 결과로 180년 후의 인구를 계산하면$y(180)=5.3e^{0.03\cdot180}=1154$가 나온다 실제 데이타와 많은 차이가 난다. 그러므로 Malthus의 기하급수 증가 모델은 수정을 요하게 된다.(실제로 인구증가가 S자 곡선을 그리는 것은 잘 알려진 상식)

26. 원금 y_0가 단위기간에 이자율 r로 증가한다면
단위기간 한번 후의 원리 합계 $=y_0+y_0r=y_0(1+r)$
단위기간 두번 후의 원리 합계 $=y_0(1+r)+y_0(1+r)r=y_0(1+r)^2$

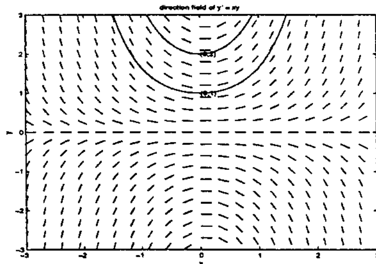
$\vdots$

단위기간 x번 후의 원리 합계 $=y_0(1+r)^{x-1}+y_0(1+r)^{x-1}r=y_0(1+r)^x$
daily compounding 에 의한 오년 후 원리 합계 $y(5)=1000[1+(0.08/365)]^{365}\approx 1491.8$
continuous compounding 에 의한 오년후 원리 합계 $y(5)=1000e^{0.08\cdot5}\approx 1491.8$ 거의 차이가 없다.

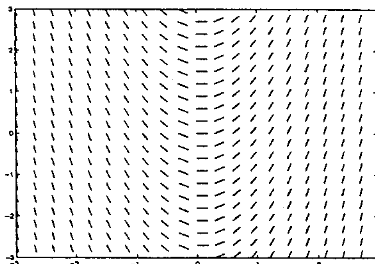
27. k가 음수면 감소함수이고 양수면 증가함수

1.2. Geometrical Meaning of $y'=f(x,y)$.Direction Fields

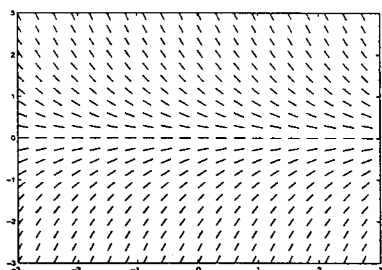
1.



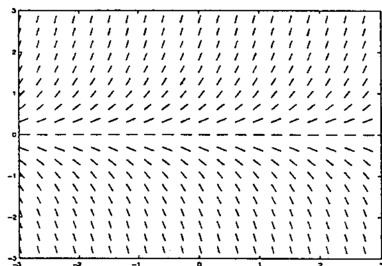
2.



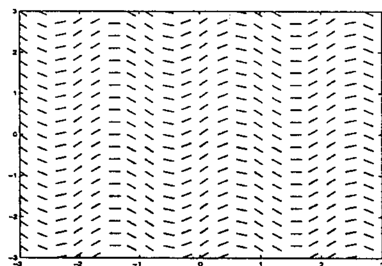
3.



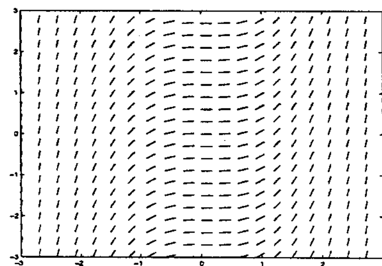
4.



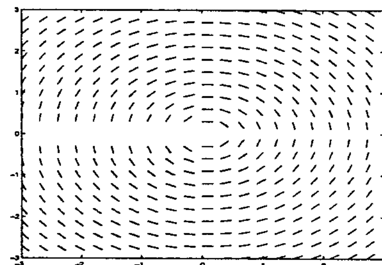
5.



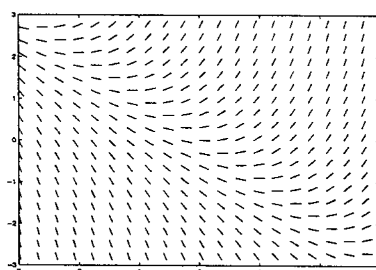
6.



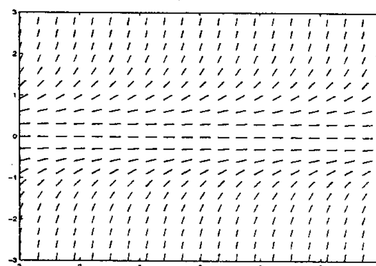
7.



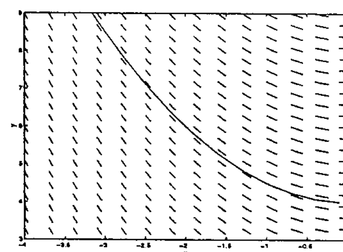
8.



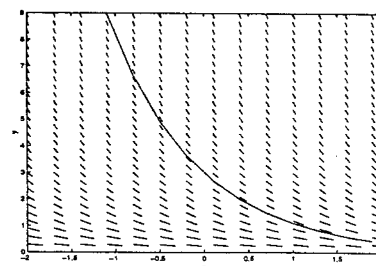
9.



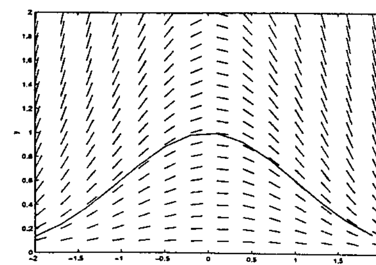
10.



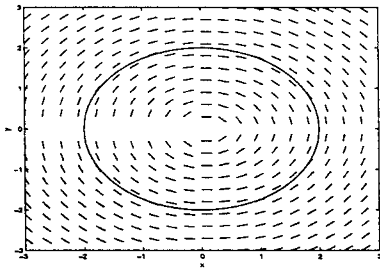
11.



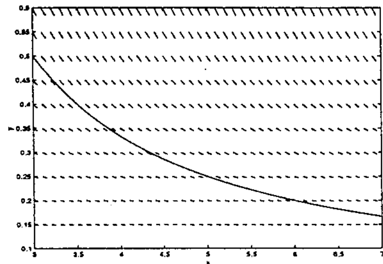
12.



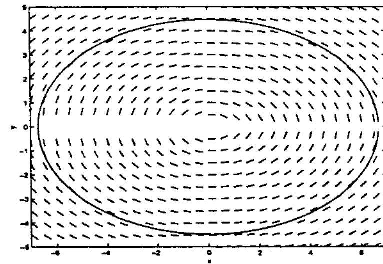
13.



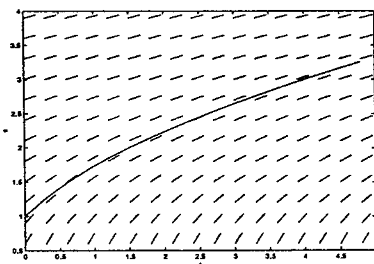
14.



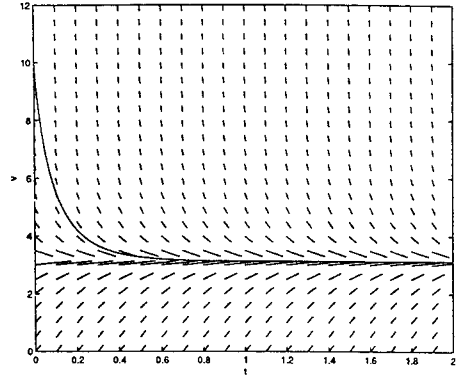
15.

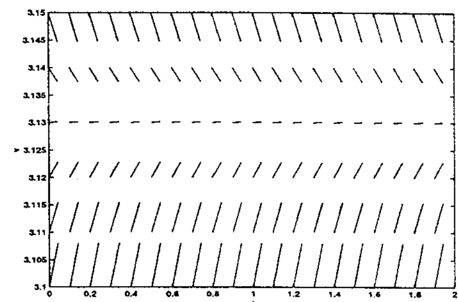


16. 속도는 위치함수를 미분하면 되므로,$s'(t) = \dfrac{1}{s(t)}$이고 초기조건은 $s(0) = 1$이다. 해는 $s(t) = \sqrt{2t+1}$

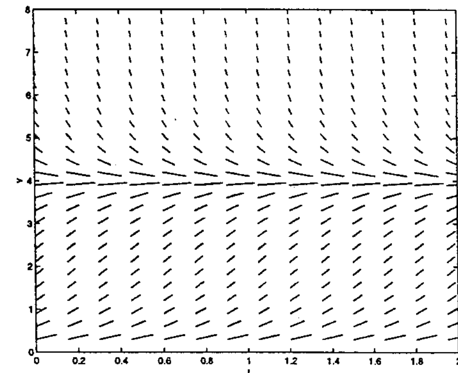


17. direction field를 그려보면, 초기조건에 관계없이 모든 해가 3.13에 가까워지는걸 알 수 있다.(3.13=$\sqrt{9.8}$) 첫번째 그림에서 그려진 해를 보면 10의 속도에서 낙하산을 피면 약 0.5초 후에 속도가 3.13으로 일정하게 안정됨을 알수 있다. 두번째 그림은 v=3.13 근처에서 확대해 그린 direction field.





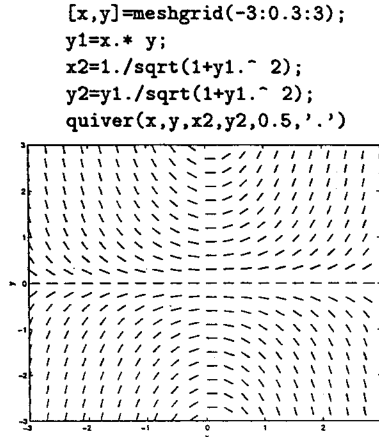
18. $0 < y < 4$에서 $y' = 4y = y^2 > 0$이므로 당연히 증가상태이다.(아래 direction field에서도 알수 있다) solution curve 들은 생물시간의 상식대로 S 자 곡선을 그림을 알 수 있다.



19. 일차미방이라도 exact해를 구하기 어려운 경우가 많고, 또 해의 정확함보다 거칠지만 빨리 해를 구하거나 해의 형태를 짐작하는게 더 중요한 경우가 많다. direction field를 그려보는것은 이런 실제적인 유용성에서 편리하고 또 초기치에 따라 해가 어떻게 변하는지를 한눈에 보여준다.

20: computer를 이용해 direction field를 구하는 과제인데, 여러 package중 matlab으로 그려본 example 을 싣는다.($y' = xy$의 경우)

```
[x,y]=meshgrid(-3:0.3:3);
y1=x.* y;
x2=1./sqrt(1+y1.^ 2);
y2=y1./sqrt(1+y1.^ 2);
quiver(x,y,x2,y2,0.5,'.')
```



1.3. Separable Differential Equations

1. page15 example2의 경우처럼 적분상수를 신경안쓰고, y에 관해 푼다음 적분상수를 붙이면 해가 안 될 수 있다.

2. $y' = -\frac{25x}{y},\ ydy = -25xdx$

   $\int ydy = -\int 25xdx,\ y^2 = -\frac{25}{2}x^2 + c$ (타원)

3. $\frac{dy}{1+0.01y^2} = dx,\ \int \frac{dy}{1+0.01y^2} = \int dx$

   $10\arctan(\frac{y}{10}) = x + c,\ y = 10\tan(\frac{x+c}{10})$

4. $\frac{dy}{y^2} = -3x^2dx,\ \int \frac{dy}{y^2} = \int -3x^2dx$

   $-\frac{1}{y} = -x^3 + c,\ y = \frac{1}{x^3+c}$

5. $\frac{dy}{y} = \frac{x}{2}dx,\ \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{2}dx$

   $\ln|y| = \frac{x^2}{4} + c,\ y = \pm ce^{\frac{x^2}{4}},\ y = ce^{\frac{x^2}{4}}$ (c는 상수)

6. $-\int \frac{dy}{y^2} = \int kdx,\ \frac{1}{y} = kx + c$

   $y = \frac{1}{kx+c}$

7. $\int \frac{dy}{y^2+y} = \int \frac{dx}{x},\ \ln|\frac{2y}{2y+2}| = \ln|x| + c$

   $\frac{y}{y+1} = \pm cx,\ y = \frac{\pm cx}{1 \mp cx},\ y = \frac{cx}{1-cx}$(c는 상수)

* 또 다른 해법 ($\frac{y}{x} = u$ 치환이용)

   $y' = xu^2 + u$

   $u'x + u = xu^2 + u$($\frac{y}{x} = u$치환하면 $y' = u'x + u$)

   $u' = u^2,\ \int \frac{du}{u^2} = \int dx,\ -\frac{1}{u} = x + c$

   $-\frac{x}{y} = x + c,\ y = \frac{-x}{x+c},\ y = \frac{cx}{1-cx}$

8. $y' = 1 + u,\ u'x + u = 1 + u,\ \int du = \int \frac{dx}{x}$

   $u = \ln|x| + c,\ \frac{y}{x} = \ln|x| + c,\ y = x(\ln|x| + c)$

9. $y' = u + \frac{1}{u},\ u'x + u = u + \frac{1}{u}$

   $\int u\ du = \int \frac{dx}{x},\ \frac{u^2}{2} = \ln|x| + c$

   $y^2 = 2x^2(\ln|x| + c)$

10. ($y + 4x = v$치환하면 $y' + 4 = v'$)

   $y' = v^2,\ v' - 4 = v^2,\ \int \frac{dv}{v^2+4} = \int dx$

   $\frac{1}{2}\arctan(\frac{v}{2}) = x + c,\ v = 2\tan(2x + c)$

   $y = 2\tan(2x + c) - 4x$

11. $-\int \frac{dy}{\csc y} = \int dx,\ -\int \sin y\ dy = \int dx$

   $\cos y = x + c$

12. $\int y\ dy = -\int xdx,\ y^2 = -x^2 + c$

   $x^2 + y^2 = 4$ (반지름 2인 원)

13. $-\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},\ -\ln|y| = \ln|x| + c$

   $y = c\frac{1}{|x|},\ y = -4\frac{1}{|x|}$

14. $\int y^3dy = -\int x^3dx,\ y^4 = -x^4 + c$

   $x^4 + y^4 = 1$

15. $\int \frac{dy}{y^2} = \int 2(x+1)e^{-x}\ dx$

   $-\frac{1}{y} = -2(x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}$ (부분적분)

   $-\frac{1}{y} = -2(x+2)e^{-x} + c,\ y = \frac{1}{2(x+2)e^{-x} + c}$

$y = \dfrac{1}{2(x+2)e^{-x}+2}$

16. $\int \frac{dy}{1+4y^2} = \int dx,\ \frac{1}{2}\arctan(2y) = x + c$
$y = \frac{1}{2}\tan(2x+c),\ y = \frac{1}{2}\tan(2x)$

17. $\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int \frac{dx}{\cosh^2 x}$
$-\cot y = \tanh x + c,\ -\cot y = \tanh x$

18. $\int \frac{dr}{r} = -\int 2t\ dt,\ \ln|r| = -t^2 + c$
$r = 2.5e^{-t^2}$

19. $L\int \frac{dI}{I} = -R\int dt,\ L\ln|I| = -Rt + c$
$I = I_0 e^{-Rt/L}$

20. $y' = x^2(u-1)^3 + u$
$u'x + u = x^2(u-1)^3 + u,\ u' = x(u-1)^3$
$\int \frac{du}{(u-1)^3} = \int x\ dx,\ -\frac{1}{2}(u-1)^{-2} = \frac{x^2}{2} + c$
$(\frac{y}{x} - 1)^{-2} = -x^2 + 5$

21. $y' = u + 3x^3\cos^2 u$
$u'x + u = u + 3x^3\cos^2 u,\ u' = 3x^2\cos^2 u$
$\int \sec^2 u\ du = \int 3x^2\ dx,\ \tan u = x^3 + c$
$\tan(\frac{y}{x}) = x^3 - 1$

22. $y' = u + x\sec u, u'x + u = u + x\sec u$
$u' = \sec u, \int \cos u\ du = \int dx,\ \sin u = x + c$
$\sin(\frac{y}{x}) = x - 1$

23. $y' = 2u + \frac{4}{u},\ u'x + u = 2u + \frac{4}{u}$
$u'x = u + \frac{4}{u} = \frac{u^2+4}{u}$
$\int \frac{u\ du}{u^2+4} = \int \frac{dx}{x},\ \frac{1}{2}\ln|u^2+4| = \ln|x| + c$
$u^2 + 4 = cx^2,\ (\frac{y}{x})^2 + 4 = 2x^2$

24. $v = x + y - 2$로 치환하고 양변을 x 로 미분하면
$v' = 1 + y'$
$1 - v' = v^2,\ \int \frac{dv}{1-v^2} = \int dx$
$\frac{1}{2}\ln|\frac{1+v}{1-v}| = x + c,\ \frac{1+v}{1-v} = ce^{2x}$
$\frac{x+y-1}{3-x-y} = ce^{2x}$

25. $y + 2x = v$ 치환하면 $y' + 2 = v'$
$v' - 2 = \frac{1-2v}{1+v},\ v' = \frac{3}{1+v}$
$\int 1 + v\ dv = 3\int dx,\ v + \frac{v^2}{2} = 3x + c$
$y + 2x + \frac{(y+2x)^2}{2} = 3x + c$

26. (a) $x^2 + y^2 = c$의 양변을 미분하면 $y' = -\frac{x}{y}$ 를 얻는다.
(b) $xy = c$의 양변을 미분하면 $y' = -\frac{y}{x}$ 를 얻는다.
(c) $y = ax$의 양변을 미분하면 $y' = a$ 를 얻는다.
(d) (a)와 (c)의 교점에서 (a)의 기울기는 $y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{ax} = -\frac{1}{a}$, (c)의 기울기는 $y' = a$ 둘을 곱하면 -1 이므로 직교한다.
(e) 임의의 family of curves 를 하나의 differential equation 으로 표현하는건 불가능하다. (표현의 한계 문제)

1.4. Modeling:Separable Equations

1. 미방은 $y' = ky,\ y(1) = 2y(0)$
풀면, $y = ce^{kt},\ ce^k = 2c$ 로 부터 $k = \ln 2$
$y = ce^{\ln 2t}$
3일 후는 초기값 c의 $\frac{ce^{3\ln 2}}{c} = 2^3 = 8$배.
일 주일 후는 초기값 c 의 2^7 배

2. 가속도를 구하는 문제
가속도를 a라 하면, 속도는 $v = 10 + at$, 이동거리는 $s = 10t + \frac{a}{2}t^2$이 된다. 50초동안 2km를 달린 후 이륙하므로, $2000 = 10\cdot 50 + \frac{a}{2}50^2$이 성립하고 이로부터 $a = \frac{3000}{2500}$을 얻는다.
이륙할 때 속도는 $v = 10 + \frac{3000}{2500}50 = 70$ (meter/sec)

3. 가속도가 1.5라면, 달리는 시간은, $2000 = 10t + \frac{1.5}{2}t^2$ 으로부터 약 45.4초 그러므로 이륙 속도는 $10 + 1.5 \times 45.4 \approx 78.1$ (meter/sec)

4. 가속도 $a = 7t$
속도 $v = \frac{7}{2}t^2$ (초기속도는 0)
이동거리 $s = \frac{7}{6}t^3$, 10초동안 쏘아올린 거리는 $\frac{7}{6}$ (km)
중력 가속도 $g = 9.8\text{m/sec}^2$를 고려해야 한다면,
$a = 7t - g,\ v = \frac{7}{2}t^2 - gt,\ s = \frac{7}{6}t^3 - \frac{g}{2}t^2$으로부터,
이동거리는 약 676 (m)

5. 본문 page 19에서 $y(t) = y_0 ekt,\ k = -0.000121$이므로 $\frac{y(3000)}{y_0} = e^{-3000\times 0.000121} \approx 0.716$
그러므로 71.6%

6. 계산을 하면,$y' = ky,\ y = ce^{kt}$ 에서 반감기가 10이므로
$k = \frac{-\ln 2}{10} = -0.06931$

$e^{kt} = 0.01$로 부터, $t = \frac{\ln 0.01}{k} \approx 66.4$ (분)

7. 100에서 시작하면 10분후 50이 되고 10분후 25, 10분후 12.5, 10분후 6.2, 10분후 3.1, 10분후 1.5, 10분후 0.7이므로 약 60분에서 70분사이가 걸릴것이다.

8. $a = \frac{10^4 - 10^3}{10^{-3}} = 9 \cdot 10^6 \text{m/sec}^2$
$s = 10^3 t + \frac{a}{2}t^2 = 10^3 \cdot 10^{-3} + \frac{9 \cdot 10^6}{2}(10^{-3})^2 = 5.5$ (meter)

9. $\frac{dV}{dp} = -\frac{V}{p}$
$\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dp}{p}$
$\ln|V| = -\ln|p| + c, V = \frac{c}{p}$

10. 속도와 거리의 관계는 page 22 (10-b)에서
$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + c$
$r = R + 1000$에서의 속도를 v_0라 하면
$c = \frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{R + 1000}$
$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{r} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{R + 1000}$이 0이 되지 않으려면
$\frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{R + 1000} \ge 0$ 이어야 하므로,
v_0는 적어도 $\sqrt{\frac{2gR^2}{R + 1000}} = 10.39$(km/sec)보다는 커야한다.

11. $y' = ky$, 로부터 $y(t) = ce^{kt}$
$y(0) = 0.01,\ y(4) = 0.03$으로부터
$y(t) = 0.01e^{\frac{-\ln 3}{4}t}$

12. A를 빛의 양, ΔA를 흡수된 빛의 양, Δx를 막의 두께라 하면, $\Delta A = -kA\Delta x$ (k는 비례상수) 가 성립. $\Delta x \to 0$이면 $A' = -kA$가 성립. ($A(x)$는 입사면으로부터 x깊이안의 빛의 양이다)

13. $\frac{dT}{dt} = k(T - 22)$
$\int \frac{dT}{T - 22} = \int k dt,\ T = 22 + ce^{kt}$
$T(0) = 5,\ T(60) = 12$로 부터
$c = -17, k = \frac{1}{60}\ln\frac{10}{17} = -0.00884$
$21.9 = 22 + ce^{kt}$로 부터, $t \approx 580$초

14. y를 소금의 양이라 하면,
y' = 시간당 들어오는 소금의 양 - 시간당 나가는 소금의 양
$y' = 0 - \frac{2}{400}y,\ y(0) = 100$ 으로부터,
$y = 100e^{-\frac{1}{200}t}$
60분 후의 양 ≈ 74.1 (lb)

15. $y' = -\frac{4x}{y},\ \int y dy = -4\int x dx$
$y^2 = -4x^2 + c$ (타원)

16. 종약(구모양)의 반경을 r, 부피를 V, 겉넓이를 A라 하면,
조건에서 $\frac{dV}{dt} = kA$
그런데, chain rule에 의해
$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}$ 인데,
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$이므로 $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = A$
즉, $A\frac{dr}{dt} = kA$
그러므로 $r(t) = kt + c$
$r(0) = 1,\ r(2) = \frac{1}{2}$으로 k, c를 구하면,
$r(t) = -\frac{1}{4}t + 1$을 얻는다.
반경이 0.05cm 가 되는 시간은
$0.05 = -\frac{1}{4}t + 1$ 을 풀면,
$t = 3.8$(개월) 을 얻는다.

17. $y' = \frac{y}{x},\ \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$
$y = cx$

18. 중력가속도 g의 경사면을 따르는 방향성분은 $g\sin\alpha$, normal 방향성분은 $g\cos\alpha$
마찰계수가 0.20 이므로
가속도 = $\frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - 0.20g\cos\alpha = 3.203$
그러므로 $v = 3.203t,\ s = 3.203\frac{t^2}{2}$
움직이는 거리가 10이므로
$t = \sqrt{2 \cdot 10/3.203} = 2.50$
그러므로 속도는 $3.203 \cdot 2.50 = 8.01$(m/sec)

19. (a) $y(t) = ce^{kt}$에서 반감기 $t_H = -\frac{\ln 2}{k}$
$ce^k = 0.2,\ ce^{4k} = 0.05$ 로부터
$k = \frac{\ln 0.25}{3} = -0.462$
반감기는 $t_H = -\frac{\ln 2}{k} = 1.5$
(b) $y(t_1) = y_1,\ y(t_2) = y_2$라 하면
$k = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{t_1 - t_2}$
반감기는 $t_H = -\frac{\ln 2(t_1 - t_2)}{\ln y_1 - \ln y_2}$
(c) 계산한 반감기로 예상한 값과 측정값을 비교해서, 반감기의 정확도를 개선할 수 있다.

20. (a) $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ 로 부터 얻는다.
(b) 높이 h일때,탱크안의 수면의 넓이을 $B(h)$라 하면, 부피가 줄어드는 양은 작은 시간 동안에 $-B(h)\Delta h$이다. 한편, 실제로 바닥에서 구멍을 통해 빠져나가는 양은 작은 시간동안에 $Av\Delta t$ 즉 작은 시간동안에,
$-B(h)\Delta h = Av\Delta t$
양변을 Δt 로 나누고 $\Delta t \to 0$ 으로 취하면,
$h' = -\frac{A}{B(h)}v = -\frac{A}{B(h)} \cdot 0.600\sqrt{2gh(t)} = -26.56\frac{A}{B(h)}\sqrt{h}$

(c) $\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -26.56\frac{A}{B}\int dt$
$\sqrt{h} = -13.28\frac{A}{B}t + c$

(d) $\frac{A}{B} = (1/100)^2$이므로,
$\sqrt{h} = -13.28(1/100)^2 t + c$
$h(0) = 150$이므로 $c = 12.25$
$0 = -0.001328t + 12.25$를 풀면, $t = 9924$초

(e) A가 커지면 h'가 커지므로 h는 더 빨리 줄어든다.
B가 커지면 h'가 작아지므로 h는 덜 빨리 줄어든다.

1.5. Exact Differential Equations.Integrating Factors

1. $du = 2xdx + 8ydy = 0$

2. $du = 2xdx - 2ydy = 0$

3. $du = \frac{2x}{y}e^{x^2/y}dx - \frac{x^2}{y^2}e^{x^2/y}dy = 0$

4. $du = -\frac{2xdx}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2ydy}{(x^2+y^2)^2} = 0$

5. $du = -3x^2\sec^2(y^2-x^3)dx + 2y\sec^2(y^2-x^3)dy = 0$

6. $du = \cos x\cosh ydx + \sin x\sinh ydy = 0$

7. $\frac{\partial}{\partial y}2xy = 2x = \frac{\partial}{\partial x}x^2$
$u = \int 2xydx + k(y) = x^2y + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + k' = x^2$으로부터$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = x^2y = c$

8. $\frac{\partial}{\partial y}(-yx^{-2}) = -x^{-2} = \frac{\partial}{\partial x}x^{-1}$
$u = \int -yx^{-2}dx + k(y) = \frac{y}{x} + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x} + k' = \frac{1}{x}$으로부터 $k' = 0,\ k =$ 상수
$u = \frac{y}{x} = c$

9. $\frac{\partial}{\partial y}\sinh x\cos y = -\sinh x\sin y$
$= \frac{\partial}{\partial x}(-\cosh x\sin y)$
$u = \int \sinh x\cos ydx + k(y) = \cosh x\cos y + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh x\sin y + k' = -\cosh x\sin y$으로부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = \cosh x\cos y = c$

10. $\frac{\partial}{\partial\theta}e^{3\theta} = 3e^{3\theta} = \frac{\partial}{\partial r}3re^{3\theta}$
$u = \int e^{3\theta}dr + k(\theta) = e^{3\theta}r + k(\theta)$
$\frac{\partial u}{\partial\theta} = 3e^{3\theta}r + k' = 3re^{3\theta}$ 으로부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = e^{3\theta}r = c$

11. $\frac{\partial}{\partial\theta}e^{-2\theta}r = -2e^{-2\theta}r = \frac{\partial}{\partial r}e^{-2\theta}(-r^2)$
$u = \int e^{-2\theta}rdr + k(\theta) = \frac{1}{2}e^{-2\theta}r^2 + k(\theta)$
$\frac{\partial u}{\partial\theta} = -e^{-2\theta}r^2 + k' = e^{-2\theta}(-r^2)$으로부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = \frac{1}{2}e^{-2\theta}r^2 = c$

12. $\frac{\partial}{\partial y}(\cot y + x^2) = -\csc^2 y = \frac{\partial}{\partial x}(-x\csc^2 y)u =$
$\int \cot y + x^2\ dx + k(y) = x\cot y + \frac{1}{3}x^3 + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -x\csc^2 y + k' = -x\csc^2 y$으로부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = x\cot y + \frac{1}{3}x^3 = c$

13. $P = 3y^2,\ Q = x$
$P_y = \frac{\partial}{\partial y}3y^2 = 6y \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}x = Q_x$ (not exact)
$\frac{1}{P}(Q_x - P_y) = \frac{1}{3y^2}(1-6y) = R(y)$ (y만의 함수)
$F(y) = \exp\int R(y)dy = \frac{e^{-\frac{1}{3y}}}{y^2}$ (integrating factor)
$u = \int FPdx + k(y) = \int 3e^{-\frac{1}{3y}}dx + k(y)$
$= 3xe^{-\frac{1}{3y}} + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{3y}} + k' = FQ = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{1}{3y}}$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = 3xe^{-\frac{1}{3y}} = c$
$y(1) = \frac{1}{2}$ 로 부터 $3xe^{-\frac{1}{3y}} = 3e^{-\frac{2}{3}}$

14. $P = 2y^{-1}\cos 2x,\ Q = -y^{-2}\sin 2x$
$P_y = -2y^{-2}\cos 2x = Q_x$ (exact)
$u = \int Pdx + k(y) = 2y^{-1}\int\cos 2xdx + k(y)$
$= y^{-1}\sin 2x + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -y^{-2}\sin 2x + k' = Q = -y^{-2}\sin 2x$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = y^{-1}\sin 2x = c$
$y(\pi/4) = 3.8$ 로 부터 $y^{-1}\sin 2x = \frac{1}{3.8}$

15. $P = x^2 + y^2,\ Q = -2xy$
$P_y = 2y \neq -2y = Q_y$ (not exact)
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = -\frac{2}{x}$
$F(x) = \exp\int -\frac{2}{x}dx = x^{-2}$
$u = \int FPdx + k(y) = \int 1 + x^{-2}y^2dx + k(y)$

$= x - \frac{y^2}{x} + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2y}{x} + k' = FQ = -\frac{2y}{x}$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = x - \frac{y^2}{x} = c$
$y(1) = 2$ 로 부터 $x - \frac{y^2}{x} = -3$

16. $P = ye^x,\ Q = 2y + e^x$
$P_y = e^x = Q_x$ (exact)
$u = \int ye^x dx + k(y) = ye^x + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x + k' = Q = 2y + e^x$ 로 부터
$k' = 2y,\ k = y^2$
$u = ye^x + y^2 = c$
$y(0) = -1$ 로 부터 $ye^x + y^2 = 0$

17. $P = (x+1)e^x - e^y,\ Q = -xe^y$
$P_y = -e^y = Q_x$ (exact)
$u = \int Qdy + k(x) = -xe^y + k(x)$
$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^y + k' = P = (x+1)e^x - e^y$ 로 부터
$k' = (x+1)e^x,\ k = xe^x$
$u = -xe^y + xe^x = c$
$y(1) = 0$ 로 부터 $-xe^y + xe^x = e - 1$

18. $P = 2\sin\omega y,\ Q = \omega\cos\omega y$
$P_y = 2\omega\cos\omega y \neq 0 = Q_x$ (not exact)
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = 2$
$F(x) = \exp\int 2dx = e^{2x}$
$u = \int FPdx + k(y) = \sin\omega y e^{2x} + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = \omega\cos\omega y e^{2x} + k' = FQ = \omega\cos\omega y e^{2x}$ 로 부터 $k' = 0,\ k =$ 상수
$u = \sin\omega y e^{2x} = c$
$y(0) = \frac{\pi}{2\omega}$ 로 부터 $\sin\omega y e^{2x} = 1$

19. $P = 2\sin 2x\sinh y,\ Q = -\cos 2x\cosh y$
$P_y = 2\sin 2x\cosh y = Q_x$ (exact)
$u = \int Pdx + k(y) = -\cos 2x\sinh y + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\cos 2x\cosh y + k' = Q$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = -\cos 2x\sinh y = c$
$y(0) = 1$ 로 부터 $-\cos 2x\sinh y = -\sinh 1$

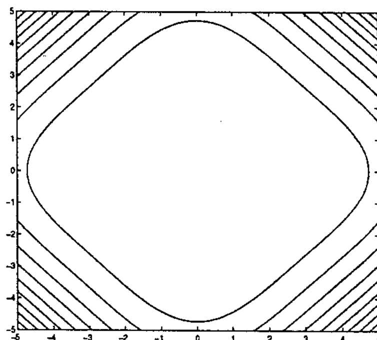
20. $P = 2xye^{x^2},\ Q = e^{x^2}$
$P_y = 2xe^{x^2} = Q_x$ (exact)
$u = \int e^{x^2} dy + k(x) = e^{x^2} y + k(x)$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2} y + k' = P$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = e^{x^2} y = c$
$y(0) = 2$ 로 부터 $e^{x^2} y = 2$

21. $\frac{\partial}{\partial y}(ax + by) = b,\ \frac{\partial}{\partial x}(kx + ly) = k$ 이므로
$b = k$ 일 때 exact.
$b = k$를 가정하고 풀면.
$u = \int ax + bydx + k(y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = bx + k' = kx + ly$ 로 부터
$k' = ly,\ k = \frac{l}{2}y^2$
$u = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{l}{2}y^2$

22. $x = s + t,\ y = s - t$치환에 의해 $s^4 + t^4 = c$ 의 형태가 된다. 그러므로 example 1의 curve 들은 $s^4 + t^4 = c$ curve 들을 일차변환 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
의해 옮긴 도형이다. 위의 행렬을 분해해 보면,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이므로, y축 대칭후 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$ 회전하고 다시 $\sqrt{2}$배 만큼 확장하는 변환이란걸 알 수 있다. 그러므로 $s^4 + t^4 = c$ curve들의 개형으로 부터 page 27 example 1 의 solution curve 들의 개형을 알 수 있다.



23. $\frac{\partial}{\partial y}y \cdot y = 2y = \frac{\partial}{\partial x}2x \cdot y$이므로
y는 integrating factor
$\frac{\partial}{\partial y}y \cdot xy^3 = 4xy^3 = \frac{\partial}{\partial x}2x \cdot xy^3$이므로
xy^3는 integrating factor
$\frac{\partial}{\partial y}y \cdot x^2y^5 = 6x^2y^5 = \frac{\partial}{\partial x}2x \cdot x^2y^5$이므로
x^2y^5는 integrating factor
$P = y,\ Q = 2x,\ F = y$
$u = \int FPdx + k(y) = y^2x + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + k' = FQ = 2xy$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = y^2x = c$

24. $\frac{\partial}{\partial x}(xy)^{-1}\cdot y = -x^{-2} = \frac{\partial}{\partial y}(-x^{-2}\cdot y)$ 이므로 y는 integrating factor이고 이것을 곱한 다음 해를 구하면 $y = cx$를 얻는다. 그러나 $y = 0$은 해가 아니다. $y = 0$은 $F = 0$인 경우인데, integrating factor 곱한 다음 얻는 해에서 Checking solution 이 중요한 이유는, F를 곱한 다음 얻는 해중에는 원래 방정식의 해는 아니지만 $F = 0$인 이유로 포함되는 것들이 있을 수 있기 때문이다.

25. $\frac{\partial}{\partial y}e^x \sin y = e^x \cos y = \frac{\partial}{\partial x}e^x \cos y$
$u = \int e^x \sin y dx + k(y) = e^x \sin y + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + k' = e^x \cos y$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = e^x \sin y = c$

26. $\frac{\partial}{\partial y}y\cos(x+y) = \cos(x+y) - y\sin(x+y)$
$\frac{\partial}{\partial x}[y + \tan(x+y)]\cos(x+y) = \frac{\partial}{\partial x}y\cos(x+y) + \sin(x+y) = -y\sin(x+y) + \cos(x+y)$
$u = y\sin(x+y) = c$

27. $\frac{\partial}{\partial y}(a+1)yx^a y^b = (a+1)(b+1)x^a y^b$
$= \frac{\partial}{\partial x}(b+1)xx^a y^b$
$u = \int (a+1)yx^a y^b dx + k(y) = y^{b+1}x^{a+1} + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = (b+1)y^b x^{a+1} + k' = (b+1)y^b x^{a+1}$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
$u = y^{b+1}x^{a+1} = c$

28. $P = 3(y+1),\ Q = -2x,\ F = (y+1)/x^4$
$(FP)_y = (FQ)_x = 6(y+1)x^{-4}$
$u = (y+1)^2 x^{-3} = c$

29. $P = 2y + xy,\ Q = 2x,\ F = 1/xy$
$(FP)_y = (FQ)_x = 0$
$u = \int FPdx + k(y) = \int \frac{2}{x} + 1dx + k(y)$
$= 2\ln|x| + x + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = k' = FQ = \frac{2}{y}$ 로 부터
$k = 2\ln|y|$
$u = 2\ln|x| + x + 2\ln|y| = c$
$u = (xy)^2 e^x = c$

30. $P = 2\cos y,\ Q = -\tan 2x \sin y,\ F = \cos 2x$
$(FP)_y = (FQ)_x = -2\cos 2x \sin y$
$u = \sin 2x \cos y = c$

31. $P = 2\cosh x \cos y,\ Q = -\sinh x \sin y$
$P_y = -2\cosh x \sin y,\ Q_x = -\cosh x \sin y$
$\frac{1}{P}(Q_x - P_y) = \frac{1}{2}\tan y$
$F(y) = \exp\int \frac{1}{2}\tan y dy = \exp(-\frac{1}{2}\ln|\cos y|)$
$= \frac{1}{\sqrt{\cos y}}$ $(-\pi/2 < y < \pi/2$인 경우로 제한)
$(FP)_y = (FQ)_x = -\cosh x\frac{\sin y}{\sqrt{\cos y}}$ 이므로 F는 integrating factor
$u = \int FPdx + k(y) = 2\int \cosh x\sqrt{\cos y}dx + k(y)$
$= 2\sinh x\sqrt{\cos y} + k(y)$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sinh x\frac{\sin y}{\sqrt{\cos y}} + k' = FQ$ 로 부터
$k' = 0,\ k =$ 상수
일반해 : $2\sinh x\sqrt{\cos y} = c$

32. 문제 31과 마찬가지로 F를 구하면, $F = y^2$
일반해 : $x^2 y^3 = C$

33. $P = 2\cos y + 4x^2,\ Q = -x\sin y$
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{1}{x}$
$F(x) = \exp\int \frac{1}{x}dx = x$
일반해 : $x^2\cos y + x^4 = c$

34. 문제 33과 마찬가지로 F를 구하면, $F = e^{2x}$
일반해 : $e^{2x}\cos y = c$

35. $P = 2x\tan y,\ Q = \sec^2 y$
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = 2x$
$F(x) = e^{x^2}$
일반해 : $e^{x^2}\tan y = c$

36. $P = y + 1,\ Q = -(x+1)$
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{-2}{x+1}$
$F(x) = (x+1)^{-2}$
일반해 : $-\frac{y+1}{x+1} = c$

37. $P = \frac{\cosh y}{x},\ Q = \sinh y$
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{1}{x}$
$F(x) = x$
일반해 : $x\cosh y = c$

38. 여러가지 방법으로 풀리는 문제는 많다. 예를 들어 $xy' + y + 4 = 0$ 이나 $xdx + ydy = 0$ 등의 문제는 변수분리법이나, exact equation을 이용하는 방법 모두로 풀 수 있다.

1.6. Linear Differential Equations.Bernoulli Equation

1. 로그법칙 $a^{b\ln c} = c^{b\ln a}$ 이용

2. $e^{-(h+c)}\left[\int e^{h+c} r dx + c\right]$
$= e^{-c+c}e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right] = e^{-h}\left[\int e^{h} r dx + c\right]$

3. $(y'-y)e^{-x} = (ye^{-x})' = 4e^{-x}$
$ye^{-x} = -4e^{-x} + cy = -4 + ce^{x}$

4. $(y'+2y)e^{2x} = (ye^{2x})' = 2.5e^{2x}$
$ye^{2x} = \frac{2.5}{2}e^{2x} + cy = \frac{2.5}{2} + ce^{-2x}$

5. $(y'+3xy)e^{\frac{3}{2}x^2} = (ye^{\frac{3}{2}x^2})' = 0$
$ye^{\frac{3}{2}x^2} = c,\ y = ce^{-\frac{3}{2}x^2}$

6. $(y'+xy)e^{\frac{x^2}{2}} = (ye^{\frac{x^2}{2}})' = 4xe^{\frac{x^2}{2}}$
$ye^{\frac{x^2}{2}} = 4e^{\frac{x^2}{2}} + c,\ y = 4 + ce^{-\frac{x^2}{2}}$

7. $(y'+ky)e^{kx} = (ye^{kx})' = 1$
$ye^{kx} = x + c,\ y = (x+c)e^{-kx}$

8. $(y'+4y)e^{4x} = (ye^{4x})' = \cos xe^{4x}$
$ye^{4x} = \int \cos xe^{4x}dx = \frac{4}{17}\cos xe^{4x} + \frac{1}{17}\sin xe^{4x} + c$
$y = \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x + ce^{-4x}$

9. $p = -\frac{2}{x},\ r = x^2e^x$
$h = \int pdx = -2\ln x,\ e^h = x^{-2}$
$y = e^{-h}[\int e^h rdx + c] = x^2[\int x^{-2}(x^2e^x)dx + c]$
$= x^2(e^x + c)$

10. $(y'+y)e^x = (ye^x)' = \tan x$
$ye^x = c - \ln|\cos x|,\ y = e^{-x}(c - \ln|\cos x|)$

11. $\int \frac{dy}{y-2} = \int \cot xdx,\ \ln|y-2| = \ln|\sin x| + c$
$y = c\sin x + 2$

12. $p = \frac{3}{x},\ r = x^{-4}$
$h = \int pdx = 3\ln x, e^h = x^3$
$y = x^{-3}[\int x^3x^{-4}dx + c] = x^{-3}(\ln x + c)$

13. $(y' + y\sin x)e^{-\cos x} = (ye^{-\cos x})' = 1$
$ye^{-\cos x} = x + c,\ y = (x+c)e^{\cos x}$

14. $p = \frac{2}{x},\ r = \frac{\sinh 5x}{x^2}$
$h = \int pdx = 2\ln x,\ e^h = x^2$
$y = x^{-2}[\int x^2\frac{\sinh 5x}{x^2}dx + c] = x^{-2}(\frac{1}{5}\cosh 5x + c)$

15. $(y'+4y)e^{4x} = (ye^{4x})' = 20e^{4x},\ y = e^{-4x}(5e^{4x}+c)$
$2 = 5 + c$ 로 부터 $c = -3,\ y = e^{-4x}(5e^{4x} - 3)$

16. $p = -(1 + 3x^{-1},\ r = x + 2$
$h = -x - 3\ln x, e^h = e^{-x}x^{-3}$
$y = e^xx^3[\int e^{-x}x^{-3}(x+2)dx + c]$
$\int e^{-x}x^{-2}dx = -e^{-x}x^{-2} - 2\int e^{-x}x^{-3}dx$ 를 이용
해서 위의 적분을 계산하면,
$y = cx^3e^x - x$, 초기조건에서 $c = 1$

17. $\int \frac{dy}{y-1} = \int 2\tanh 2xdx$
$\ln|y-1| = \ln\cosh 2x + c,\ y = 1 + c\cosh 2x, c = 3$

18. $(\sec x)' = \sec x\tan x$이용, $y = c\sec x,\ c = -2$

19. $(y'+3y)e^{3x} = (ye^{3x})' = \sin xe^{3x}$
$y = e^{-3x}[\int \sin xe^{3x}dx + c]$
$= e^{-3x}[\frac{e^{3x}}{10}(3\sin x - \cos x) + c], c = 0$

20. $(y'+6x^2y)e^{2x^3} = (ye^{2x^3})' = \frac{1}{x^2}$
$y = e^{-2x^3}(-\frac{1}{x} + c),\ c = 1$

21. $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx,\ \arctan y = x,\ y = \tan x,\ c = 0$

22. $p = \frac{4}{x},\ r = 8x^3,\ h = 4\ln x,\ e^h = x^4$
$y = x^{-4}[8\int x^7dx + c] = x^4 + cx^{-4},\ c = 1$

23. $y' = 0,\ 0 + p(x)0 = 0$

24. $y = cy_1$이라 하면 $y' = cy_1'$
$y' + py = cy_1' + pcy_1 = c(y_1' + py_1) = 0$ 이므로 y 역시 해가 된다.

25. $(y_1+y_2)' + p(y_1+y_2) = y_1' + py_1 + y_2' + py_2 = 0$

26. $y_1' + py_1 = r,\ y_2' + py_2 = 0$ 이므로
$(y_1+y_2)' + p(y_1+y_2) = y_1' + py_1 + y_2' + py_2 = r$

27. $y_1' + py_1 = r,\ y_2' + py_2 = r$ 이므로
$(y_1-y_2)' + p(y_1-y_2) = (y_1'+py_1) - (y_2'+py_2) = 0$

28. $(cy_1)' + p(cy_1) = c(y_1' + py_1) = cr$

29. $y_1' + py_1 = r_1,\ y_2' + py_2 = r_2$ 이므로
$(y_1+y_2)' + p(y_1+y_2) = y_1' + py_1 + y_2' + py_2 = r_1 + r_2$

30. 변수분리법이용 ;
$\int \frac{dy}{r_0 - p_0y} = \int dx,\ -\frac{1}{p_0}\ln|r_0 - p_0y| = x + c$
$r_0 - p_0y = ce^{-p_0x},\ y = \frac{1}{p_0}(r_0 + ce^{-p_0x})$
page 34 (4) 이용;
$h = p_0x,\ e^h = e^{p_0x},$
$y = e^{-p_0x}[\int e^{p_0x}r_0dx + c] = \frac{r_0}{p_0} + ce^{-p_0x}$
두 결과가 일치한다

31. $u = \frac{1}{y}$ 로 두면
$u' - 2u = -\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{y} = -\frac{y' + 2y}{y^2} = -\frac{y^2}{y^2} = -1$
이므로 선형방정식이 된다. 문제 30의 공식 으로 풀면,
$u = \frac{1}{2} + ce^{2x},\ y = (\frac{1}{2} + ce^{2x})^{-1}$

32. $u = y^2$ 로 두면
$u' + 2u = 2yy' + 2y^2 = 2y(y' + y) = 2y(-x/y) = -2x$
$(u' + 2u)e^{2x} = (ue^{2x})' = -2xe^{2x}$
$u = e^{-2x}[-2\int xe^{2x}dx + c] = \frac{1}{2} - x + ce^{-2x}, \ y = \sqrt{u}$

33. $u = y^{-3}$ 로 두면
$u' - u = -3y^{-4}y' - y^{-3} = -3y^{-4}(y' + \frac{1}{3}y) = 2x - 1$
$u = e^x[\int e^{-x}(2x-1)dx + c] = ce^x - (2x+1)$

34. $\int \cot y dy = \int \frac{dx}{x-1}, \quad x = 1 + c\sin y$

35. $6e^y - 2x = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}$
$x' + 2x = 6e^y$ 여기서 미분기호'는 $\frac{dx}{dy}$ 를 나타냄
$(x' + 2x)e^{2y} = (xe^{2y})' = 6e^{3y}$
$xe^{2y} = 2e^{3y} + c, \ x = 2e^y + ce^{-2y}$

36. $y^{-2}(\sinh 3y - 2xy) = \frac{1}{y'} = \frac{dx}{dy}$
$x' + \frac{2}{y}x = \frac{1}{y^2}\sinh 3y$
여기서 미분기호'는 $\frac{dx}{dy}$ 를 나타냄
$x = y^{-2}[\int y^2(\sinh 3y)y^{-2}dy + c]$
$= y^{-2}(\frac{1}{3}\cosh 3y + c)$

37. $u = y^2$ 로 두면
$u' + 2xu = 2yy' + 2xy^2 = 2y(y' + xy) = 2x$
$u = e^{-x^2}[\int 2xe^{x^2}dx + c] = 1 + ce^{-x^2}, \ y = \sqrt{u}$

38. $u = y^2$ 로 두면
$u' + (1 - \frac{1}{x})u = xe^x$
$u = xe^{-x}[\int \frac{1}{x}e^x xe^x dx + c] = cxe^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$
$y = \sqrt{u}$

39. 들어오는 소금물의 농도는 시간이 지나면 1 lb/gal로 거의 일정해 질것이다. 그러므로 탱크안의 농도도 1 lb/gal로 일정해 질 것이고 탱크안의 소금의 양은 1000 lb 로 일정해 질 것이다. 계산해 보면,
$y' = 50(1 + e^{-0.1t}\cos t) - 0.05y$
$y = e^{-0.05t}[\int e^{0.05t}50(1 + e^{-0.1t}\cos t)dt + c]$
$= 50e^{-0.05t}[20e^{0.05t} + \frac{e^{-0.05t}}{1 + (0.05)^2}(\sin t - 0.05\cos t) + c]$
$= 1000 + [\frac{50e^{-0.1t}}{1 + (0.05)^2}(\sin t - 0.05\cos t) + ce^{-0.05t}]$
초기조건에 의해 $c \approx -800$ 이지만 c에 관계없이 시간이 지나면 소금의 양 y는 1000이 됨을 알 수 있다.

40. $y' + y = 1 - \cos(\pi t/12)$
$y = e^{-t}[\int e^t(1 - \cos\frac{\pi t}{12})dy + c]$
$= e^{-t}[e^t(1 - 0.936\cos\frac{\pi t}{12} - 0.245\sin\frac{\pi t}{12}) + c]$
$c = 1.936$

41. $\frac{dT}{dt} = k(T - 60), \ T(0) = 300, \ T(10) = 200$ 을 1.4절 13번과 같이 풀면,
$T = 240e^{-0.0539t} + 60$을 얻고 , $t = 102$ mim 을 구할 수 있다.

42. 문제 30번의 결과 (p, r이 상수인 경우의 공식)에 의해,
$v(t) = \frac{W - B}{k}(1 - e^{-kt/m})$
$y(0) = 0$이므로, 적분하면
$y(t) = \frac{W - B}{k}[t - \frac{m}{k}(1 - e^{-kt/m})]$
$v = v_{crit} = 12$가 되는 시간 t_{crit}는
$t_{crit} = \frac{m}{k}\ln\frac{1}{1 - 12k/(W - B)} = 17.2$
이제 최소한 필요한 수심을 구하면,
$y(t_{crit}) = 105$(m)를 얻는다.

43. $W - B$는 변함 없고 $m = W/g$이므로 m이 1000/9.8 만큼 증가한다. 그래서 $t_{crit} = 24.8$이 되고, $y(t_{crit}) = 149$ meter 가 된다.

44. $w = y - x$치환에 의해
$w' = x^3w^2 + x^{-1}w$인 Bernoulli equation 을 얻고
$u = 1/w$ 치환해서 풀면,
$u = \frac{1}{x}[-\frac{1}{5}x^5 + c]$

45. $y = w + v, \ y' = w' + v'$ 에 의해
$w' = -pw + g(w^2 + 2wv)$인 Bernoulli equation 을 얻을 수 있다.

46. 양변을 미분하면,
$y' = y' + xy'' - y''/y^2 = y' + y''(x - 1/y'^2)$
$0 = y''(x - 1/y'^2)$이므로,
$y'' = 0$인 경우는 $y = ax + b$
$x - 1/y'^2 = 0$인 경우는 $y = 2x^{1/2} + c$를 얻고 다시 원식에 대입하면,
$ab = 1, \ c = 0$관계를 얻는다.

47. 46번과 같이 양변 미분하면,
$y' = y' + xy'' + y''g(y'), \ 0 = y''(x + g(y'))$ 로 부터
$y'' = 0$ 인 경우 $y = cx + g(c)$ 를 얻고
$x + g(y') = 0$인 방정식을 얻는다.

48. $y = ax + b$ 의 x절편은 $-b/a$, y절편은 b이고 1사분면의 길이가 1로 부터 $b = -a/\sqrt{1 + a^2}$
즉, $y = ax + -a/\sqrt{1 + a^2}$ (47번의 결과와 일치한다.)

49. 주어진 미방의 형태를 바꾸어 문제에 접근하는 방법은 무수히 많다. 대표적인 방법으로는 라플라스변환,푸리에 변환 등이 있다.

1.7. Modeling:Electric Circuits

1. y가 상수함수라면 증명끝.
y가 상수함수가 아니면 y는 언제나 $\frac{B}{A}$ 보다 크거나, 언제나$\frac{B}{A}$ 보다 작다. 왜냐하면, $y' + Ay = B$, $y(t_0) = \frac{B}{A}$ 의 해는 '해의 유일성'에 의해 상수함수 $y(t) = \frac{B}{A}$ 뿐이기 때문이다.
편의상 $y(t) > \frac{B}{A}$라고 하면, $y' = B - Ay < 0$이므로 y는 감소 함수.(여기서 $A > 0$임을 사용했다)
감소함수이고 아래로 제한되어 있으므로 $\lim_{t\to\infty} y$ 가 존재한다. 그러므로 $\lim_{t\to\infty} y'$는 $\lim_{t\to\infty} y' = B - A\lim_{t\to\infty} y$로서 존재하고, 그 값은 0이 아니면 안 된다 (0이 아니라면 $\lim_{t\to\infty} y$ 은 존재할 수 없다.)
이제 $\lim_{t\to\infty} y = \dfrac{B - \lim_{t\to\infty} y'}{A} = \dfrac{B}{A}$ 임을 알 수 있다.
$y(t) < \frac{B}{A}$ 인 경우도 마찬가지로 증명할 수 있다.

2. arctan가 증가함수이므로 L이 증가하면 δ도 증가. 이것은 물리적으로 L 이 관성효과를 내는 것을 가리킨다.

3. $\dfrac{I(\tau_L)}{I(\infty)} = \dfrac{\frac{E_0}{R}(1-1/e)}{\frac{E_0}{R}} = 1 - 1/e \approx 0.63$

4. 문제 1번 풀이 참조

5. $1 - e^{-\alpha t} = 0.5$ 를 풀면, $t = \frac{\ln 2}{\alpha}$

6. $e^{-R/10} = 1 - 0.99 = 0.01$ 로 부터 $R = 46$ (ohms)

7. $I(10^{-4}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1/(10L)}) = 0.25\frac{E}{R}$, $L \approx 0.34$

8. I_p를 대입해 보면, $RA + \omega LB$, $-wLA + RB = E_0$ 를 얻는다. 이것으로부터,
$A = -\omega LE_0/(R^2 + \omega^2L^2)$, $B = RE_0/(R^2 + \omega^2L^2)$
$\sqrt{A^2+B^2} = \dfrac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $-A/B = \omega L/R$
을 얻는다. 이제 삼각함수 합성공식
$A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t - \delta)$,
$-\delta = \arctan(A/B)$을 이용하면 page 45 (6)의 결과와 비교할 수 있다.

9. (a) $I = e^{-\alpha t}(\frac{1}{L(\alpha-1)}e^{(\alpha-1)t} + c)$
(b) $e^{-t}(\frac{x}{L} + c)$

10. (a) $LI' + RI = E(t)$의 식을 구간을 나누어서 풀때, 처음 구간의 $I(a)$ 값이 다음 구간의 초기조건이 되므로 I는 jump가 없다. 그러므로 E의 jump는 I'에만 jump를 가져온다.

(b) 문제 9번의 결과에 의해 처음 4초동안은
$I = 1 - \frac{1}{2}e^{-t}$
그 다음부터는 $I = ce^{-t}$인데, I의 연속성에 의해
$1 - \frac{1}{2}e^{-4} = ce^{-4}$ 로 부터 $c = e^4 - \frac{1}{2}$

(c) 처음 a초동안은 $I = \frac{E_0}{R} + (I_0 - \frac{E_0}{R})e^{-Rt/L}$
그 다음부터는 $ce^{-R(t-a)/L}$인데 I의 연속성에 의해
$c = \frac{E_0}{R} + (I_0 - \frac{E_0}{R})e^{-Ra/L}$

11. $I' = -\frac{c}{RC}e^{-t/(RC)}$
$+ \dfrac{\omega^2E_0C}{1+(\omega RC)^2}(-\sin\omega t + \omega RC\cos\omega t)$
$E' = \omega E_0\cos\omega t$를 대입

12. $I(0) = c + \dfrac{\omega E_0C}{1+(\omega RC)^2} = 0$이므로,
$I(t) = \dfrac{\omega E_0C}{1+(\omega RC)^2}(-e^{-t/(RC)} + \cos\omega t + \omega RC\sin\omega t)$

13. $E_0 = E_R + E_C = RQ' + \frac{Q}{C}$ 를 풀면
$Q(t) = E_0C + ce^{-t/(RC)}$
$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = E_0 + \frac{c}{C}e^{-t/(RC)}$
$V(0) = 0$ 로 부터
$V(t) = E_0(1 - e^{-t/(RC)}) = 24(1 - e^{-0.025t})$

14. $0 \le t \le 200$인 구간 ;
page 46 (7) 식을 미분하면,
$RI' + R'I + \frac{1}{C} = 0$, $(200-t)I' + 3I = 0$
$I(t) = c(200-t)^3$을 구할 수 있고 $I(0) = 1$이므로,
$I(t) = (200-t)^3/200^3$

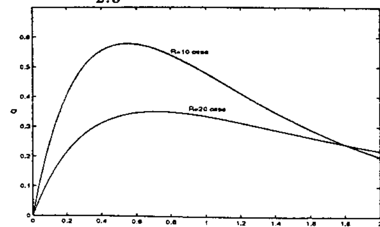
$200 < t$인 구간 ;
page 46 (8) 식을 풀면, $I_2(t) = ce^{-t/(RC)}$을 얻는데
$I_2(200) = I(200) = 0$ 이므로 $I_2(t) = 0$

15. 양변을 미분하면 바로 증명이 된다.
$Q' = -\frac{1}{RC}Q$, $Q = Q_0e^{-t/(RC)}$

16. $e^{-t/(RC)} = 0.01$, $t = RC\ln 100 = 4.605RC$

17. $10Q' + 10Q = 30e^{-3t}$, $(Q'+Q)e^t = (Qe^t)' = 3e^{-2t}$
$Q = e^{-t}(-\frac{3}{2}e^{-2t} + c)$
초기조건 $Q(0) = 0$으로부터,
$Q = \frac{3}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$
$Q' = \frac{3}{2}(3e^{-3t} - e^{-t}) = 0$인 점을 구하면 ,
$t = \frac{\ln 3}{2} = 0.549$
$Q(0.549) = 0.577$

18. 미방은 $20Q' + 10Q = 30e^{-3t}$이 되고, 문제 17과 같은 방법으로 구하면,
$Q = 0.6(e^{-t/2} - e^{-3t})$을 얻고 ,
Q는 $t = \frac{\ln 6}{2.5}$에서 최대값 0.349 를 가진다.



19. $2Q' + Q = 4\cos 2t + \sin 2t + 8\cos 4t + \sin 4t$
$= 2(\sin 2t)' + \sin 2t + 2(\sin 4t)' + \sin 4t$를 관찰하면, 특수해 $Q_p = \sin 2t + \sin 4t$를 얻는다.
homogeneous equation $2Q' + Q = 0$ 의 해는
$Q_h = ce^{-\frac{1}{2}t}$이므로, 일반해는 둘의 합인
$Q = Q_p + Q_h = \sin 2t + \sin 4t + ce^{-\frac{1}{2}t}$
그러므로 steady state 상태의 해는
$Q = \sin 2t + \sin 4t$

20. (a) $I = Q'$이므로 page 46 (7)로 부터, $RI + \frac{Q}{C} = E$를 얻는다.

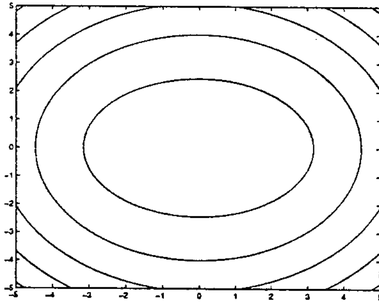
(b) Kirchhoff 법칙의 원래식 $RQ' + \frac{Q}{C} = E$ 을 생각하면 문제 10번 (a)와 같은 이유로 E 의 jump J는 Q'에만 J/R의 jump를 일으킨다.($Q' = I$)

(c) $0 < t < 2$ 구간 ;
$I' + I = t$이고 초기조건은 (a)에 의해 $I(0) = 0$
$I = t - 1 + e^{-t}$, $I(2) = 1 + e^{-2}$

$2 < t$ 구간 ;
$I_2' + I_2 = 0$이고 E가 $t = 2$에서 -2의 jump를 가지므로, (b)에 의해 $I_2(2) = -1 + e^{-2}$
이 조건을 만족하는 해를 구하면 $I_2 = (1 - e^2)e^{-t}$

1.8. Orthogonal Trajectories of Curves. Optional

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 4} = 1$



2. $(x - c)^2 + (y - c^3)^2 = 4$

3. $y + c = \cosh(x - c)$

4. $2y' - 1 = 0$

5. $y' = 2ce^{2x} = 2y$

6. $\arctan y = x + c$, $\frac{y'}{1 + y^2} = 1$

7. $y' = c + 1$, $y = (c + 1)x = y'x$

8. $x^{-4}y = c$ 의 양변 미분, $y' = 4y/x$

9. $\frac{y^2}{1 - x^2} = c^2$ 의 양변 미분, $2yy'(1 - x^2) + 2xy^2 = 0$

10. $y' = 2xy$ 이므로 orthogonal trajectory는 $y' = -\frac{1}{2xy}$를 만족한다. 변수분리법으로 풀면 $x = ce^{-y^2}$

11. $y' = -y$ 이므로 $y' = \frac{1}{y}$를 풀면 $y^2 = 2x + c$

12. $y' = 1/x$ 이므로 $y' = -x$ 를 풀면 $y = -\frac{1}{2}x^2 + c$

13. $y' = \frac{y}{2x}$ 이므로$y' = -\frac{2x}{y}$ 를 풀면 $x^2 + \frac{y^2}{2} = c$

14. $y' = \frac{1}{2y}$ 이므로$y' = -2y$ 를 풀면 $\ln|y| = -2x + c$

15. $y' = \frac{3}{2}y/x$ 이므로$y' = -\frac{2}{3}x/y$ 를 풀면
$2x^2 + 3y^2 = c$

16. $y' = -y/x$ 이므로$y' = x/y$ 를 풀면 $x^2 - y^2 = c$

17. $y' = -2y/x$ 이므로$y' = \frac{x}{2y}$ 를 풀면 $x^2 - 2y^2 = c$

18. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ 이므로$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ 를 풀면
$x^2 + (y - c)^2 = c^2$

19. $2x + 2yy' = 0$, $y' = -x/y$ 이므로
$y' = y/x$ 를 변수 분리법으로 풀면 $y = cx$를 얻는다.

20. 주어진 식을 전개하면 $(x^2 - 1)/y + y = 2c$
미분하면 $2x/y - [(x^2 - 1)/y^2 - 1]y' = 0$ 을 만족한다. 이식에 y'대신에 $-1/y'$을 대입하면 orthogona trajectory의 미방
$\frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1 - \frac{1}{x^2} = 0$을 얻는다.
$\frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{d}{dx}(\frac{y^2}{x})$임을 이용해 미방을 풀면, $(x + c)^2 + y^2 = c^2 - 1$ 을 구할 수 있다.

21. $xy = c$를 미분하면 $y + xy' = 0$을 얻는다.
그러므로 $y' = x/y$를 풀면 $x^2 - y^2 = c$ 로서 점근선이 $y = \pm x$인 쌍곡선의 curve들을 얻는다.

22. $4x + 2yy' = 0$, $y' = -2x/y$, $y' = y/2x$, $y = c\sqrt{x}$

23. y가 $g = c$의 orthogonal trajectory 라면, y의 기울기 벡터 $(1, y')$는 $\nabla g = (g_x, g_y)$ 와 평행하다. (왜냐하면 그래디언트는 등위면에 수직이기 때문)

24. Cauchy Rieman equation ; $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$
u와 v가 위의 식을 만족한다고 하면,
$dv = 0$에서 $dy/dx = -v_x/v_y$ 이고 이것은 다시 u_y/u_x 와 같으므로 문제 23의 결과에 의해 v는 u의 orthogonal trajectory
이 방법으로 $u = e^x \cos y$의 orthogonal trajectory를 구하면,
$v_y = u_x = e^x \cos y$ 에서 $v = e^x \sin y + k(x)$
$v_x = e^x \sin y + k' = -u_y = e^x \sin y$ 로 부터
$k' = 0, k =$ 상수
그러므로 $v = e^x \sin y = c$

25. F의 등위면이 G의 등위면들과 수직으로 만난다면 그 반대도 당연.

26. (a) y' 대신에 $-1/y'$을 대입하는 방법(example 1), g의 gradient를 이용하는 방법(문제 23), Cauchy Rieman equation을 이용하는 방법(문제 24) 등이 있다.

(b)trajectory를 구하면 $y = cx^{a^2/b^2}$인데 a^2/b^2 의 값에 따라 영향을 받는다.
(c)trajectory는 $y = cx^{-a^2/b^2}$

1.9. Existence and Uniqueness of Solutions. Picard Iteration

1. 어떤 함수가 존재해서 주어진 미방과 초기조건을 만족한다면, $0 = 0 \cdot y' = 4 \cdot 1 = 4$ 이므로 모순.

2. $y = cx^4$은 주어진 미방과 초기조건을 만족한다. 그러므로 무한히 많은 해가 존재한다. 그러나 $f(x,y) = 4y/x$ 는 (0,0) 점 근처에서 연속이 아니다. 그러므로 이 예는 유일성 정리의 반례가 아니다.

3. theorem1의 조건 $|f(x,y)| \le K$ 를 만족한다면 b는 무한히 클 수 있으므로 $\frac{b}{K}$의 최대값은 무한대이다. $\alpha = \min(a, \frac{b}{K}) = a$

4. 변수분리법으로 일반해를 찾으면, $y = cx(x-2)$
(a)$y(0) = k \ne 0$ or $y(2) = k \ne 0$ 이면 해가 없다. 문제 1번의 방법으로도 확인할 수 있다.
(b)$y(0) = 0$ or $y(2) = 0$ 이면 무한히 많은 해
(c) (a)(b)번의 경우를 제외하면 유일한 해가 존재
$f(x,y) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$은 $x = 0$ or $x = 2$에서 연속이 아니므로 Theorem 1 과 2의 반례가 아니다.

5. 두 solution 해가 R의 한 점에서 만나면, 그 점에서 해가 두개가 되므로 모순

6. $y' = xy$ if$(y \ge 0)$ 로 부터 $y = ce^{x^2/2}$ $(c \ge 0)$
마찬가지로 $y = ce^{-x^2/2}$ $(c \le 0)$

7. $f(x,y) = r(x) - p(x)y$ 당연히 연속
$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -p(x)$ 도 당연히 연속 그러므로 유일성 정리의 조건을 만족한다.

8. $|y-1| \le b$ 일 때 y^2의 최대값은 $(1+b)^2$
그러므로 $\frac{b}{K} = \frac{b}{(1+b)^2}$ 이고 그 최대값은 1/4
이상에서 theorem의 조건을 만족하는 optimal한 α 는 1/4이다. 즉, theorem에 의해서 존재성을 보장받는 구간은 $|x-1| < 1/4$
그러나 실제로 해를 구해보면 $y = 1/(x-2)$로서 구간 $|x-1| < 1$에서 해가 존재한다.

9. $|y| < b$에서 $1 + y^2$의 최대값은 $1 + b^2$
$\frac{b}{K} = \frac{b}{1+b^2}$ 의 최대값은 1/2
그러므로 optimal 한 α는 1/2

10. (a) Lipschitz condition 은 연속성보다 강하고 미분성보다 약한 중간적인 성질이라고 이해하면 된다. 유일성정리에 필요한 조건을 연속성에서 Lipschitz condition으로 약화시키면 유일성정리를 적용할 수 있는 문제가 그만큼 많이지는 것이다.

(b) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |\sin y_1 - \sin y_2|$
$= 2|\sin \frac{y_2-y_1}{2}||\cos \frac{y_2+y_1}{2}| \le 2\frac{|y_2-y_1|}{2} \cdot 1$
$= |y_2 - y_1|$ 이므로 Lipschitz condition 을 만족한다.
그러므로 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$는 $y = 0$에서 존재하지 않지만 유일성 정리를 적용할 수 있다.

(c) linear equation에서는 $f(x,y) = r(x) - p(x)y$가 연속이면 $r(x), p(x)$가 연속이 된다. (y가 0일때와 1일때를 생각하면 알 수 있다) 그러면 당연히 f는 Lipschitz condition 을 만족하게 된다. 즉, linear equation에서는 f의 연속성만 가지고 해의 유일성을 보장할 수 있다. 하지만 일반적으로 nonlinear equation에서는 f의 연속성만으로는 유일성을 보장할 수 없다.

11. $y_0 = 1$
$y_1 = 1 + \int_0^x 1dx = 1 + x$
$y_2 = 1 + \int_0^x 1 + xdx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
$y_3 = 1 + \int_0^x 1 + x + \frac{x^2}{2}dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
e^x 의 series 전개가 만들어 진다.

12. $y_0 = 0$
$y_{n+1} = \int_0^x x + y_n(x)dx$에 의해,
$y_n = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ 이 얻어진다. y_n은 참해 $e^x - x - 1$의 series 전개로 수렴한다.

13. $y_0 = -1$
$y_1 = -1 + \frac{x^2}{2!} - x$
$y_2 = -1 + -x + \frac{x^3}{3!}$
$y_3 = -1 + -x + \frac{x^4}{4!}$
$\vdots$
$y_n = -1 + -x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
이므로 y_n은 참해 $-1-x$에 수렴한다.

14. $y_0 = 1,\ y_1 = 1 + x,\ y_2 = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3, \cdots$
참해는 $y = 1/(1-x)$

15. $y_0 = 0$
$y_1 = \int_0^x 2x - x^3dx = x^2 - \frac{x^4}{4}$
$y_2 = \int_0^x -\frac{x^5}{4} + 2xdx = x^2 - \frac{x^6}{4 \cdot 6}$
$y_3 = \int_0^x -\frac{x^7}{4 \cdot 6} + 2xdx = x^2 - \frac{x^8}{4 \cdot 6 \cdot 8}$
이므로 참해 $y = x^2$에 수렴.

16. solution은 $y = 0$으로 존재하지만 $f = \sqrt{y}$가 (1,0)에서 Lipschitz 가 아니므로 유일성도, picard iteration의 수렴성도 보장할 수 없다.

17. $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$, $y_2 = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{3 \cdot 16}, \cdots$ 으로서, 참해 $1/(1+e^{-x})$에 수렴

18. 참해는 $y = x^3$이고 picard iteration에 의해 수열, $1,\ 1 + 3\ln x,\ 1 + 3\ln x + \frac{9}{2}(\ln x)^2, \cdots$을 얻는다.

19. $y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ 이므로 당연.

Chapter1. Review

1. 방정식중에 가장 높은 미분차수를 말한다.

2. ordinary differential equation은 미분하는 독립변수가 하나인 미방을 말하고 partial differential equation은 미분하는 독립변수가 두개 이상인 미방을 말한다.

3. 일반해는 미방만을 만족하는 해를 말하고, 특수해는 초기조건까지 만족하는 해를 말한다.

4. $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ 에서 f가 (x_0, y_0)근방에서 연속이면 해가 존재함을 알고, $\frac{\partial f}{\partial y}$까지$(x_0, y_0)$ 근방에서 연속이면 그 해는 유일하다.
해의 존재성과 유일성은 해를 구하는 방법에서 뿐만 아니라, 모델링이 잘 되었는지를검사하는 과정에도 이용될 수 있다.

5. 변수분리법, integrating factor 을 이용한 해법, linear equation의 일반적인 해법, picard iteration 등을 공부했다.

6. 많은 미방은 이 장에서 공부한 방법 모두로 풀 수 있다.

7. Mixing Problem, Velocity of escape, law of cooling,Atomic waste disposal,, Electric Circuits 등등

8. 풀기 어려운 미방이라도 direction field를 그리면 해의 모양에 접근할 수 있다.

9. 미방뿐만 아니라 여러 수학문제에서 iteration method는 접근하기 편하고 유용하게 쓰인다. (특히 computer를 이용한 수치접근)

10. 주어진 curve군의 Othogonal trajectory를 구하는 문제는 전기장과 Voltage potential과의 관계, 유체역학, 열전도학 등에 이용될 수 있다.

11. $E_L = L\frac{dI}{dt}$, $E_C = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(t)dt$ 관계와 Kirchhoff voltage law 에 기인.

12. 미방이 역학에서 나타나는 주요한 이유는 뉴턴2법칙 $F = ma$ 와 $a = \frac{dv}{dt}$, $v = \frac{ds}{dt}$ 관계에 있다 하겠다.

13. 지수함수적인 증가나 감소는 매우 빠른 증가나 감소를 의미하는데, 반감기가 있는 물리량은 이 지수함수적인 증가나 감소를 따른다.

14. direction field를 그리거나 picard iteration에 이용할 수 있겠고, 이 밖에 대표적인 방법으로는 Finite difference method 나 Finite element method 등이 있다.

15. linear equation
$(y' + 4y)e^{4x} = (ye^{4x})' = 17e^{4x}\sin x$
$y = ce^{-4x} - \cos x + 4\sin x$

16. 변수분리법
$\int \frac{dy}{ay + by^2} = \int dx,\ \frac{1}{a}\ln\left|\frac{2by}{2by + 2a}\right| = x + c$
$y = \frac{1}{ce^{-ax} - b/a}$

17. 변수분리법
$\int 25ydy = \int 9xdx,\ 25y^2 = 9x^2 + c$

18. 변수분리법
$\int \frac{dy}{y^2+1} = -\int \frac{dx}{x^2+1},\ \arctan y = -\arctan x + c$
tan 가법정리에 의해
$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x + y}{1 - xy} = c$

19. 변수 분리법, $\int \tan xdx = 2\int \cot 2ydy$
$-\ln|\cos x| = \ln|\sin 2y| + c,\ \cos x \sin 2y = c$

20. $\frac{\partial}{\partial y}(2xe^{x^2}\cosh y + 1) = \frac{\partial}{\partial x}e^{x^2}\sinh y$ 이므로 exact equation. 해는 $e^{x^2}\cosh y + x = c$

21. $y = ux$치환에 의해 $y' = u'x + u$를 미방에 대입하면,
$4x^2u(u'x + u) = u^2x^2 - x^2,\ 4uu'x = -(3u^2 + 1)$
$\int \frac{4udu}{3u^2+1} = -\int \frac{dx}{x},\ \frac{2}{3}\ln|3u^2 + 1| = -\ln|x| + c$
$3u^2 + 1 = cx^{-3/2},\ 3y^2 + x^2 = c\sqrt{x}$

22. $y = ux$치환에 의해 $y' = u'x + u$를 미방에 대입하면,
$x(xu' + u) = xu + x^2\sec u,\ u' = \sec u,\ \sin u = x + c$
$y = x\arcsin(x + c)$

23. Integrating Factor method
$P = 3xe^y + 2y,\ Q = x^2e^y + x$
$\frac{1}{Q}(P_y - Q_x) = \frac{1}{x},\ F(x) = exp\int 1/xdx = x$
$u = \int Qxdy + k(x) = x^3e^y + x^2y + k(x)$
$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2e^y + 2xy + k' = Px$ 로 부터 $k =$ 상수
$Answer : x^3e^y + x^2y = c$

24. 문제 23과 같이 Integrating Factor 를 구하면
$F = e^{x^2}$, $Answer : e^{x^2}\tan y = c$

25. 변수분리법, $\int \frac{dy}{y} = \int \tanh x dx$
$\ln|y| = \ln\cosh x + c$, *Answer* : $y = \pi \cosh x$

26. 변수분리법, $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$
$\arcsin y = x + c$, *Answer* : $y = \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$

27. $u = xy$치환, $u' = u^2$, $u = -\frac{1}{x+c}$, $y = \frac{1}{3x-x^2}$

28. linear equation $(y' + 4xy)e^{2x^2} = (ye^{2x^2})' = 1$
Answer : $y = e^{-2x^2}(x+c)$, $c = -4$

29. 변수 분리법 $\int 9\cos x dx = \int -\cos y dy$
Answer : $9\sin x = -\sin y + c$, $c = 0$

30. $(2x + e^y)_y = e^y = (xe^y)_x$ 이므로 exact equation
Answer : $xe^y + x^2 = 6$

31. integrating factor F 를 구해야 한다.
$P = 3x^2y$, $Q = 2x^3$, $\frac{1}{P}(Q_x - P_y) = \frac{1}{y}$
$F(y) = \exp\int \frac{1}{y}dy = y$, F를 주어진 미방에 곱하면 exact equation이므로 해를 구할 수 있다.
Answer : $x^3y^2 = 9$

32. 변수 분리법, $\int \tanh y dy = \int \frac{dx}{x}$,
$\ln\cosh y = \ln x + c$, $\cosh y = cx, c = \frac{1}{3}$

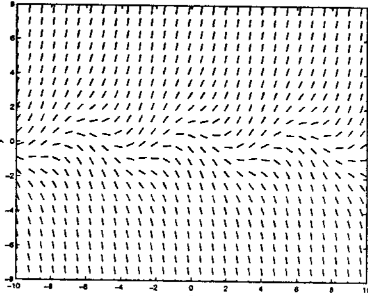
33. Bernoulli equation $u = y^2$ 치환;
$u' + 2xu = 2yy' + 2xy^2 = 2y(y' + xy) = 2yxy^{-1}$
$= 2x$ 이므로 u에 관한 미방은 linear equation
$(u' + 2xu)e^{x^2} = (ue^{x^2})' = 2xe^{x^2}$
$ue^{x^2} = \int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2} + c$
Answer : $\sqrt{1 + ce^{-x^2}}$, $c = 3$

34. Bernoulli equation $u = y^{-2}$ 치환;
$u' - u = -\frac{2y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} = -\frac{2}{y^3}(y' + \frac{1}{2}y)$
$= -\frac{2}{y^3}y^3 = -2$ (linear equation)
$u = ce^x + 2$, *Answer* : $y = \frac{1}{\sqrt{2 - e^x}}$

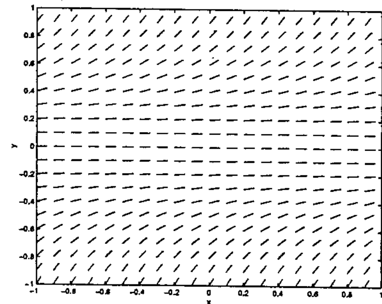
35. $y = ce^{-3x}$

36. $y = ce^{-x^2}$

37. $y = ce^x - 0.1\cos 10x - 0.01\sin 10x$



38. $y = \frac{1}{c - 2x}$



39. $y' = 2x$이므로 trajectory의 미방은
$y' = -\frac{1}{2x}$, $y = -\frac{1}{2}\ln|x| + c$

40. $y' = -3y/x$이므로 trajectory의 미방은
$y' = \frac{x}{3y}$, $y = \sqrt{x^2/3 + c}$

41. $y' = -xy$이므로 이므로 trajectory의 미방은
$y' = 1/(xy)$, $y = \sqrt{2\ln|x| + c}$

42. 문제 41의 결과와 같으므로 trajectory는 $ce^{-x^2/2}$

43. $y_0 = 1, y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x 2y_n(x)dx$에 의해,
수열 $1, 1 + 2x, 1 + 2x + (2x)^2/2, \cdots$을 얻는다.

44. $y_0 = 2$, $y_{n+1}(x) = 2 + \int_0^x 1 - y_n(x)dx$에 의해
수열 $2, 2 - x, 2 - x + \frac{1}{2}x^2, 2 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \cdots$
을 얻는다. 참해는 $y = 1 + e^{-x}$

45. $y' = ky$, $y(1) = 1.5y(0)$
$y = ce^{kt}$, $ce^k = 1.5c$ 로 부터 $e^k = 1.5$
$2 = \frac{y(t)}{y(0}$인 시간은 $2 = \frac{ce^{kt}}{c}$ 를 풀면
$2 = (1.5)^t$, $t = \frac{\ln 2}{\ln 1.5} \approx 1.7$
마찬가지로 세배가 되는 시간은 $\frac{\ln 3}{\ln 1.5} \approx 2.7$

46. $T' = k(T - 100)$, $T(0) = 20$
변수분리법으로 풀면, $T(t) = 100 - 80e^{kt}$을 얻고
$T(1) = 100 - 80e^k = 51.5$로 부터 $k = -0.5$
$99.9 = 100 - 80e^{-0.5t}$가 되는 시간은 $\frac{\ln 800}{0.5} \approx 13.4$

47. $y = ce^{kt}$, $\frac{y(1)}{y(0)} = 0.9$ 로 부터 $e^k = 0.9$
$1/2 = \frac{y(t)}{y(0)}$인 시간은 $1/2 = \frac{ce^{kt}}{c}$ 를 풀면
$1/2 = (0.9)^t$, $t = \frac{\ln(1/2)}{\ln 0.9} \approx 6.6$
마찬가지로 $0.01 = \frac{y(t)}{y(0)}$인 시간은 $\frac{\ln 0.01}{\ln 0.9} \approx 43.7$

48. $LI' + RI = E$, $I(0) = 0$을 풀면
$I(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$
steady state $\frac{E}{R} = \frac{48}{R}$ 이 10이어야 하므로 $R = 4.8$
$9.99 = 10(1 - e^{-\frac{4.8}{L}10^{-2}})$이어야 하므로 $L = 0.007$

49. 7절 문제 13번에서 capacitor 는 최대 E_0까지 채워질 수 있으므로 t_2일때 capacitor에는 $0.99E_0$가 충전된다.

t_2부터는 $E = 0$인 RC회로이므로, $RI' + I/C = 0$을 만족하고, t_2순간에 I_0는 $\frac{0.99E_0}{R}$(전압/저항) 이므로 이것을 초기조건으로 해서 방정식을 풀면 $I = I_0 e^{(t-t_2)/(RC)}$을 구할 수 있다.

50. 시간t에 대한 소금의 양을 $y(t)$라 하면 y는 $y'(t) =$ 들어오는양 − 나가는양 $= 20 - \dfrac{20}{500}y$, $y(0) = 80$을 만족한다. 이것을 풀면
$y = 500 - 420e^{-0.04t}$이므로 시간이 지나면 이론적으로 탱크는 소금으로 가득차게 된다.
$500 - 420e^{-0.04t} = 500 \cdot 0.95$인 시간을 구하면 70.5초

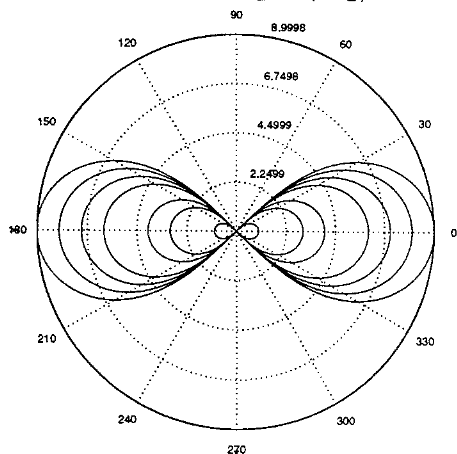
51. $v = at + 10^4$, $v(10^{-4}) = a10^{-4} + 10^4 = 10^6$로부터
$a = 10^4(10^6 - 10^4) = 99 \cdot 10^8$
$s = \frac{99 \cdot 10^8}{2}t^2 + 10^4 t$ 이므로
$s(10^{-4}) = \frac{99 \cdot 10^8}{2}(10^{-4})^2 + 10^4 \cdot 10^{-4} = 50.5$

52. 전기력선은 potential 등위면에 수직이므로
$x^2 + 2y^2 = 1$, $\frac{1}{4}(x^2 + 2y^2) = 1$에 동시에 수직인 curves들을 찾으면 된다. (orthogonal trajectory)
두 곡선이 $y' = -x/(2y)$를 만족하므로 trajectory는 $y' = 2y/x$를 만족한다. solution을 구하면 $y = cx^2$

53. 열은 등위면에 수직방향으로 전달되므로 $xy = c$의 orthogonal trajectory를 구하면 된다.
$xy = c$가 $y' = -y/x$를 만족하므로 trajectory는 $y' = x/y$를 만족한다. 이것을 풀면 $y^2 - x^2 = c$

54. $$\int \frac{dy}{(y-a)(y-b)} = \int k dt$$
$\dfrac{1}{(y-a)(y-b)} = \dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{y-b} - \dfrac{1}{y-a}\right)$를 이용해 적분을 구하면,
$\ln(y-b) - \ln(y-a) = (b-a)(kt+c)$
$\dfrac{y-b}{y-a} = ce^{(b-a)kt}$

55. 변수분리법으로 풀면,
$\int r dr = \int -a^2 \sin 2\theta d\theta$, $r^2 = a^2 \cos 2\theta$
x, y축에 solution curve들을 그려보면,



CHAPTER 2

Linear Differential Equations of Second and Higher Order

The ordinary differential equations may be divided into two large classes, namely, **linear equations** and **nonlinear equations.** Whereas nonlinear equations are difficult in general, linear equations are much simpler because their solutions have general properties that facilitate working with them, and there are standard methods for solving many practically important linear differential equations.

We first consider linear differential equations of second order—homogeneous equations in Secs. 2.1–2.7 and nonhomogeneous equations in Secs. 2.8–2.12. Higher order equations follow in Secs. 2.13–2.15.

We concentrate on second-order equations for two main reasons. First, they have important applications in mechanics (Secs. 2.5, 2.11) and in electric circuit theory (Sec. 2.12). Second, their theory is typical of that of linear differential equations of any order n (but involves much simpler formulas), so that the transition to higher order n needs only very few new ideas.

Numerical methods for second-order differential equations are included in Sec. 19.3, which is independent of the other sections in Chaps. 17–19 and can be studied after Sec. 2.12 (or after the end of this chapter) if desired.

(Legendre's, Bessel's, and the hypergeometric equations will be considered in Chap. 4.)

Prerequisite for this chapter: Chap. 1, in particular Sec. 1.6.
Sections that may be omitted in a shorter course: 2.4, 2.7, 2.10, 2.12, 2.13–2.15.
References: Appendix 1, Part A.
Answers to problems: Appendix 2.

2.1. Homogeneous Linear Equations of Second Order

1. $F(x, z, z') = 0$의 일차미방이 된다.y

2. $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$ 이므로
$F(y, z, \frac{dz}{dy}z) = 0$인 일차미방이 된다.

3. $y' = z$으로 두면, $z' = z$ 이므로$z = c_1e^x$, $y = c_1e^x + c_2$

4. $y' = z$으로 두면, $2xz' = 3z$ 이므로일차미방으로 떨어진다. 변수분리법으로 풀면 $z = c_1x^{3/2}$ z을 적분하면, $y = c_1x^{5/2} + c_2$

5. $y' = z$으로 두고 $z' = \frac{dz}{dy}$ =를 생각하면,
$y'' = z'z$ 이므로 방정식은 일차미방인 $yzz' = 2z^2$ 으로 떨어진다.
$yz' = 2z$, $\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y}$, $z = c_1y^2$ 이므로
$y' = c_1y^2$, $\frac{dy}{y^2} = c_1dx$, $-\frac{1}{y} = c_1x + c_2$을 얻는다.

6. page 70 (9)에 의해
$U = \frac{x^2}{\sin^2 x}\exp\left(-\int \frac{2}{x}dx\right)$
$= \frac{x^2}{\sin^2 x}x^{-2} = \frac{1}{\sin^2 x}$
$y_2 = y_1\int U dx = \frac{\sin x}{x}(-\cot x) = -\frac{\cos x}{x}$
그러므로 $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\frac{\cos x}{x}$

7. $y' = z$으로 두고 $z' = \frac{dz}{dy}$ =를 생각하면,
$y'' = z'z$ 이므로 방정식은 일차미방인
$z'z + e^yz^3 = 0$ 으로 떨어진다.
$z' + e^yz^2 = 0$, $-\frac{dz}{z^2} = e^ydy$, $\frac{1}{z} = e^y + c_1$
$y' = \frac{1}{e^y + c_1}$, $(e^y + c_1)dy = dx$, $e^y + c_1y = x + c_2$

8. $y' = z$ 으로두면 $xz' + z = 0$, $\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$, $z = c_1\frac{1}{x}$
$y' = c_1\frac{1}{x}$, $y = c_1\ln|x| + c_2$

9. page 70 (9)에 의해
$$U = \frac{1}{(x^3)^2}\exp\left(-\int \frac{-5x}{x^2}dx\right) = \frac{1}{x^6}x^5 = \frac{1}{x}$$
$y_2 = y_1\int U dx = x^3\ln|x|$
$y = c_1x^3 + c_2x^3\ln|x|$

10. $y' = z$으로 두고 $z' = \frac{dz}{dy}$ =를 생각하면,
$y'' = z'z$ 이므로 방정식은 일차미방인
$z'z + (1 + y^{-1})z^2 = 0$으로 떨어진다.
$z' + (1 + y^{-1})z = 0$, $\frac{dz}{z} = -(1 + y^{-1})dy$
$z = \frac{c_1e^{-y}}{y} = y'$, $ye^ydy = c_1dx$
$(y - 1)e^y = c_1x + c_2$

11. page 70 (9)에 의해
$U = \frac{1}{(x^{-1/2}\cos x)^2}\exp\left(-\int \frac{1}{x}dx\right)$
$= \frac{1}{x^{-1}\cos^2 x}x^{-1} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$y_2 = y_1\int U dx = x^{-1/2}\cos x\tan x = x^{-1/2}\sin x$
$y = c_1x^{-1/2}\cos x + c_2x^{-1/2}\sin x$

12. page 70 (9)에 의해
$U = \frac{1}{x^2}\exp\left(\int -\frac{-2x}{1 - x^2}dx\right)$
$= \frac{1}{x^2}\exp(-\ln(1 - x^2)) = \frac{1}{x^2}\frac{1}{1 - x^2}$
U를 부분분수로 나누면
$U = \frac{1}{x^2} + \frac{1/2}{x + 1} - \frac{1/2}{x - 1}$
$y_2 = y_1\int U dx = -1 + \frac{1}{2}x\ln\frac{x + 1}{x - 1}$
그러므로 $y = c_1x + c_2(-1 + \frac{1}{2}x\ln\frac{x + 1}{x - 1})$

13. $va = 1$, $y(0) = 2$, $v(0) = 2$
$y'y'' = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$
$z = y'$치환해서 $zz' = 1$, $z(0) = 2$ 을 풀면
$zdz = dt$, $z^2 = 2t + c$, $z = \pm\sqrt{2t + c}$
$z(0) = 2$ 이므로$z = \sqrt{2t + 4}$
$y' = \sqrt{2t + 4}$, $y(0) = 2$ 로 부터 y를 적분해서 풀면
$y = \frac{1}{3}(2t + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$, $y(6) = \frac{62}{3}$, $y'(6) = 4$

14. $y' = y''$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$
$z = y'$치환해서 $z' = z$, $z(0) = 2$ 을 풀면
$z = ce^t$, $z = 2e^t$
$y' = 2e^t$, $y(0) = 2$ 로 부터
$y = 2e^t$, $y(6) = y'(6) = 807$

15. $y'' = 2y'$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
$z = y'$ 치환해서 $z' = 2z$, $z(0) = 1$ 을 풀면
$z = ce^{2x}$, $z = e^{2x}$
$y' = e^{2x}$, $y(0) = 0$ 을 풀면 $y = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$

16. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$, $y(-1) = y(1) = 0$
$z = y'$치환하면 $z' = \sqrt{1 + z^2}$
$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = dx$, $\sinh^{-1} z = x + c_1$
$y' = z = \sinh(x + c_1)$, $y = \cosh(x + c_1) + c_2$
경계조건으로부터
$y(-1) = \cosh(c_1 - 1) + c_2 = 0 = \cosh(c_1 + 1) + c_2$
$\cosh(c_1 - 1) = \cosh(c_1 + 1)$에서
$|c_1 - 1| = |c_1 + 1|$ 이므로
$c_1 = 0$, 따라서 $c_2 = -\cosh 1$
$y = \cosh x - \cosh 1$

17. $\cos x$, $\sin 3x$가 방정식을 만족하고 linear independent하므로
$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$로 두고 해를 구하면 된다.
$y(0) = c_1 = 4$, $y'(0) = 3c_2 = -6$ 이므로
$y = 4\cos 3x - 2\sin 3x$

18. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$로 두고 해를 구하면
$y(0) = c_1 = 1,\ y'(0) = -c_1 + c_2 = 0$ 이므로
$y = e^{-x} + xe^{-x}$

19. $y = c_1 x^{-1/2} + c_2 x^{3/2}$ 로 두고 해를 구하면
$y(1) = c_1 + c_2 = 3$
$y'(1) = -\frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 = 2.5$ 로 부터
$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ y = x^{-1/2} + 2x^{3/2}$

20. (a)homogeneous linear equation 에서 y_1과 y_2가 해라면 $y_1 + y_2$ 도 해라는 원리.
(b)(c)(d) homogeneous linear equation 에서 해의 합이나 상수배는 다시 해가 되지만 곱은 일반적으로 해가 되지 않는다.

2.2. Second-order Homogeneous Equations with Constant Coefficients

1. $4\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0$을 풀면 $\lambda = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$
그러므로 $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$

2. $\lambda^2 + 3.2\lambda + 2.56 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1.6$ (중근)
그러므로 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-1.6x}$

3. $2\lambda^2 - 9\lambda = 0$ 을 풀면 $\lambda = 0, \frac{9}{2}$
그러므로 $y = c_1 + c_2 e^{\frac{9}{2}x}$

4. $\lambda^2 - 8 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm\sqrt{8}$
그러므로 $y = c_1 e^{\sqrt{8}x} + c_2 e^{-\sqrt{8}x}$

5. $\lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -4, -5$
그러므로 $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-5x}$

6. $16\lambda^2 - \pi^2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm\pi/4$
그러므로 $y = c_1 e^{\frac{\pi}{4}x} + c_2 e^{-\frac{\pi}{4}x}$

7. $9\lambda^2 - 30\lambda^2 + 25 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \frac{5}{3}$(중근)
그러므로 $y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{5}{3}x}$

8. $10\lambda^2 + 6\lambda^2 - 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1, 0.4$
그러므로 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{0.4x}$

9. $\lambda^2 + 2k\lambda + k^2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -k$(중근)
그러므로 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-kx}$

10. $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ 을 풀면 $\lambda = 2, -3$
그러므로 일반해는 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$
초기조건 $y(0) = 10,\ y'(0) = 0$을 만족하는 해는
$y = 6e^{2x} + 4e^{-3x}$

11. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -2$(중근)
그러므로 일반해는 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$
특수해는 $y = (1 + 3x)e^{-2x}$

12. $\lambda^2 - 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 1$
그러므로 일반해는 $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$
특수해는 $y = 3e^{-x}$

13. $8\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1/4, 1/2$
그러므로 해는 $y = 0.3e^{-\frac{1}{4}x} - 0.5e^{\frac{1}{2}x}$

14. $4\lambda^2 - 25 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm\frac{5}{2}$
그러므로 해는 $y = e^{-\frac{5}{2}x} - e^{\frac{5}{2}x}$

15. $\lambda^2 + 2.2\lambda + 1.17 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1.3, -0.9$
그러므로 해는 $y = 2e^{-1.3x}$

16. $\lambda^2 - k^2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm k$
그러므로 해는 $y = \frac{k+1}{2k}e^{kx} + \frac{k-1}{2k}e^{-kx}$

17. $4\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1/2, 3/2$
그러므로 해는 $y = e^{-\frac{1}{2}x}$

18. $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ 는 어떤구간에서도 상수가 아니다.
그러므로 linear independent

19. 0함수는 모든 함수와 linear dependent.

20. $\frac{x^2}{x^2 \ln x} = \frac{1}{\ln x}$ 는 어떤구간에서도 상수가 아니다
그러므로linear independent

21. $\ln(x^4) = 4\ln x$ 이므로 linear dependent

22. linear independent

23. linear independent

24. x가 양수인 구간이므로 $x|x| = x \cdot x = x^2$ linear dependent

25. $\frac{x|x|}{x^2} = \frac{|x|}{x} = \pm 1$ 이므로 linear independent

26. $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ 이므로 linear dependent

27. 한점에서의 값은 항상 상수배 관계이기 때문에 아무 의미가 없다.

28. f, g가 I에서 linear independent라도 subinterval J에서는 linear dependent일수 있다. 예를 들어 x^2과 $x|x|$는 실수전체에서 봤을때는 linear independent이지만 양수구간에서는 일치하므로 linear dependent이다.

30 (a)근과 계수의 관계; $\lambda_1 + \lambda_2 = -a,\ \lambda_1\lambda_2 = b$

(b)$y'' + ay' = 0$
$(i)\lambda^2 + a\lambda = 0$ 을 풀면 $\lambda = 0, -a$
$y = c_1 + c_2 e^{-ax}$
$(ii)y' = z$치환
$z' = -az,\ z = c_1 e^{-ax}$
$y' = c_1 e^{-ax}$를 적분하면 $y = c_1 e^{-ax} + c_2$
둘의 결과가 일치한다

(c) -2가 중근이 아니므로 xe^{-2x}는 해가 아니다.

(d) $y'' - (2k+m)y' + k(k+m)y = 0$의 해중에
$\frac{e^{(k+m)x} - e^{kx}}{m}$을 생각하고 m을 0으로 보내면 방정식은 중근 k 경우의 방정식 $y'' - 2ky' + k^2y = 0$이 되고,
$\lim_{m\to 0} \frac{e^{(k+m)x} - e^{kx}}{m} = \lim_{m\to 0} \frac{xe^{(k+m)x}}{1} = xe^{kx}$가 된다 (첫번째 등식에서 로피탈의 정리를 썼다)

2.3. Case of Complex Roots. Complex Exponential Function

1. $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$을 풀면 $\lambda = 1 \pm i$
그러므로 일반해는 $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$

2. $\lambda^2 + 4\pi^2 y = 0$을 풀면 $\lambda = \pm 2\pi$
그러므로 일반해는 $y = (A\cos(2\pi x) + B\sin(2\pi x))$

3. $4\lambda^2 + 4\lambda + 10 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
그러므로 $y = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{3}{2}x) + B\sin(\frac{3}{2}x))$

4. $\lambda^2 + 2k\lambda + k^2 + 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -k \pm 2$
그러므로 $y = e^{-kx}(A\cos(2x) + B\sin(2x))$

5. case II $25\lambda^2 + 40\lambda + 16 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -0.8$
그러므로 $y = (c_1 + c_2x)e^{-0.8x}$

6. case I $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ 을 풀면 $3, -4$
그러므로 $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$

7. case III $16\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}i$
그러므로 $y = e^{\frac{1}{4}x}(A\cos(\frac{1}{2}x) + B\sin(\frac{1}{2}x))$

8. case III $\lambda^2 + 4\lambda + (4 + \omega^2) = 0$ 을 풀면 $\lambda = -2 \pm \omega i$
그러므로 $y = e^{-2x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$

9. case case I $\lambda^2 - 9\pi^2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 3\pi$
그러므로 $y = c_1e^{3\pi x} + c_2e^{-3\pi x}$

10. case III $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2.5 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \sqrt{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$
그러므로 $y = e^{\sqrt{2}x}(A\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}x) + B\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}x))$

11. case II $\lambda^2 - 2\sqrt{2} + 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \sqrt{2}$
그러므로 $y = (c_1 + c_2x)e^{\sqrt{2}x}$

12. case III
$\lambda^2 + 2k\lambda + (k^2 + k^{-2}) = 0$ 을 풀면 $\lambda = -k \pm \frac{1}{k}i$
그러므로 $y = e^{-kx}(A\cos(\frac{1}{k}x) + B\sin(\frac{1}{k}x))$

13. $9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -\frac{1}{3}$
그러므로 일반해는$y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{1}{3}x}$
초기조건 $y(0) = 4, y'(0) = -13/3$을 만족하는 특수해는 $y = (4 - 3x)e^{-\frac{1}{3}x}$

14. $4\lambda^2 + 16\lambda + 17 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -2 \pm \frac{1}{2}i$
특수해는 $y = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}$

15. $\lambda^2 - 25 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 5$
특수해는 $y = 2e^{5x} - 2e^{-5x}$

16. $\lambda^2 + 0.4\lambda + 0.29 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -0.2 \pm 0.5i$
특수해는 $y = e^{-0.2x}(\cos(0.5x) - 2\sin(0.5x))$

17. $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1, 2$
특수해는 $y = 3e^{-x} - 7e^{2x}$

18. $\lambda^2 - 2\lambda + (4\pi^2 + 1) = 0$ 을 풀면 $\lambda = 1 \pm 2\pi i$
특수해는 $y = e^x(-2\cos(2\pi x) + 3\sin(2\pi x))$

19. $\lambda^2 + 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 2i$
그러므로 일반해는$y = (A\cos(2x) + B\sin(2x))$
경계조건을 만족하는 특수해를 구하면,
$y(0) = A = 3,\ y(\pi/2) = -A = -3$ 이므로 B는 구할수 없다. 특수해는 $y = 3\cos 2x + B\sin 2x$

20. $\lambda^2 - 25 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 5$
일반해는$y = c_1e^{5x} + c_2e^{-5x}$
경계조건을 만족하는 특수해를 구하면,
$y(2) = c_1e^{10} + c_2e^{-10} = \cosh 10$
$y(-2) = c_1e^{-10} + c_2e^{10} = \cosh 10$으로부터
$y = \frac{1}{2}e^{5x} + \frac{1}{2}e^{-5x} = \cosh 5x$

21. $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1 \pm i$
경계조건을 만족하는 특수해는 $y = e^{-x}\cos x$

22. $3\lambda^2 - 8\lambda - 3 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -\frac{1}{3}, 3$
경계조건을 만족하는 특수해는 $y = e^{-\frac{1}{3}x - 1}$

23. $\Rightarrow$) 당연
$\Leftarrow$)$y(P_1) = y(P_2) = 0$인 해는 $y = 0$뿐이라 하자.
y_1, y_2가 boundary problem
$y'' + ay' + b = 0,\ y(P_1) = K_1,\ y(P_2) = K_2$의 두해라고 하면
$y_1 - y_2$는 $y'' + ay' + b = 0,\ y(P_1) = 0,\ y(P_2) = 0$ 의 해가 된다. 처음 가정에 의해 $y_1 - y_2 = 0$이고 $y_1 = y_2$ 따라서 해는 유일하다.

24. $y = e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$의 극점은 $\cos(\omega t + \delta)$ 가 ± 1인 점이므로 y는 $\cos(\omega t + \delta)$의 주기 $\frac{2\pi}{\omega}$를 그대로 가지고 극값들은 $\pm e^{-\alpha t}$ 와 일치한다.

2.4. Differential Operators.Optional

1. $(D^2+3D)(\cosh 3x) = (\cosh 3x)'' + 3(\cosh 3x)'$
$= 9\cosh 3x + 9\sinh 3x = 9e^{3x}$
$(D^2+3D)(e^{-x}+e^{2x})$
$= (e^{-x}+e^{2x})'' + 3(e^{-x}+e^{2x})'$
$= e^{-x} + 4e^{2x} - 3e^{-x} + 6e^{2x} = 10e^{2x} - 2e^{-x}$
$(D^2+3D)(10-e^{-3x})$
$= (10-e^{-3x})'' + 3(10-e^{-3x})' = -9e^{-3x} + 9e^{-3x}$
$= 0$

2. $(D-4)(3x^2+4x) = (3x^2+4x)' - 4(3x^2+4x)$
$= 6x + 4 - 12x^2 - 16x = -12x^2 - 10x + 4$
$(D-4)(4e^{4x}) = 0$
$(D-4)(\cos 2x - \sin 2x) = 2\sin 2x - 6\cos 2x$

3. $(D-2)(D+1) = D^2 - D - 2$ 이므로
$(D^2-D-2)(e^{2x}) = 0$
$(D^2-D-2)(xe^{2x}) = 3e^{2x}$
$(D^2-D-2)(e^{-x}) = 0$
$(D^2-D-2)(xe^{-x}) = -3e^{-x}$

4. $(D+5)^2 = D^2 + 10D + 25$ 이므로
$(D^2+10D+25)(5x+\sin 5x) = 25(2+5x+2\cos 5x)$
$(D^2+10D+25)(xe^{5x}) = 20(1+5x)e^{5x}$
$(D^2+10D+25)(xe^{-5x}) = 0$

5. $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1, 2$
$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$

6. $9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$ 을 풀면 $-1/3$
$y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{1}{3}x}$

7. $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ 을 풀면 $\lambda = 0, 4$
$y = c_1 + c_2e^{4x}$

8. $25\lambda^2 - 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm\frac{1}{5}$
$y = c_1e^{\frac{1}{5}x} + c_2e^{-\frac{1}{5}x}$

9. $\lambda^2 + 2k\lambda + k^2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -k$
$y = (c_1 + c_2x)e^{-kx}$

10. $\lambda^2 + \pi(\pi-1) - \pi^3 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pi, -\pi^2$
$y = c_1e^{\pi x} + c_2e^{-\pi^2 x}$

11. $64\lambda^2 + 16\lambda + 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -\frac{1}{8}$
$y = (c_1 + c_2x)e^{-\frac{1}{8}x}$

12. $2\lambda^2 + \lambda = 0$ 을 풀면 $\lambda = 0, -\frac{1}{2}$
$y = c_1 + c_2e^{-\frac{1}{2}x}$

13. $10\lambda^2 + 12\lambda + 3.6 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -0.6$
$y = (c_1 + c_2x)e^{-0.6x}$

14. $L[cy_1 + y_2] = (D^2 + aD + b)(cy_1 + y_2)$
$= (cy_1 + y_2)'' + a(cy_1 + y_2)' + b(cy_1 + y_2)$
$= cy_1'' + y_2'' + a(cy_1' + y_2') + b(cy_1 + y_2)$
$= (cy_1'' + acy_1' + bcy_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2)$
$= c(y_1'' + ay_1' + by_1) + (y_2'' + ay_2' + by_2)$
$= c(D^2 + aD + b)y_1 + (D^2 + aD + b)y_2$
$= cL[y_1] + L[y_2]$
이므로 L은 linear operator

2.5. Modeling:Free Oscillations(Mass-Spring System

1. 삼각함수 합성공식에 의해
$y = \sqrt{y_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}\cos[\omega_0 t - \arctan(v_0/(y_0\omega_0))]$

2. $W = 20, s = 0.02$
$k = \frac{W}{s} = \frac{20}{0.02} = 10^3$, $m = \frac{W}{g} = \frac{20}{9.8} = 2.04$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{2.04}} = 22.14$
frequency; $f = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3.52$[Hz]
period $= \frac{1}{f} = 1/3.52 = 0.284$ [sec]

3. 당연히 무게가 늘면 frequency 가 작아질 것이고, 센 용수철(k가 큰 용수철)이면 frequency가 커질 것이다. 계산하면
$2m$일때의 frequency$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$
이므로 무게가 두배가 되면 frequency는 $\sqrt{2}$배가 된다.

4. 그렇지 않다.frequency 는 $\sqrt{\frac{k}{m}}$에만 영향을 받는다.

5. $\dfrac{k}{m} = \dfrac{W/s_0}{W/g}$ 이므로 당연.

6. 용수철 두개가 연결되어 있는 경우의 문제
결합된 용수철의 Hooke상수를 k라 하자. 힘 F에 대해 결합판 용수철이 늘어난 길이는 F/k인데, 첫번째 용수철에서 늘어난 길이는 F/k_1, 두번째 용수철에서 늘어난 길이는 F/k_2이므로 $F/k = F/k_1 + F/k_2$
그러므로 $1/k = 1/k_1 + 1/k_2 = 1/8 + 1/12$ 로부터
$k = 4.8$

7. (i) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20}{5}} = 0.3183$
(ii) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{45}{5}} = 0.4775$
(iii) 병렬연결한 용수철의 Hooke상수를 k라 하자. 길이 y가 늘어났을때 용수철의 탄성력은 $k_1y + k_2y$이고 이것은 ky와 같으므로 $k = k_1 + k_2 = 20 + 45 = 65$
$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{65}{5}} = 0.5738$

8. m을 실린더의 질량이라 하고, y를 실린더가 물에 들어간 깊이라고 하면 물에 들어간 부피는 $0.3^2\pi y$.
부력의 크기는 아르키메데스의 원리에 의해 $0.3^2\pi y\gamma$가 되고, (γ는 물 1kg당 작용하는 중력으로서 약 9800 nt) 부력의 방향은 깊이와 반대 방향이므로 부력은 $-0.3^2\pi y\gamma$.

이제 뉴턴 제 2 법칙에 의해 y는 $my'' = -0.3^2\pi y\gamma$ 를 만족한다.
용수철의 경우와 똑같이 이 방정식을 생각하면
$k = 0.3^2\pi\gamma$이므로 $\omega_0^2 = 0.3^2\pi\gamma/m$이 되고 period는 $2\pi/\omega_0$
이것이 2 이므로 $\omega_0 = \pi$
이제 $\pi^2 = 0.3^2\pi\gamma/m$이도록 m을 결정하면 된다.
$m = 0.3^2\gamma/\pi = 281$ (kg)

9. 양쪽의 높이가 같게 되는 선을 평형선이라고 하자. 한쪽이 평형선에서 y만큼 올라오면 낮은쪽보다 $2y$가 높고 이것의 무게가 물의 움직임을 만든다.
한쪽보다 올라온 물의 무게는 $(0.01)^2\pi(2y)\gamma$(γ는 물 1kg당 작용하는 중력으로서 약 9800 nt).
그러므로 y는 $my'' = -2(0.01)^2\pi y\gamma$ 를 만족한다. (힘의 방향이 높이 와 반대이므로 음수부호)
용수철 방정식과 똑같이 생각한면,($k = 2(0.01)^2\pi\gamma$인 경우) $\omega_0^2 = k/m = 2(0.01)^2\pi\gamma$이고 ($m = 1$이므로)
frequency는 $\omega_0/(2\pi) = \frac{\sqrt{2(0.01)^2\pi\gamma}}{2\pi} = 0.4$

10. $y'' + \omega_0^2 y = 0$인 system 에서 frequency는 $\frac{\omega_0}{2\pi}$.

(a)질량 × (호의길이)$'' = mL\theta'' = -mg\sin\theta$
=중력 mg의 접선성분
$\sin\theta \approx \theta$ 이므로$mL\theta'' = -mg\theta$
$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ 이므로 frequency는 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{g/L}$

(b) (a)에 의해 frequency 는 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8}{1}} = 0.498$
period는 $1/0.498 \approx 2$초
1cycle 에 2초가 걸리므로 1분동안 30번 똑딱거린다.

(c) Hooke 법칙에 의해 $mg = ks_0$
$s_0 = 1$ 이므로$\frac{k}{m} = g$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{g} = \sqrt{9800} = 31.3$
($g = 9800$ cm/sec^2)
일반해는 $y = A\cos 31.3t + B\sin 31.3t$
초기조건 $y(0) = 0, y'(0) = 10$
(평형상태의 y를 0으로 잡는다.)
$y = 0.319\sin 31.3t$

(d)$\theta'' + 13.69\theta = 0$
$\theta(0) = 30°$, $\theta'(0) = 20°$ 을 풀면
$\theta = 30\cos\sqrt{13.69}t + 5.4\sin\sqrt{13.69}t$ (°)

11. $y_0 = y(0) = c_1 + c_2$
$v_0 = y'(0) = -(\alpha-\beta)c_1 - (\alpha+\beta)c_2$
$= -\alpha(c_1+c_2) + \beta(c_1 - c_2)$
$= -\alpha y_0 + \beta(c_1 - c_2)$ 이므로
$c_1 + c_2 = y_0$
$c_1 - c_2 = v_0/\beta + \alpha y_0/\beta$ 로 부터
$c_1 = [(1+\alpha/\beta)y_0 + v_0/\beta]/2$
$c_2 = [(1-\alpha/\beta)y_0 - v_0/\beta]/2$

12. y가 0을 통과하는 시간을 시점으로 잡으면,
$y(0) = c_1 + c_2 = 0$ 이므로
$y(t) = c_1\left(e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t}\right)$
$= c_1e^{-\alpha t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t})$
$y(t) = 0$이면 $e^{\beta t} = e^{-\beta t}$ 이어야 하는데 t가 0이 아니면 그럴 수 없다.

13. $y_0 = y(0) = c_1$
$v_0 = y(0) = c_2 - \alpha c_1$ 로 부터
$c_1 = y_0$, $c_2 = v_0 + \alpha y_0$

14. $y' = 0$이 되는 양수 t가 있어야 한다.
$y' = (-\alpha c_1 - \alpha c_2 t + c_2)e^{-\alpha t} = 0$을 만족하는 t는 $t = \frac{1}{\alpha} - \frac{c_1}{c_2}$ 이므로
$\frac{1}{\alpha} > \frac{c_1}{c_2}$이어야 한다.

15. $y' = e^{-t}(-\sin t + \cos t) = 0$
$\sin t = \cos t$, $t = \frac{\pi}{4} \pm n\pi$($n$ 은 정수)

16. $y = Ce^{-\alpha t}\cos(\omega^* t - \$\frac{\pi}{\omega^*}delta)$
$y' = -Ce^{-\alpha t}(\alpha\cos(\omega^* t - \delta) + \omega^*\sin(\omega^* t - \delta) = 0$
$\alpha\cos(\omega^* t - \delta) = -\omega^*\sin(\omega^* t - \delta)$
$\tan(\omega^* t - \delta) = -\alpha/\omega^*$
$\omega^* t - \delta = \arctan(-\alpha/\omega^*) + n\pi$($n$은 정수)
$$t = \frac{\arctan(-\alpha/\omega^*) + \delta}{\omega^*} + \frac{\pi}{\omega^*}n$$
그러므로 극값은 $\frac{\pi}{\omega^*}$마다 나타난다.
극대점과 극대점의 사이는$\frac{2\pi}{\omega^*}$

17. 극대점에서는 즉 cos값이 1 이 되는 점에서는 y값은 $e^{-\alpha t}$값과 같다. 그러므로 $e^{-\alpha t}$ 의 반감기가 30이라는 조건 $e^{-30\alpha} = 1/2$ 을 준것과 같다.
$\alpha = \frac{c}{2m}$이므로
$-30\frac{c}{2m} = \ln\frac{1}{2}$, $c = \frac{m}{15}\ln 2 = \frac{0.5}{15}\ln 2 = 0.023$

18. 극대점에서 y값은 $e^{-\alpha t}$이고 극대점과 극대점 사이는 문제 16에서 $2\pi/\omega^*$임을 알므로 극대값과 다음 극대값 사이의 비는 $e^{\alpha 2\pi/\omega^*}$이다. 이것의 자연로그값은 $\Delta = \alpha 2\pi/\omega^*$
$e^{-t}\cos t$의 경우 $\alpha = 1$, $\omega^* = 1$이므로 $\Delta = 1$이고 극값이 되는 점들은 문제 15번의 함수를 $\pi/2$만큼 움직인 함수이므로 $t = \frac{3\pi}{4} \pm n\pi$($n$ 은 정수)

19. page 89 (9) ω^*와 c의 관계에서 c가 커지면 ω^* 가 작아지므로 frequency는 작아진다.

2.6. Euler-Cauchy Equation

1. (3) 이 중근을 가질 조건은 $(a-1)^2 = 4b$
$y' = x^{\frac{-1-a}{2}}(\frac{1-a}{2}\ln x + 1)$
$y'' = x^{\frac{-3-a}{2}}(\frac{a^2-1}{4}\ln x - a)$를 (1)에 대입하면 만족한다.

2m 2(2-1)m + 1.5m + b
2m - 10m + 6

2. $m^2 - 5m + 6 = 0$ 을 풀면 $m = 2, 3$
$y = c_1x^2 + c_2x^3$

3. $m^2 - m - 20 = 0$ 을 풀면 $m = -4, 5$
$y = c_1 x^{-4} + c_2 x^5$

4. $m^2 + m = 0$ 을 풀면 $m = 0, -1$
$y = c_1 + c_2 x^{-1}$

5. $m^2 + (\frac{46}{10} - 1)m + 3.24 = 0$ 을 풀면 $m = -1.8$(중근)
$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-1.8}$

6. $m^2 - 2m + 2 = 0$ 을 풀면 $m = 1 \pm i$
$y = x[A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)]$

7. $m^2 + 1 = 0$ 을 풀면 $m = \pm i$
$y = [A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)]$

8. $m^2 = 0$ 을 풀면 $m = 0$(중근)
$y = (c_1 + c_2 \ln x)$

9. $m^2 + (\frac{12}{4} - 1)m + \frac{3}{4} = 0$ 을 풀면 $m = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$
$y = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{3}{2}}$

10. $m^2 - 0.3m - 0.1 = 0$ 을 풀면 $m = -0.2, 0.5$
$y = c_1 x^{-0.2} + c_2 x^{0.5}$

11. $m^2 - m + 2 + 1.25 = 0$ 을 풀면 $m = \frac{1}{2} \pm i$
$y = x^{\frac{1}{2}}[A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x)]$

12. $m^2 - 1.2m + 0.36 = 0$ 을 풀면 $m = 0$(중근)
$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{0.6}$

13. $m^2 + 6m + 9 = 0$ 을 풀면 $m = -3$(중근)
$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-3}$

14. $m^2 - 3m + 2 = 0$ 을 풀면 $m = 1, 2$
일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^2$
초기조건으로부터 $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$

15. $m^2 + (\frac{24}{4} - 1)m + \frac{25}{4} = 0$ 을 풀면 $m = -\frac{5}{2}$(중근)
일반해는 $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-\frac{5}{2}}$
초기조건으로부터 $y = (2 - \ln x)x^{-\frac{5}{2}}$

16. $m^2 + 9 = 0$ 을 풀면 $m = \pm 3i$
일반해는 $y = A\cos(3\ln x) + B\sin(3\ln x)$
초기조건으로부터 $y = 2\cos(3\ln x)$

17. $m^2 - 4m + 4 = 0$ 을 풀면 $m = 2$(중근)
일반해는 $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^2$
초기조건으로부터 $y = 3x^2 \ln x$

18. $m^2 + 2m + 1 = 0$ 을 풀면 $m = -1$(중근)
일반해는 $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{-1}$
초기조건으로부터 $y = (3 - \ln x)x^{-1}$

19. $v(5) = c_1 + c_2/5 = 30$
$v(10) = c_1 + c_2/10 = 300$ 을 풀면
$c_1 = 570,\ c_2 = -2700,\ v(r) = 570 - 2700/r$

20. $x = e^t$로 치환하면 $t = \ln x$
$y^\bullet = \frac{dy}{dt},\ y^{\bullet\bullet} = \frac{d^2y}{dt^2}$ 로 표기하자.
$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = y^\bullet \frac{1}{x}$
$y'' = (y^\bullet)'\frac{1}{x} + y^\bullet(\frac{1}{x})'$
$= (\dfrac{dy^\bullet}{dt}\dfrac{dt}{dx})\frac{1}{x} + y^\bullet(-\frac{1}{x^2})$
$= y^{\bullet\bullet}\frac{1}{x^2} - y^\bullet\frac{1}{x^2}$
이것을 방정식에 대입하면
$0 = x^2y'' + axy' + by = y^{\bullet\bullet} - y^\bullet + ay^\bullet + by$
$= y^{\bullet\bullet} + (a-1)y^\bullet + by$
인 상수계수의 미방을 얻는다. 그러므로 Euler-Cauchy 방정식은 상수계수 방정식과 상호 변환이 가능하다.

2.7. Existence and Uniqueness Theory. Wronskian

1. $W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$

2. $W = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x$

3. $\cos 3x = c,\ \sin 3x = s$로 표기.
$W = \begin{vmatrix} e^{-ax/2}c & e^{-ax/2}s \\ e^{-ax/2}(-\frac{a}{2}c - 3s) & e^{-ax/2}(-\frac{a}{2}s + 3c) \end{vmatrix}$
$= e^{-ax}\begin{vmatrix} c & s \\ -\frac{a}{2}c - 3s & -\frac{a}{2}s + 3c \end{vmatrix} = 3e^{-ax}$

4. $W = \begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}$
$= (m_2 - m_1)x^{m_1+m_2-1}$

5. $W = \begin{vmatrix} x^4 & x^4 \ln x \\ 4x^3 & 4x^3 \ln x + x^3 \end{vmatrix} = x^7$

6. $W = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+\lambda x)e^{\lambda x} \end{vmatrix}$
$= e^{2\lambda x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda & 1 + \lambda x \end{vmatrix} = e^{\lambda x}$

7. $\cos(2\ln x) = c,\ \sin(2\ln x) = s$로 표기.
$W = \begin{vmatrix} x^\mu c & x^\mu s \\ \mu x^{\mu-1}c - 2x^{\mu-1}s & \mu x^{\mu-1}s + 2x^{\mu-1}c \end{vmatrix}$
$= x^{2\mu-1}\begin{vmatrix} c & s \\ \mu c - 2s & \mu s + 2c \end{vmatrix} = 2x^{2\mu-1}$

8. $\cos\omega x = c,\ \sin\omega x = s$로 표기.
$W = \begin{vmatrix} e^{-x}c & e^{-x}s \\ e^{-x}(-c - \omega s) & e^{-x}(-s + \omega c) \end{vmatrix}$
$= e^{-2x}\begin{vmatrix} c & s \\ -c - \omega s & -s + \omega c \end{vmatrix} = \omega e^{-2x}$

9. 3이 중근이 2차 방정식 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$이 characteristic equation 인 상수계수 미방
$y'' - 6y' + 9y = 0$

$$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (1+3x)e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x}$$

10. 5,−5가 해인 2차방정식 $m^2 - 5 = 0$을 보조방정식으로 가지는 Euler-Cauchy 미방
$x^2y'' + xy' - 5y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} x^5 & x^{-5} \\ 5x^4 & -5x^{-6} \end{vmatrix} = -10x^{-1}$$

11. 2가 중근인 2차방정식 $m^2 - 4m + 4 = 0$을 보조방정식으로 가지는 Euler-Cauchy 미방
$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^2\ln x \\ 2x & 2x\ln x + x \end{vmatrix} = x^3$$

12. $\cosh 2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}, \sinh 2x = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$이므로 $\cosh 2x, \sinh 2x$는 e^{2x}, e^{-2x} 와 같은 방정식의 basis.
2, −2가 해인 2차방정식 $\lambda^2 - 4 = 0$이 characteristic equation 인 상수계수 미방
$y'' - 4y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} \cosh 2x & \sinh 2x \\ 2\sinh 2x & 2\cosh 2x \end{vmatrix} = 2$$

13. 2,1/2 가 해인 2차방정식 $m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0$을 보조방정식으로 가지는Euler-Cauchy 미방
$y'' - \frac{3}{2}y' + y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^{1/2} \\ 2x & \frac{1}{2}x^{-1/2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}x^{3/2}$$

14. 0,-2가 해인 2차방정식 $\lambda^2 + 2\lambda = 0$이 characteristic equation 인 상수계수 미방
$y'' + 2y' = 0$
$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}$$

15. $\pm 2\pi i$를 근으로 가지는 2차방정식 $\lambda^2 + 4\pi^2 = 0$이 characteristic equation 인 상수계수 미방
$y'' + 4\pi^2 y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} \cos 2\pi x & \sin 2\pi x \\ -2\pi\sin 2\pi x & 2\pi\cos 2\pi x \end{vmatrix} = 2\pi$$

16. $\pm i$를 근으로 가지는 2차방정식 $m^2 + 1 = 0$을 보조방정식으로 가지는Euler-Cauchy 미방
$x^2y'' + xy' + y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} \cos(\ln x) & \sin(\ln x) \\ -\frac{1}{x}\sin(\ln x) & \frac{1}{x}\cos(\ln x) \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

17. $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$을 근으로 가지는 2차방정식 $m^2 - \frac{9}{4} = 0$을 보조방정식으로 가지는Euler-Cauchy 미방
$x^2y'' + xy' - \frac{9}{4}y = 0$
$$W = \begin{vmatrix} x^{3/2} & x^{-3/2} \\ \frac{3}{2}x^{1/2} & -\frac{3}{2}x^{-5/2} \end{vmatrix} = -3x^{-1}$$

18. (a) y_1, y_2가 basis이고 $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$이라면
$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0$$
이므로 Theorem 2y에 의해 모든$x \in I$에 대해 $W = 0$이 된다. 이것은 y_1, y_2가 basis라는 조건에 모순이다.

(b) 극점에서는 $y' = 0$이므로 (a)와 같은 이유로 y_1, y_2는 같은 점에서 극점일 수 없다.

(c) $$W(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ a_{11}y_1' + a_{12}y_2' & a_{21}y_1' + a_{22}y_2' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= W(y_1, y_2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
이므로 z_1, z_2가 basis일 필요충분조건은
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$이다

(d) $z_1 = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$
$z_2 = \sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$
$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$
이므로 $\cosh x, \sinh x$도 basis 이다.

(e) $c_1e^x + c_2e^{-x} = \tilde{c_1}\cosh x + \tilde{c_2}\sinh x$
$= \frac{1}{2}\tilde{c_1}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}\tilde{c_2}(e^x - e^{-x})$ 로 부터
$c_1 = \frac{1}{2}(\tilde{c_1} + \tilde{c_2}), c_2 = \frac{1}{2}(\tilde{c_1} - \tilde{c_2})$

2.8. Nonhomogeneous Equations

1. $\lambda^2 - 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 1$ 이므로
homegeneous 방정식의 해는 $y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}$
일반해는 $y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{-3x}$
2. homogeneous 방정식의 해는 문제1번과 같고, 일반해는 $y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^{-3x} - 3e^x$
$= (c_1 - 3)e^x + c_2e^{-x} + e^{-3x}$이므로 문제 1번의 결과와 같다.

3. $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1, -2$ 이므로
homegeneous 방정식의 해는 $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$
일반해는 $y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 2x^2 - 6x + 7$
4. $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ 을 풀면 $\lambda = 1 \pm 2i$ 이므로
homegeneous 방정식의 해는
$y_h = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$
일반해는 $y = y_h + y_p = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + x^3$

5. $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -4, 1$ 이므로
homegeneous 방정식의 해는 $y_h = c_1e^{-4x} + c_2e^x$
일반해는 $y = y_h + y_p = c_1e^{-4x} + c_2e^x - \cos 2x$

6. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = 2$(중근) 이므로
homegeneous 방정식의 해는 $y_h = (c_1 + c_2x)e^{2x}$
일반해는 $y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x)e^{2x} - \frac{1}{2}e^x\sin x$

7. $\lambda^2 + 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm i$ 이므로
homegeneous 방정식의 해는 $y_h = A\cos x + B\sin x$
일반해는 $y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + \ln(\pi x)$

8. $8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 이므로
homegeneous 방정식의 해는 $y_h = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x}$
일반해는 $y = y_h + y_p = c_1 e^{\frac{1}{4}x} + c_2 e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{5}e^{-x} + e^x$

9. $\lambda^2 + \lambda = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm i$
일반해는 $y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + 2x$
$y(0) = A = -1,\ y'(0) = B + 2 = 8$ 로 부터
$A = -1,\ B = 6y = -\cos x + 6\sin x + 2x$

10. $\lambda^2 - 1 = 0$의 해 ± 1 로 부터 일반해는
$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \cos x$
$y(0) = c_1 + c_2 - 1 = 0$
$y'(0) = c_1 - c_2 = -0.2$ 을 풀면
$c_1 = 0.4,\ c_2 = 0.6,\ y = 0.4e^x + 0.6e^{-x} - \cos x$

11. 일반해는 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x$
$y(0) = c_1 + c_2 = -1$
$y'(0) = c_1 - c_2 + 1 = 0$ 을 풀면
$c_1 = 0,\ c_2 = -1,\ y = xe^x - e^{-x}$

12. $\lambda^2 + 4 = 0$의 해 $\pm 2i$ 로 부터 일반해는
$y = A\cos 2x + B\sin 2x + 3x\cos 2x$
$y(0) = A = 1.8,\ y'(0) = 2B + 3 = 5$ 을 풀면
$A = 1.8,\ B = 1,\ y = 1.8\cos 2x + \sin 2x + 3x\cos 2x$

13. Euler-Cauchy Equation;
$m^2 - 4m + 3 = 0$ 을 풀면 $m = 1, 3$
일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^3 + \ln x$
$y(1) = c_1 + c_2 = 0,\ y'(1) = c_1 + 3c_2 + 1 = 1$ 로 부터
$c_1 = c_2 = 0,\ y = \ln x$

14. Euler-Cauchy Equation ;
$m^2 - 3m + 2 = 0$ 을 풀면 $m = 1, 2$
일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^2 + 3e^x$
$y(1) = c_1 + c_2 + 3e = 2 + 3e$
$y'(1) = c_1 + 2c_2 + 3e = 3e$ 로 부터
$c_1 = 4,\ c_2 = -2,\ y = 4x - 2x^2 = 3e^x$

15. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$의 해 -2(중근) 으로부터
일반해는 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} - e^{-2x}\ln x$
$y(1) = (c_1 + c_2)e^{-2} = e^{-2}$
$y'(1) = c_2 e^{-2} - 2(c_1 + c_2)e^{-2} - e^{-2}$
$= (-2c_1 - c_2 - 1)e^{-2} = -2e^{-2}$ 로 부터
$c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ y = (x - \ln x)e^{-2x}$

16. (a) homogeneous equation 의 일반해 y_h를 구한다음, 특수해 y_p를 하나 구해 둘을 더하면 nonhomogeneous equation 의 일반해가 얻어진다.

(b) y_p와 y^*의 차 $y_p - y^*$는 homogeneous equation 의 해

(c) $y_p - \tilde{y_p}$는 homogeneous equation 의 해

(d) y_h와 $\tilde{y_h}$가 homogeneous equation 의 일반해라면 형태가 다르더라도 같은 해들을 표현한다.

(e) 일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^2 + 3e^x$
초기조건이 $y(0) = 3,\ y'(0) = c_1 + 3$
$= 7$ 이므로c_1은 4로 결정되지만 c_2는 결정되지 않는다.
즉 $y = 4x + c_2 x^2 + 3e^x$는 모두 초기값 문제의 해이다. 그러므로 해는 유일하지 않다.
이것이 유일성 정리(page 97 Theorem 1)의 반례가 아닌 이유는
$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$의 계수 $-\frac{2}{x}, \frac{2}{x^2}$ 가 $x = 0$에서 연속이 아니기 때문이다.

2.9. Solution by Undetermined Coefficients

1. $\lambda^2 + 4 = 0$의 해 $\pm 2i$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$
page 105 Table 2.1 Basic rule 에 따라
$y_p = K\cos 3x + M\sin 3x$인 특수해 y_p를 찾자.
$y_p' = -3K\sin 3x + 3M\cos 3x$
$y_p'' = -9\cos 3x - 9M\sin 3x$
$y_p'' + 4y_p = -5K\cos 3x - 5M\sin 3x$
$= \sin 3x$ 로 부터 $-5K = 0,\ -5M = 1$
$y_p = -\frac{1}{5}\sin 3x$
그러므로 $y = y_h + y_p = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$

2. $\lambda^2 - 1 = 0$의 해 ± 1로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$
Sum rule 과Modification rule (e^x는 homogeneous equation의 해이므로) 에 따라 $y_p = Kxe^x + Me^{2x}$인 특수해를 찾자.
$y_p' = K(1 + x)e^x + 2Me^{2x}$
$y_p'' = K(2 + x)e^x + 4Me^{2x}$
$y_p'' - y_p = 2Ke^x + 3Me^{2x} = 2e^x + 6e^{2x}$ 로 부터
$K = 1,\ M = 2,\ y_p = xe^x + 2e^{2x}$
그러므로 $y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x + 2e^{2x}$

3. $\lambda^2 + 3\lambda = 0$의 해 $0, -3$으로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1 + c_2 e^{-3x}$
Basic rule 에 따라 $y_p = K\cosh 4x + M\sinh 4x$인 특수해 y_p를 찾자.
$y_p' = 4K\sinh 4x + 4M\cosh 4x$
$y_p'' = 16K\cosh 4x + 16M\sinh 4x$
$y_p'' + 3y_p' = (16K + 12M)\cosh 4x$
$+ (16M + 12K)\sinh 4x = 28\cosh 4x$ 로 부터
$16K + 12M = 28,\ 16M + 12K = 0$
이것을 풀면 $K = 4, M = -3$
그러므로 일반해는
$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-3x} + 4\cosh 4x - 3\sinh 4x$

4. $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$의 해 $-1, 2$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$
Modification rule (e^{2x}는 homogeneous equation의 해이므로) 에 따라 $y_p = Kxe^{2x}$인 특수해를 찾자.
$y_p' = K(1 + 2x)e^{2x}$

$y_p'' = K(4+4x)e^{2x}$
$y_p'' - y_p' - 2y_p = 3Ke^{2x} = 3e^{2x}$ 로 부터
$K = 1, y_p = xe^{2x}$
일반해는 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + xe^{2x}$

5. $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$의 해 $-1 \pm 3i$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$
Basic rule 에 따라 $y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$인 특수해를 찾자.
$y_p' = 2K_2x + K_1,\ y_p'' = 2K_2$
$y_p'' + 2y_p' + 10y_p = 10K_2x^2 + (4K_2 + 10K_1)x + 2K_2 + 2K_1 + 10K_0 = 25x^2 + 3$ 로 부터
$10K_2 = 25, 4K_2 + 10K_1 = 0, 2K_2 + 2K_1 + 10K_0 = 3$
이것을 풀면 $K_2 = \frac{5}{2},\ K_1 = -1,\ K_0 = 0$
$y_p = \frac{5}{2}x^2 - x$
그러므로 일반해는
$y = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + \frac{5}{2}x^2 - x$

6. $3\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0$의 해 $-3, -1/3$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1e^{-3x} + c_2e^{-\frac{1}{3}x}$
Basic rule 과 Sum rule 에 따라 $y_p = K_1x + K_0 + K\cos x + M\sin x$인 특수해를 찾자.
$y_p' = K_1 - K\sin x + M\cos x$
$y_p'' = -K\cos x - M\sin x$
$3y_p'' + 10y_p' + 3y_p = 3K_1x + 3K_0 + 10K_1 - 10K\sin x + 10M\cos x = 9x + 5\cos x$ 로 부터
$3K_1 = 9, 3K_0 + 10K_1 = 0,\ -10K = 0, 10M = 5$
이것을 풀면 $K_1 = 3,\ K_0 = -10,\ K = 0, M = \frac{1}{2}$
$y_p = 3x - 10 + \frac{1}{2}\sin x$
그러므로 일반해는
$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-\frac{1}{3}x} + 3x - 10 + \frac{1}{2}\sin x$

7. $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$의 해 $-3, 2$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$
Basic rule 에 따라 $y_p = K_3x^3 + K_2x^2 + K_1x + K_0$인 특수해를 찾자.
$y_p' = 3K_3x^2 + 2K_2x + K_1$
$y_p'' = 6K_3x + 2K_2$
$y_p'' + y_p' - 6y_p = -6K_3x^3 + (3K_3 - 6K_2)x^2 + (6K_3 + 2K_2 - 6K_1)x + 2K_2 - 6K_0 = -6x^3 + 3x^2 + 6x$ 로 부터
$-6K_3 = -6, 3K_3 - 6K_2 = 3, 6K_3 + 2K_2 - 6K_1 = 6, 2K_2 - 6K_0 = 0$
이것을 풀면 $K_3 = 1,\ K_2 = K_1 = K_0 = 0$
$y_p = x^3$
그러므로 일반해는 $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} + x^3$

8. $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$의 해 -3(중근)로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-3x}$
Basic rule 에 따라 $y_p = e^{-x}(K\cos x + M\sin x)$인 특수해를 찾자.
$y_p' = e^{-x}\{(M-K)\cos x - (M+K)\sin x\}$
$y_p'' = e^{-x}(-2M\cos x + 2K\sin x)$
$y_p'' + 6y_p' + 9y_p = e^{-x}\{(4M + 3K)\cos x + (3M - 4K)\sin x\} = 50e^{-x}\cos x$ 로 부터
$4M + 3K = 50, 3M - 4K = 0$
이것을 풀면 $K = 6, M = 8$
$y_p = e^{-x}(6\cos x + 8\sin x)$
그러므로 일반해는
$y = (c_1 + c_2x)e^{-3x} + e^{-x}(6\cos x + 8\sin x)$

9. $\lambda^2 + 2\lambda - 35 = 0$의 해 $-7, 5$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1e^{-7x} + c_2e^{5x}$
Modification rule 과 Sum rule 에 따라 $y_p = cxe^{5x} + K\cos 5x + M\sin 5x$인 특수해를 찾자.
$y_p' = c(1+5x)e^{5x} - 5K\sin 5x + 5M\cos 5x$
$y_p'' = c(10 + 25x)e^{5x} - 25K\cos 5x - 25M\sin 5x$
$y_p'' + 2y_p' - 35y_p = 12ce^{5x} + (10M - 60K)\cos 5x - (60M + 10K)\sin 5x = 12ce^{5x} + 37\sin 5x$ 로 부터
$12c = 12, 10M - 60K = 0, 60M + 10K = -37$
이것을 풀면 $c = 1, K = -\frac{1}{10}, M = -\frac{3}{5}$
$y_p = xe^{5x} - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{3}{5}\sin 5x$
그러므로 일반해는
$y = c_1e^{-7x} + c_2e^{5x} + xe^{5x} - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{3}{5}\sin 5x$

10. $\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} = 0$의 해 $-1/2, 3/2$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2e^{\frac{3}{2}x}$
Basic rule 에 따라 $y_p = K\cosh 2x + M\sinh 2x$인 특수해를 찾자.
$y_p' = 2K\sinh 2x + 2M\cosh 2x$
$y_p'' = 4K\cosh 2x + 4M\sinh 2x$
$y_p'' - y_p' - \frac{3}{4}y_p = (\frac{13}{4}K - 2M)\cosh 2x + (\frac{13}{4}M - 2K)\sinh 2x = 21\sinh 2x$ 로 부터
$\frac{13}{4}K - 2M = 0, \frac{13}{4}M - 2K = 21$
이것을 풀면 $K = \frac{32}{5},\ M = \frac{52}{5}$
$y_p = \frac{32}{5}\cosh 2x + \frac{52}{5}\sinh 2x$
그러므로 일반해는
$y = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2e^{\frac{3}{2}x} + \frac{32}{5}\cosh 2x + \frac{52}{5}\sinh 2x$

11. $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$의 해 -5(중근)로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-5x}$
e^{-5x}, xe^{-5x}가homogeneous equation의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = cx^2e^{-5x}$인 특수해를 찾자.
$y_p' = c(2x - 5x^2)e^{-5x}$
$y_p'' = c(2 - 20x + 25x^2)e^{-5x}$
$y_p'' + 10y_p' + 25y_p = 2ce^{-5x} = e^{-5x}$ 로 부터
$c = \frac{1}{2},\ y_p = \frac{1}{2}x^2e^{-5x}$그러므로 일반해는
$y = (c_1 + c_2x + \frac{1}{2}x^2)e^{-5x}$

12. $\lambda^2 + 3\lambda - 18 = 0$의 해 $3, -6$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = c_1e^{3x} + c_2e^{-6x}$
$\sinh 3x = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}$이고 e^{3x}는 homogeneous equation의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = Kxe^{3x} + Me^{-3x}$인 특수해를 찾자.
$y_p' = K(1 + 3x)e^{3x} - 3Me^{-3x}$
$y_p'' = K(6 + 9x)e^{3x} + 9Me^{-3x}$
$y_p'' + 3y_p' - 18y_p = 9Ke^{3x} - 18Me^{-3x}$
$= 9\sinh 3x = \frac{9}{2}e^{3x} - \frac{9}{2}e^{-3x}$ 로 부터
$k = \frac{1}{2}, M = \frac{1}{4},\ y_p = \frac{1}{2}xe^{3x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$
그러므로 일반해는
$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-6x} + \frac{1}{2}xe^{3x} + \frac{1}{4}e^{-3x}$

13. $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$의 해 -4(중근)로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = (c_1 + c_2x)e^{-4x}$

$\cosh 4x = \frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2}$이고 e^{-4x}, xe^{-4x}는 homogeneous equation의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = Ke^{4x} + Mx^2e^{-4x}$인 특수해를 찾자.
$y_p' = 4Ke^{4x} + M(2x - 4x^2)e^{-4x}$
$y_p'' = 16Ke^{4x} + M(16x^2 - 16x + 2)e^{-4x}$
$y_p'' + 8y_p' + 16y_p = 64Ke^{4x} + 2Me^{-4x} = 64\cosh 4x = 32e^{4x} + 32e^{-4x}$ 로 부터
$64K = 32,\ 2M = 32$
$y_p = \frac{1}{2}e^{4x} + 16x^2e^{-4x}$그러므로 일반해는
$y = (c_1 + c_2x)e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{4x} + 16x^2e^{-4x}$

14. $\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$의 해 $2 \pm 4i$로 부터 homogeneous equation의 일반해는 $y_h = e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x)$
Basic rule 에 따라 $y_p = K\cos x + M\sin x$인 특수해를 찾자.
$y_p' = -K\sin x + M\cos x$
$y_p'' = -K\cos x - M\sin x$
$y_p'' - 4y_p' + 20y_p = (19 - 4M)\cos x + (19M + 4K)\sin x = 377\sin x$ 로 부터
$19K - 4M = 0,\ 19M + 4M = 377$
이것을 풀면 $K = 4,\ M = 19$
$y_p = 4\cos x + 19\sin x$
그러므로 일반해는
$y = e^{2x}(A\cos 4x + B\sin 4x) + 4\cos x + 19\sin x$

15. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{\frac{1}{2}x}$
Basic rule에 따라 $y_p = K_4x^4 + K_3x^3 + K_2x^2 + K_1x + K_0$인 특수해를 찾으면 $y_p = x^4$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{\frac{1}{2}x} + x^4$
$y(0) = c_1 + c_2 = 4$
$y'(0) = -2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = -8$ 을 풀면
$c_1 = 4, c_2 = 0,\ y = 4e^{-2x} + x^4$

16. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
Basic rule에 따라 $y_p = ce^{3x}$인 특수해를 찾으면 $y_p = e^{3x}$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{3x}$
$y(0) = A + 1 = 2, y'(0) = 3 + 2B + 3 = 4$ 을 풀면
$A = 1, B = -1,\ y = e^{3x}(\cos x - \sin x) + e^{3x}$

17. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
e^{-2x}는 homogeneous equation의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = cxe^{-2x} + K_1x + K_0$인 특수해를 찾으면 $y_p = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}xe^{-2x}$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}xe^{-2x}$
$y(0) = c_1 + c_2 = 0$
$y'(0) = 2c_1 - 2c_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$ 을 풀면
$c_1 = -\frac{1}{16}, c_2 = \frac{1}{16}$
$y = -\frac{1}{16}e^{2x} + \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}xe^{-2x}$

18. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = A\cos 3x + B\sin 3x$
$\cos 3x$는 homogeneous equation의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = x(K\cos 3x + M\sin 3x)$인 특수해를 찾으면
$y_p'' = 6(-K\sin 3x + 3M\cos 3x) - 9x(K\cos 3x + M\sin 3x)$
$y_p'' + 9y_p = 6(-K\sin 3x + M\cos 3x) = 6\cos 3x$ 로 부터 $K = 0, M = 1,\ y_p = x\sin 3x$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = A\cos 3x + B\sin 3x + x\sin 3x$
$y(0) = A = 1,\ y'(0) = 3B = 0$ 을 풀면
$y = \cos 3x + x\sin 3x$

19. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = (c_1 + c_2x)e^{-0.6x}$
$e^{-0.6x}, xe^{-0.6x}$이 homogeneous equation의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = cx^2e^{-0.6x}$인 특수해를 찾으면 $y_p = 2x^2e^{-0.6x}$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = (c_1 + c_2x)e^{-0.6x} + 2x^2e^{-0.6x}$
$y(0) = c_1 = 0,\ y'(0) = c_2 - 0.6c_1 = 1$ 을 풀면
$y = (x + 2x^2)e^{-0.6x}$

20. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = (c_1 + c_2)e^{1.4x}$
$e^{1.4x}, xe^{1.4x}$이 homogeneous equation의 해이므로 Modification rul 에 따라 $y_p = cx^2e^{1.4x}$인 특수해를 찾으면 $y_p = x^2e^{1.4x}$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = (c_1 + c_2)e^{1.4x} + x^2e^{1.4x}$
$y(0) = c_1 = 0,\ y'(0) = c_2 + 1.4c_1 = 0$ 을 풀면
$y = x^2e^{1.4x}$

21. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = c_1 + c_2e^{-x}$
상수($e^{0\cdot x}$) 는 homogeneous equation의 해이므로 Modification rul 에 따라 $y_p = x(K_2x^2 + K_1x + K_0)$인 특수해를 찾으면 $y_p = \frac{1}{3}x^3 + 2x$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 2x$
$y(0) = c_1 + c_2 = 8,\ y'(0) = -c_2 + 2 = -1$ 을 풀면
$y = 5 + 3e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 2x$

22. homogeneous equation의 일반해는
$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$
Basic rule에 따라 $y_p = K_0 + ce^{-x}$인 특수해를 찾으면 $y_p = 4 + e^{-x}$
nonhomogeneous equation의 일반해는
$y = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + 4 + e^{-x}$
$y(0) = A + 4 + 1 = 7$
$y'(0) = -\frac{A}{2} + 3B - 1 = -2$ 을 풀면
$A = 2, B = 0,\ y = 2e^{-\frac{1}{2}x}\cos 3x + 4 + e^{-x}$

23. $r(x)$가 xe^x인 경우는 $y_p = (a + bx)e^x$인 형태의 특수해를 찾으면 된다

25. 처음 극대점 근처의 점 $x = \frac{\pi}{8}$에 대해 $y > 20e^{-x} + 0.2e^{0.5x}$임을 확인하면 처음 반파장 $(0 \le x \le \frac{\pi}{4})$ 안에서 y가 $20e^{-x} + 0.2e^{0.5x}$를 넘는걸 알 수 있다.

2.10. Solution by Variation of Parameters

1. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$의 해 2(중근)로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$
$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^{2x}\int \frac{xe^{2x}}{e^{4x}}\frac{e^{2x}}{x}dx + xe^{2x}\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}}\frac{e^{2x}}{x}dx$
$= -e^{2x}x + xe^{2x}\ln|x|$
그러므로 일반해는
$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x - x + x\ln|x|)e^{2x}$

2. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = \cos 3x,\ y_2 = \sin 3x$
$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -\cos 3x\int \frac{\sin 3x}{3}\sec 3x dx$
$+ \sin 3x\int \frac{\cos 3x}{3}\sec x dx$
$= -\cos 3x\int \frac{\tan 3x}{3}dx + \sin 3x \cdot \frac{x}{3}$
$= \frac{1}{9}\cos 3x\ln|\cos 3x| + \frac{x}{3}\sin 3x$

3. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^{-x},\ y_2 = xe^{-x}$
$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^{-x}\int \frac{xe^{-x}}{e^{-2x}}e^{-x}\cos x dx$
$+ xe^{-x}\int \frac{e^{-x}}{e^{-2x}}e^{-x}\cos x dx$
$= -e^{-x}\{x\sin x - \int \sin x dx\} + xe^{-x}\sin x$
$= -e^{-x}\cos x$

4. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = \cos 3x,\ y_2 = \sin 3x,\ W = 3$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -\cos 3x\int \frac{\sin 3x}{3}\csc 3x dx$
$+ \sin 3x\int \frac{\cos 3x}{3}\csc 3x dx$
$= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x\ln|\sin 3x|$

5. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$
$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^x\int \frac{xe^x}{e^{2x}}\frac{e^x}{x^3}dx + xe^x\int \frac{e^x}{e^{2x}}\frac{e^x}{x^3}dx$
$== e^x\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^{-1}e^x = \frac{1}{2}x^{-1}e^x$

6. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^{2x}\cos x,\ y_2 = e^{2x}\sin x$
$W = e^{4x}\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2\cos x - \sin x & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = e^{4x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^{2x}\cos x\int \frac{e^{2x}\sin x}{e^{4x}}e^{2x}\csc x dx$
$+ e^{2x}\sin x\int \frac{e^{2x}\cos x}{e^{4x}}e^{2x}\csc x dx$
$= (-x\cos x + \sin x\ln|\sin x|)e^{2x}$

7. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ W = e^{2x}$

page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^x\int \frac{xe^x}{e^{2x}}3x^{\frac{3}{2}}e^x dx + xe^x\int \frac{e^x}{e^{2x}}3x^{\frac{3}{2}}e^x dx$
$= -3e^x\int x^{\frac{5}{2}}dx + 3xe^x\int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{12}{35}x^{\frac{7}{2}}e^x$

8. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^{-3x},\ y_2 = xe^{-3x},\ W = e^{-6x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^{-3x}\int \frac{xe^{-3x}}{e^{-6x}}\frac{16e^{-3x}}{x^2+1}dx$
$+ xe^{-3x}\int \frac{e^{-3x}}{e^{-6x}}\frac{16e^{-3x}}{x^2+1}dx$
$= -8e^{-3x}\ln|x^2+1| + 16xe^{-3x}\arctan x$

9. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = xe^{-2x},\ W = e^{-4x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^{-2x}\int \frac{xe^{-2x}}{e^{-4x}}\frac{2e^{-2x}}{x^2}dx$
$+ xe^{-2x}\int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}}\frac{2e^{-2x}}{x^2}dx = -2e^{-2x}\ln|x| - e^{-2x}$

10. homogeneous equation의 basis는
$y_1 = e^{-x}\cos x,\ y_2 = e^{-x}\sin x,\ W = e^{-2x}$
page 108 공식(2)에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -e^{-x}\cos x\int \frac{e^{-x}\sin x}{e^{-2x}}4e^{-x}\sec^3 x dx$
$+ e^{-x}\sin x\int \frac{e^{-x}\cos x}{e^{-2x}}4e^{-x}\sec^3 x dx$
$= -e^{-x}\cos x\frac{2}{\cos^2 x} + 4e^{-x}\sin x\tan x$
$= -2e^{-x}\frac{\cos 2x}{\cos x}$

11. $m^2 - 5m + 6 = 0$의 해 2,3 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = x^2,\ y_2 = x^3$
$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4$
$y_p = -x^2\int \frac{x^3}{x^4}21x^{-6}dx + x^3\int \frac{x^2}{x^4}21x^{-6}dx$
$= \frac{21}{6}x^2x^{-6} - \frac{21}{7}x^3x^{-7} = \frac{1}{2}x^{-4}$

12. $m^2 - 2m = 0$의 해 0,2 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = 1,\ y_2 = x^2$
$W = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x$
$y_p = -\int \frac{x^2}{2x}(3+x)xe^x dx + x^2\int \frac{1}{2x}(3+x)xe^x dx$

$= -\frac{1}{2}x^3e^x + x^2 \cdot \frac{1}{2}(x+2)e^x = x^2e^x$

13. $m^2 + (\frac{8}{4} - 1)m - \frac{3}{4} = 0$의 해 $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = x^{\frac{1}{2}}$, $y_2 = x^{-\frac{3}{2}}$
$W = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}} & x^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \end{vmatrix} = -2x^{-2}$
$y_p = -x^{\frac{1}{2}} \int \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-2x^{-2}} \frac{7-15x}{4} dx$
$+ x^{-\frac{3}{2}} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{-2x^{-2}} \frac{7-15x}{4} dx$
$= \frac{1}{8}x^{\frac{1}{2}}(\frac{14}{3}x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{5}{2}}) - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}(2x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{9}{2}})$
$= \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3}$

14. $m^2 - 5m + 6 = 0$의 해 $2, 3$ 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, $W = x^4$
$y_p = -x^2 \int \frac{x^3}{x^4} 7x^2 \sin x dx + x^3 \int \frac{x^2}{x^4} 7x^2 \sin x dx$
$= -x^2(7\sin x - 7x\cos x) - 7x^3\cos x = -7x^2 \sin x$

15. $m^2 - 3m + 2 = 0$의 해 $1, 2$ 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = x$, $y_2 = x^2$
$W = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$
$y_p = -x \int \frac{x^2}{x^2} x\cos x dx + x^2 \int \frac{x}{x^2} x \cos x dx$
$= -x(x\sin x - \int \sin x dx) + x^2 \sin x = -x\cos x$

16. $m^2 - 1 = 0$의 해 ± 1 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$
$W = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$
$y_p = x \int \frac{x}{2} \frac{1}{x} \frac{1}{x^4} dx - \frac{1}{x} \int \frac{x}{2} x \frac{1}{x^4} dx$
$= -\frac{1}{6}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{3}x^{-2}$

17. $m^2 - 9 = 0$의 해 ± 3 으로 부터 homogeneous equation의 basis는 $y_1 = x^3$, $y_2 = x^{-3}$
$W = \begin{vmatrix} x^3 & x^{-3} \\ 3x^2 & -3x^{-4} \end{vmatrix} = -6x^{-1}$
$y_p = -x^3 \int \frac{x^{-3}}{-6x^{-1}} 48x^3 dx + x^{-3} \int \frac{x^3}{-6x^{-1}} 48x^3 dx$
$= 8x^3 \int x dx - 8x^{-3} \int x^7 dx$
$= 8x^3 \frac{x^2}{2} = 8x^{-3}\frac{x^8}{8} = 4x^5 - x^5 = 3x^5$

18. (a)variation method;
$y_1 = e^{-3x}, y_2 = e^{-x}, W = 2e^{-4x}$
$y_p = -e^{-3x} \int \frac{e^{-x}}{2e^{-4x}} 65\cos 2x dx$
$+ e^{-x} \int \frac{e^{-3x}}{2e^{-4x}} 65 \cos 2x dx$
$= -\cos 2x + 8\sin 2x$
undetermined coefficients method;
$y_p = K\cos 2x + M \sin 2x$로 두고 y_p가 방정식을 만족하게 K, M을 결정한다.
일반적으로 source r이 간단한 모양일때는 후자의 방법이 간단하다. 전자는 적분을 해야하는데 비해서 후자는 미분해서 계수비교만 하면 되기 때문이다.

(b)x^2부분에는 undetermined coefficients method로 y_p구하고, $35x^{3/2}e^x$부분에는 variation method를 이용해서 y_p구한다음 더하면 원하는 해를 얻을 수 있다.
(c) nonhomogeneous Euler-Cauchy 방정식에서 source r이 $r = r_0x^k$형태라고 할 때 $y_p = cx^k$를 미방에 대입하면,
$x^2y'' + axy' + by = (k(k-1) + ak + b)cx^k = r_0x^k$이므로 계수를 비교해서 c를 결정할 수 있다. 즉 undetermined coefficients method로 특수해를 구할 수 있다.

2.11. Modeling: Forced Oscillations.Resonance

1. $y_h = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$이므로 시간이 지나면 0으로 간다. 그러므로 steady 상태의 해는 특수해 $y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$ 를 찾으면 된다. y_p를 방정식에 대입해서 A, B를 찾으면 $y_p = -\cos 2t + 3\sin 2t$

2. $y_h = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$ 이므로 시간이 지나면 0으로 간다. 그러므로 steady 상태의 해는 특수해 $y_p = A\cos 3t + B\sin 3t$를 찾으면 된다. y_p를 방정식에 대입해서 A, B를 찾으면 $y_p = 1.5\cos 3t + \sin 3t$

3. $y_h = e^{-t}(A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t)$ 이므로 시간이 지나면 0으로 간다. 그러므로 steady 상태의 해는 특수해 $y_p = A\cos 0.2t + B\sin 0.2t$를 찾으면 된다. y_p를 방정식에 대입해서 A, B를 찾으면 $y_p = -0.02525\cos 0.2t + 0.25\sin 0.2t$

4. $y_h = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}$ 이므로 시간이 지나면 0으로 간다. 그러므로 steady 상태의 해는 Sum rule 에 따라 특수해 $y_p = A_1\cos t + B_1 \sin t + A_2\cos 3t + B_2 \sin 3t$를 찾으면 된다. y_p를 방정식에 대입해서 A_1, B_1, A_2, B_2를 찾으면 $y_p = \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{5}\sin t + -\frac{1}{90}\cos 3t + \frac{1}{45}\sin 3t$

5. $y_h = e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t)$ 이므로 시간이 지나면 0으로 간다. 그러므로 steady 상태의 해는 특수해 $y_p = Ce^t$를 찾으면 된다. y_p를 방정식에 대입해서 C를 찾으면 $y_p = \frac{e^t}{3}$

6. $y_h = e^{-\frac{5}{2}t}(A\cos\frac{\sqrt{15}}{2}t + B\sin\frac{\sqrt{15}}{2}t)$ 이므로 시간이 지나면 0으로 간다. 그러므로 steady 상태의 해는 $y_p = A\cos t + B\sin t$를 찾으면 된다. y_p를 방정식에 대입해서 A, B를 찾으면 $y_p = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

7. Basic rule에 따라 $y_p = A\cos 4t + B\sin 4t$의 형태의 y_p를 찾으면 $y_p = -6\cos 4t - 7\sin 4t$

$y = y_h + y_p = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} - 6\cos 4t - 7\sin 4t$

8. Basic rule에 따라 $y_p = A\cos 0.5t + B\sin 0.5t$의 형태의 y_p를 찾으면 $y_p = 4\cos 0.5t$
$y = y_h + y_p = A\cos\sqrt{3}t + B\sin\sqrt{3}t + 4\cos 0.5t$

9. Basic rule에 따라 $y_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$의 형태의 y_p를 찾으면 $y_p = (1-\omega^2)^{-1}\cos\omega t$
$y = y_h + y_p = A\cos t + B\sin t + (1-\omega^2)^{-1}\cos\omega t$

10. Basic rule에 따라 $y_p = A\cos t + B\sin t$의 형태의 y_p를 찾으면 $y_p = -\frac{3}{2}\cos t + 2\sin t$
$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2t)e^{-3t} - \frac{3}{2}\cos t + 2\sin t$

11. Basic rule에 따라 $y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$의 형태의 y_p를 찾으면 $y_p = -0.4\cos 2t + 3.2\sin 2t$
$y = y_h + y_p = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} - 0.4\cos 2t + 3.2\sin 2t$

12. Sum rule에 따라 $y_p = ct + A\cos t + B\sin t$의 형태의 y_p를 찾으면 (상수가 homogeneous equation 의 해이므로 c대신에 ct) $y_p = t + -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$
$y = y_h + y_p = c_1e^{-t} + c_2 + t + -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t$

13. Basie rule에 따라 y_p를 구하면 $y_p = \sin t$
$y = y_h + y_p = A\cos 5t + B\sin 5t + \sin t$
$y(0) = A = 1, y'(0) = 5B + 1 = 1$ 로 부터
$y = \cos 5t + \sin t$

14. Basie rule에 따라 y_p를 구하면
$y_p = 0.2\cos t + 0.4\sin t$
$y = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) + 0.2\cos t + 0.4\sin t$
$y(0) = A + 0.2 = 1.2$
$y'(0) = B - A + 0.4 = 1.4$ 로 부터
$y = e^{-t}(\cos t + 2\sin t) + 0.2\cos t + 0.4\sin t$

15. Basie rule에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -16\cos 2t - 13\sin 2t$
$y = c_1e^{-\frac{1}{2}t} + c_2e^{-\frac{3}{2}t} + -16\cos 2t - 13\sin 2t$
$y(0) = c_1 + c_2 - 16 = -16$
$y'(0) = -\frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{2}c_2 - 26 = -26$ 로 부터
$y = -16\cos 2t - 13\sin 2t$

16. Basie rule에 따라 y_p를 구하면
$y_p = -6.4\cos 0.5t + 26.8\sin 0.5t$
$y = e^{-4t}(A\cos t + B\sin t)$
$- 6.4\cos 0.5t + 26.8\sin 0.5t$
$y(0) = A - 6.4 = -5.4$
$y'(0) = B - 4A + 13.4 = 9.4$ 로 부터
$y = e^{-4t}\cos t - 6.4\cos 0.5t + 26.8\sin 0.5t$

17. Sum rule에 따라 y_p를 구하면
$y_p = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{15}\sin 3t - \frac{1}{105}\sin 5t$
$y = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t$
$- \frac{1}{15}\sin 3t - \frac{1}{105}\sin 5t$
$y(0) = A = 1$
$y'(0) = 2B + \frac{1}{3} - \frac{3}{15} - \frac{1}{105} = \frac{3}{35}$ 로 부터
$y = \cos 2t + \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{15}\sin 3t - \frac{1}{105}\sin 5t$

19. (a)$C^*(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2c^2}}$ 의 분모의 제곱근 안의 식을 A라 하고 이것을 최소화 하자.
$A = m^2(\omega^2)^2 + (c^2 - 2m^2\omega_0^2)\omega^2 + m^2\omega_0^4$
이므로 A는 ω^2에 대해 2차식이므로 대칭축 $\omega^2 = -\frac{c^2-2m^2\omega_0^2}{2m^2} = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$ 일 때 A는 최소가 된다. 이것을 A에 대입하면 $A = c^2\omega_0^2 - \frac{c^4}{4m^2}$ 을 얻는다. 그러므로 $C^*(\omega\text{max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2-c^2}}$

2.12. Modeling of Electric Circuits

1. $LI'' + RI' + I/C$에서 판별식의 부호를 보면 된다.
$R^2 - 4L/C > 0 \Rightarrow$ overdamped
$R^2 - 4L/C = 0 \Rightarrow$ critically damped
$R^2 - 4L/C < 0 \Rightarrow$ underdamped
$R_{crit} = 2\sqrt{L/C}$

2. characteristic equation $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$이 두 실근 α, β을 가진다면 두근의 곱 $\frac{1}{LC}$이 양수이고 두근의 합 $-\frac{R}{L}$이 음수이므로 α와 β는 음수이다. 그러므로 $I_h = c_1e^{\alpha t} + c_2e^{\beta t}$는 시간이 지나면 0으로 간다. $\alpha = \beta$인 경우도 $I_h = (c_1 + c_2t)e^{\alpha t}$는 0으로 간다. 두 근이 허근 $a \pm \omega i$일 경우도 두근의 합 $2a = -\frac{R}{L}$이 음수이므로 a는 음수이고 $I_h = e^{at}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$역시 0으로 간다. 그러므로 R이 양수인 경우에는 해 $I = I_h + I_p$는 시간이 지나면 I_p로 간다.

3. $I_p = I_0\sin(\omega t - \theta)$에서 amplitude $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}}$는 $S = 0$일 때 최대값을 갖는다. $S = \omega L - \frac{1}{\omega C}$이므로 $C = \frac{1}{\omega^2 L}$일때 I_0는 최대가 된다.

4. $LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'$에서 방정식은
$I'' + 2I' + 2I = 50\cos t$
steady state current는 문제 2번에 의해 I_p를 구하면 된다. Basir rule에 의해 $I_p = A\cos t + B\sin t$
$I_p' = -A\sin t + B\cos t, I_p'' = -A\cos t - B\sin t$
$I_p'' + 2I_p' + 2I_p = (-A + 2B + 2A)\cos t$
$+ (-B - 2A + 2B)\sin t = 50\cos t$ 로 부터
$A + 2B = 50, B - 2A = 0$ 이므로$A = 10, B = 20$
$I_p = 10\cos t + 20\sin t$

5. $2I'' + 8I' + 10I = -800\sin 5t$
$I_p = A\cos 5t + B\sin 5t$를 구하면
$I_p' = -5A\sin 5t + 5B\cos 5t$
$I_p'' = -25A\cos 5t - 25B\sin 5t$
$2I_p'' + 8I_p' + 10I_p = (40B - 40A)\cos 5t$
$+ (-40B - 40A)\sin 5t = -800\sin 5t$ 로 부터
$40B - 40A = 0, -40B - 40A = -800$ 이므로

$A = B = 10, \quad I_p = 10\cos 5t + 10\sin 5t$

6. $I'' + 4I' + 5000I = 0$이므로 $I_p = 0$

7. $\frac{1}{2}I'' + 40I' + 750I = -2500\sin 100t$
$\frac{1}{2}\lambda^2 + 40\lambda + 750 = 0$의 해 $-50, -30$ 으로부터
$I_h = c_1e^{-50t} + c_2e^{-30t}$
Basic rule에 의해 $I_p = A\cos 100t + B\sin 100t$
$I_p' = -100A\sin 100t + 100B\cos 100t$
$I_p'' = -100^2A\cos 100t - 100^2B\sin 100t$
$\frac{1}{2}I_p'' + 40I_p' + 750I_p = (4000B - 4250A)\cos 100t$
$+ (-4000A - 4250B)\sin 100t$
$= -2500\sin 100t$ 로 부터 $A = \frac{32}{109}, B = \frac{34}{109}$
$I = c_1e^{-50t} + c_2e^{-30t} + \frac{32}{109}\cos 100t + \frac{34}{109}\sin 100t$

8. $I'' + 4I' + 20I = 340\cos 4t$
$\lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0$의 해 $-2 \pm 4i$ 로 부터
$I_h = e^{-2t}(c_1\cos 4t + c_2\sin 4t)$
Basic rule에 의해 $I_p = A\cos 4t + B\sin 4t$
$I_p' = -4A\sin 4t + 4B\cos 4t$
$I_p'' = -16A\cos 4t - 16B\sin 4t$
$I_p'' + 4I_p' + 20I_p = (4A + 16B)\cos 4t$
$+ (4B - 16A)\sin 4t$
$= 340\cos 4t$ 로 부터 $A = 5, B = 20$
$I = e^{-2t}(c_1\cos 4t + c_2\sin 4t) + 5\cos 4t + 20\sin 4t$

9. $0.1I'' + 10I' + 340I = e^{-t}(330\cos t - 9.8\sin t)$
$0.1\lambda^2 + 10\lambda + 340 = 0$의 해 $-50 \pm 30i$ 로 부터
$I_h = e^{-50t}(c_1\cos 30t + c_2\sin 30t)$
Basic rule에 의해 $I_p = e^{-t}(A\cos t + B\sin t)$
$I_p' = e^{-t}[(B - A)\cos t - (A + B)\sin t]$
$I_p'' = e^{-t}[-2B\cos t + 2A\sin t]$
$I_p'' + 100I_p' + 3400I_p = e^{-t}[(3300A + 98B)\cos t$
$+ (3300B - 98A)\sin t]$
$= e^{-t}(3300\cos t - 98\sin t)$ 로 부터 $A = 1, B = 0$
$I = e^{-50t}(c_1\cos 30t + c_2\sin 30t) + e^{-t}\cos t$

10. 방정식은 $10I'' + 80I' + 250I = 2405\cos 10t$
Basic rule에 의해 일반해를 구하면
$I = e^{-4t}(A\cos 3t + B\sin 3t) - \frac{3}{2}\cos 10t + \frac{8}{5}\sin 10t$를 얻는다. 초기조건이 $I(0)=Q(0)=0$인데 page 119 $(1'')$에 의해 $LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0) = 0$ 이므로$I'(0) = 0$을 얻는다.
$I(0) = A - \frac{3}{2} = 0$
$I'(0) = 3B - 4A + \frac{8\cdot 10}{5} = 0$ 이므로$A = \frac{3}{2}, B = -\frac{10}{3}$
$I = e^{-4t}(\frac{3}{2}\cos 3t - \frac{10}{3}\sin 3t) - \frac{3}{2}\cos 10t + \frac{8}{5}\sin 10t$

11. 방정식은 $2I'' + 8I' + 10I = 0$
일반해는 $I = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$
초기조건이 $I(0)=Q(0)=0$ 인데 page 119 $(1'')$에 의해 $2I'(0) + 8I(0) + \frac{1}{0.1}Q(0) = E(0) = 10$
이므로$I'(0) = 5$을 얻는다.
$I(0) = A = 0, \ I'(0) = B - 2A = 5$ 이므로
$A = 0, B = 5 \qquad I = 5e^{-2t}\sin t$

12. 방정식은 $0.5I'' + 3I' + 12.5I = -60\sin 5t$
일반해는 $I = e^{-3t}(A\cos 4t + B\sin 4t) + 4\cos 5t$
초기조건이 $I(0)=Q(0)=0$인데 page 119 $(1'')$에 의해 $0.5I'(0) + 3I(0) + 12.5Q(0) = E(0) = 12$ 이므로$I'(0) = 24$을 얻는다.
$I(0) = A + 4 = 0, \ I'(0) = 4B - 3A = 24$ 이므로
$A = -4, B = 3$
$I = e^{-3t}(-4\cos 4t + 3\sin 4t) + 4\cos 5t$

13. 방정식은 $10I'' + 10I = 10$
일반해는 $I = A\cos t + B\sin t + 1$
$10I'(0) + 10Q(0) = E(0) = 0$ 로 부터 $I'(0) = 0$
$I(0) = A + 1 = 0, I'(0) = B = 0$ 이므로$I = 1 - \cos t$

14. 방정식은 $2I'' + 20000I = 0$
일반해는 $I = A\cos 100t + B\sin 100t$
$2I'(0) + 20000Q(0) = E(0) = 110$으로부터 $I'(0) = 55$
$I(0) = A = 0, I'(0) = 100B = 55$ 이므로 $I = 0.55\sin 100t$

15. 방정식은 $2I'' + 200I = 0$
일반해는 $I = A\cos 10t + B\sin 10t + \frac{110}{21}\cos 4t$
$2I'(0) + 200Q(0) = E(0) = 0$으로부터 $I'(0) = 0$
$I(0) = A + \frac{110}{21} = 0, I'(0) = 10B = 0$ 이므로
$I = \frac{110}{21}(\cos 4t - \cos 10t)$

16. i)적분에 의해서;
$Q(t) = Q(0) + \int_0^t Idt = 0.0055\int_0^t \sin 100tdt$
$= 0.0055(1 - \cos 100t)$
ii) 미방에 의해서;
$2Q'' + 20000Q = 110$의 일반해는
$Q = A\cos 100t + B\sin 100t + \frac{110}{20000}$
$Q(0) = A + \frac{110}{20000} = 0, 0 = I(0) = Q'(0) = 100B$
으로부터 $Q = \frac{110}{20000}(1 - \cos 100t)$
둘의 결과가 일치한다.

17. (a)스프링 방정식의 일차항에 damping constant가 나타나고 역시 회로방정식의 일차항에 저항이 나타남에 주목
(b)$I'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'$와 $my'' + cy' + ky = 110\cos 5t$를 비교하면 $R = \frac{c}{m} = \frac{20}{2} = 10, C = \frac{m}{k} = \frac{2}{58}$
$E' = \frac{110}{m}\cos 5t = 55\cos 5t, E = 11\sin 5t$

18. (a)$I_p = Ke^{i\omega t}, I_p' = i\omega Ke^{i\omega t}$
$I_p'' = (i\omega)^2Ke^{i\omega t} = -\omega^2Ke^{i\omega t}$
$LI_p'' + RI_p' + \frac{1}{C}I_p = (-\omega^2L + i\omega R + \frac{1}{C})Ke^{i\omega t}$
$= E_0\omega e^{i\omega t}$
$I_p = Ke^{i\omega t} = \frac{-E_0(S + iR)}{S^2 + R^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$의 실수부분은 $\frac{-E_0S}{S^2 + R^2}\cos\omega t + \frac{E_0R}{S^2 + R^2}\sin\omega t$
$= \frac{-E_0}{S^2 + R^2}(S\cos\omega t - R\sin\omega t)$
(b) $K = \frac{E_0}{-S + iR} = \frac{E_0}{i(R + iS)} = \frac{E_0}{iZ}$
(c)$I'' + I' + 3I = 5e^{it}$를 풀자.
$I = ce^{it}$로 두면,$I' = ice^{it}, I'' = -ce^{it}$
$I'' + I' + 3I = (2 + i)ce^{it} = 5e^{it}$ 로 부터
$c = \frac{5}{2 + i} = 2 - i, I = (2 - i)e^{it}$
I의 실수부분은 $2\cos t + \sin t$

2.13. Higher Order Linear Differential Equations

1. 4차 미방이고 4개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

이므로 basis

$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$으로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 30 \end{pmatrix}$$

으로부터 $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + 5x^3$

2. 3차 미방이고 3개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$= -6e^{2x} \neq 0$ 이므로 basis.

$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$ 로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = e^x - 3e^{2x}$

3. 3차 미방이고 3개가 모두 미방의 해이다.

$$W = e^{-9x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ -3 & 1-3x & 2x-3x^2 \\ 9 & -6+9x & 2-12x+9x^2 \end{vmatrix}$$

$= 2e^{-9x} \neq 0$이므로 basis.

$y = (c_0 + c_1x + c_2x^2)e^{-3x}$로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -13 \\ 46 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = (4 - x_2x^2)e^{-3x}$

4. 3차 미방이고 3개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$= 1 \neq 0$ 이므로 basis.

$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = 12 + 3\cos x$

5. 4차 미방이고 4개가 모두 미방의 해이다.

편의상 $\cos x = c, \sin x = s$로 표기하겠다.

$$W = \begin{vmatrix} c & s & c & s \\ c-s & c+s & -c-s & c-s \\ -2s & 2c & 2s & -2c \\ -2s-2c & -2s+2c & -2s+2c & 2s+2c \end{vmatrix}$$

$= 32 \neq 0$이므로 basis.(W는 한점에서만 0이 아니어도 전체에서 0이 아니다.)

$y=c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x+c_3e^{-x}\cos x+c_4e^{-x}\sin x$로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = (e^x + e^{-x})\sin x$

6. 4차 미방이고 4개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} \cosh x & \sinh x & \cos x & \sin x \\ \sinh x & \cosh x & -\sin x & \cos x \\ \cosh x & \sinh x & -\cos x & -\sin x \\ \sinh x & \cosh x & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}$$

$= 4 \neq 0$이므로 basis.(W는 한점에서만 0이 아니어도 전체에서 0이 아니다.)

$y=c_1\cosh x + c_2\sinh x + c_3\cos x + c_4\sin x$ 로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = \cosh x + \sinh x$

7. 3차 미방이고 3개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^{-1} \\ 0 & 1 & -x^{-2} \\ 0 & 0 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 2x^{-3} \neq 0$$ 이므로 basis.

$y = c_1 + c_2x + c_3x^{-1}$로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = 2 - 3x + 5x^{-1}$

8. 4차 미방이고 4개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin x & \cos x & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ -\cos x & -\sin x & -4\cos 2x & -4\sin 2x \\ \sin x & -\cos x & 8\sin 2x & -8\cos 2x \end{vmatrix}$$

$= 18 \neq 0$이므로 basis.(W는 한점에서만 0이 아니어도 전체에서 0이 아니다.)

$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

으로부터$y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$

9. 4차 미방이고 4개가 모두 미방의 해이다.

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos x & \sin x \\ 2 & -2 & -\sin x & \cos x \\ 4 & 4 & -\cos x & -\sin x \\ 8 & -8 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}$$

$= -100 \neq 0$이므로 basis.(W는 한점에서만 0이 아니어도 전체에서 0이 아니다.)

$c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos x + c_4\sin x$로 두고 초기조건을 만족하는 해를 구하면

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

으로부터 $y = 2(e^{2x} + e^{-2x}) - 4\cos x$

10. $$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \sin 2x \\ -\sin x & \cos x & 2\cos 2x \\ -\cos x & -\sin x & -4\sin 2x \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$ 이므로 linear independent

11. $\pi\cos^2 x + \pi\sin^2 x = \pi$ 이므로 linear dependent

12. $\ln(x^2) = 2\ln x$이므로 linear dependent

13. $$W = \begin{vmatrix} \cosh 2x & 1 & 1 & 1 \\ 2\sinh 2x & 1 & -1 & 2 \\ 4\cosh 2x & 1 & 1 & 4 \\ 8\sinh 2x & 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$
$= 12 - 48 = -36 \neq 0$이므로 linear independent

14. $\sinh 3x = \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$이므로 linear dependent

15. $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$이므로 linear dependent

16. $$W = \begin{vmatrix} \ln x & (\ln x)^2 & 1 & 1 \\ x^{-1} & 2\frac{\ln x}{x} & 1 & -1 \\ -x^{-2} & 2\frac{1-\ln x}{x^2} & 1 & 1 \\ 2x^{-3} & 2\frac{-3x+2x\ln x}{x^4} & 1 & -1 \end{vmatrix}_{x=1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$
$= 2 - 10 = -8 \neq 0$이므로 linear independent

17. 양합수인 e^x가 공통으로 곱해져 있으므로 $\cos x, \sin x, 1$의 일차독립을 조사하면 된다.
$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & 1 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ -\cos x & -\sin x & 0 \end{vmatrix} = \cos x^2 + \sin x^2$$
$= 1 \neq 0$ 이므로 linear independent

18. 0은 모든 함수와 linear dependent

19. 상수계수 미방이라면 characteristic equation이 모두 일차식과 2차식의 곱으로 인수분해되므로 2차와 다를 것이 없다.(단 5차 이상에서는 근의 공식이 존재하지 않는다.)

20. (a) (1)$k \cdot 0 + 0 \cdot y_1 = 0$을 만족하는 0이 아닌 k가 존재하므로 당연히 0함수를 포함하는 집합은 linear dependent이다.
(2)그렇지 않다.(2절 문제 28 과 같은 이유)
(3)당연히 그렇지 않다.(예를 들어 T/S에 $y = 0$이 있을 수도 있다.)

(b) 대수적인 관계를 생각해 봐서 linear dependent를 판단할 수는 있지만, linear independent를 증명하려면 Wronskian 을 조사해야 한다.

2.14. Higher Order Homogeneous Equations with Constant Coefficients

1. $\lambda^4 - 16 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm 2, \pm 2i$ 이므로
$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + A\cos 2x + B\sin 2x$

2. $\lambda^3 + 9\lambda + 27\lambda + 27 = 0$ 을 풀면
$\lambda = -3$(4중근) 이므로
$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-3x}$

3. $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$ 을 풀면
$\lambda = -1$(중근), 1(중근) 이므로
$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + (c_3 + c_4x)e^x$

4. $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ 을 풀면
$\lambda = i$(중근), $-i$(중근) 이므로
$y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\sin x$

5. $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -1, 1, 2$ 이므로
$y = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3e^{2x}$

6. $\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm i, \pm 2i$ 이므로
$y = A_1\cos x + A_2\cos 2x + B_1\sin 2x + B_2\sin 2x$

7. $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ 을 풀면
$\lambda = -1, 1$(중근) 이므로
$y = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^x$

8. $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$ 을 풀면 $\lambda = -2, 1$(중근) 이므로
$y = c_1e^{-2x} + (c_2 + c_3x)e^x$

9. $16\lambda^4 - 4\lambda^2 + 9 = 0$ 을 풀면 $\lambda = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ 이므로
$y = c_1e^{\frac{1}{2}x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x} + c_3e^{\frac{3}{2}x} + c_4e^{-\frac{3}{2}x}$

10. $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$ 을 풀면
$\lambda = -1, -2, -3$ 이므로
$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{-3x}$

11. $\lambda^4 = 0$이 0을 4중근으로 가지므로 일반해는
$y = ax^3 + bx^2 + cx + 1$
$y(0) = a = 1$
$y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'(0) = c = 16$
$y'' = 6ax + 2b, y''(0) = 2b = -4$
$y''' = 6a, y'''(0) = 6a = 24$ 로 부터
$y = 4x^3 - 2x^2 + 16x + 1$

12. $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ 은 1을 3중근으로 가지므로 일반해는 $y = (ax^2 + bx + c)e^x$
$y(0) = c = 2$
$y' = (ax^2 + bx + c + 2ax + b)e^x$
$y'(0) = 2 + b = 2, b = 0$
$y'' = (ax^2 + c + 2ax + 2ax + 2a)e^x$
$y''(0) = 2 + 2a = 10,\ a = 4$ 이므로
$y = (4x^2 + 2)e^x$

13. $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$이 1(중근)과 -1을 근으로 가지므로 일반해는 $y = (a + bx)e^x + ce^{-x}$
$y(0) = a + c = 2$
$y' = (a + bx + b)e^x - ce^{-x},\ y'(0) = a + b - c = 1$
$y'' = (a + 2b + bx)e^x + ce^{-x}$
$y'(0) = a + 2b + c = 0$ 로 부터
$a = 2,\ b = -1\ c = 0,\ y = (2 - x)e^x$

14. 일반해는
$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + A\cos x + B\sin x$
$y(0) = c_1 + c_2 + A = -1$
$y'(0) = c_1 - c_2 + B = 7$
$y''(0) = c_1 + c_2 - A = -1$
$y'''(0) = c_1 + c_2 - B = 7$을 연립해 풀면
$y = 3e^x - 4e^{-x}$

15. 일반해는 $c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{-5x}$
$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 5$
$y'(0) = c_1 - c_2 - 5c_3 = 0$
$y''(0) = c_1 + c_2 + 25c_3 = 125$을 연립해 풀면
$y = \frac{25}{2}e^x - \frac{25}{2}e^{-x} + 5e^{-5x} = 25\sinh x + 5e^{-5x}$

16. 일반해는
$y = A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 3x + B_2\sin 3x$
$y(0) = A_1 + A_2 = 0,\ y'(0) = B_1 + 3B_2 = 0$
$y''(0) = -A_1 - 9A_2 = 32$
$y'''(0) = -B_1 - 27B_2 = 0$ 을 연립해 풀면
$y = 4\cos x - 4\cos 3x$

17. $y_1 = e^{-x}\cos x, y_2 = e^{-x}\sin x$
$y_3 = xe^{-x}\cos x, y_4 = xe^{-x}\sin x$라고 하면 일반해는
$y = Ay_1 + By_2 + Cy_3 + Dy_4$
0점에서의 미분계수들은,
$(y_1, y_1', y_1'', y_1''')\big|_{x=0} = (1, -1, 0, 2)$
$(y_2, y_2', y_2'', y_2''')\big|_{x=0} = (0, 1, -2, 2)$
$(y_3, y_3', y_3'', y_3''')\big|_{x=0}$
$= (xy_1, xy_1' + y_1, 2y_1' + xy_1'', 3y_1'' + xy_1''')\big|_{x=0}$
$= (0, 1, -2, 0)$
$(y_4, y_4', y_4'', y_4''')\big|_{x=0}$
$= (xy_2, xy_2' + y_2, 2y_2' + xy_2'', 3y_2'' + xy_2''')\big|_{x=0}$
$= (0, 0, 2, -6)$ 이므로
$y(0) = a = 1$
$y'(0) = -1 + b + c = 1$
$y''(0) = -2b - 2c + 2d = -2$
$y'''(0) = 2 + 2b - 6d = 2$를 연립하면
$a = c = 1, b = d = 0$
$Answer : y = (1 + x)e^{-x}\cos x$

18. 일반해는 $(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-2x}$
$y(0) = c_1 = 1, y'(0) = -2 + c_2 = -2, c_2 = 0$
$y''(0) = 4 + 2c_3 = 6, c_3 = 1$ 이므로
$y = (1 + x^2)e^{-2x}$

20. (a) $e^{\lambda_1 x}$인 해를 찾았다면 characteristic equation 을 $\lambda - \lambda_1$으로 나누어서 미방의 차수를 낮출 수 있다.

(b) $y_2 = uy_1$이면
$y_2' = u'y_1 + uy_1'$
$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$
$y_2''' = u'''y_1 + 3u''y_1' + 3u'y_1'' + uy_1'''$
y_2가 해일 조건은
$0 = y_2''' + p_2y_2'' + p_1y_2' + p_0y_2$
$= u'''y_1 + 3u''y_1' + 3u'y_1'' + uy_1''$
$+ p_2(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'')$
$+ p_1(u'y_1 + uy_1') + p_0uy_1$
위식을 정리하면
$y_1u''' + (3y_1' + p_2y_1)u''$
$+ (3y_1'' + 2p_2y_1' + p_1y_1)u'$
$+ (y_1''' + p_2y_1'' + p_1y_1' + p_0y_1)u = 0$
위의 식에서 y_1이 해이므로 마지막 항은 0이다. 그러므로
$y_1z'' + (3y_1' + p_2y_1)z'$
$+ (3y_1'' + 2p_2y_1' + p_1y_1)z = 0$ 인 z에 대해 $u = \int z(x)dx$이고 $y_2 = uy_1$ 으로서 새로운 해y_2를 구할 수 있다.

(c) $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6-x^2}{x^2}y' - \frac{6-x^2}{x^3} = 0$
$xz'' + (3-3)z' + (0 - \frac{6}{x} + \frac{6}{x} - x)z = 0$ 을 풀면
$xz'' - xz = 0,\ z'' - z = 0$
$z = c_1e^x + c_2e^{-x}$
$y_2 = x\int zdx = x(c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3)$

2.15. Higher Order Nonhomogeneous Equations

1. $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 - 0$ 을 풀면 $\lambda = -1$(3중근)
$y_h = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}$
Sum rule에 따라 $y_p = Ce^x + K_1x + K_0$인 특수해를 구하면
$y_p' = Ce^x + K_1, y_p'' = y_p''' = Ce^x$
$y_p''' + 3y_p'' + 3y_p' + y_p = 8Ce^x + K_1x + 3K_1 + K_0$
$= 8e^x + x + 3$ 로 부터 $C = 1, K_1 = 1, K_0 = 0$
$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} + e^x + x$

2. $y = x^m$이 방정식을 만족하면
$m(m-1)(m-2) + m(m-1) - 2m + 2 = 0$
$m^3 - 2m^2 - m - 2 = 0,\ m = -1, 1, 2$

$y_h = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^2$
이제 page 140 (7)에 의해 특수해 y_p를 구하면
$y_1 = x^{-1}, y_2 = x, y_3 = x^2, r = \ln x$

$$W = \begin{vmatrix} x^{-1} & x & x^2 \\ -x^{-2} & 1 & 2x \\ 2x^{-3} & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x^{-1}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = x^2$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^{-1} & 0 & x^2 \\ -x^{-2} & 0 & 2x \\ 2x^{-3} & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x^{-1} & x & 0 \\ -x^{-2} & 1 & 0 \\ 2x^{-3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x^{-1}$$

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$
$$= x^{-1} \int \frac{x^2}{6x^{-1}} \ln x dx + x \int \frac{-3}{6x^{-1}} \ln x dx + x^2 \int \frac{2x^{-1}}{6x^{-1}} \ln x dx$$
$$= \frac{x^{-1}}{6} \int x^3 \ln x dx - \frac{x}{2} \int x \ln x dx + \frac{x^2}{3} \int \ln x dx$$

부분적분을 하면
$y_p = \frac{x^{-1}}{6}[\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16}] - \frac{x}{2}[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}]$
$+ \frac{x^2}{3}[x \ln x - x] = \frac{x^3}{8} \ln x - \frac{7}{32}x^3$
그러므로 일반해는
$y = y_h + y_p = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^2 + \frac{x^3}{8} \ln x - \frac{7}{32}x^3$

3. 문제 2에서 $r = \ln x$대신에 $r = x^{-5}$인 경우이다.

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$
$$= x^{-1} \int \frac{x^2}{6x^{-1}} x^{-5} dx + x \int \frac{-3}{6x^{-1}} x^{-5} dx + x^2 \int \frac{2x^{-1}}{6x^{-1}} x^{-5} dx = -\frac{1}{12} x^{-2}$$
$$y = c_1x^{-1} + c_2x + c_3x^2 - \frac{1}{12}x^{-2}$$

4. $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$의 해는 $-2, -1, 1$
Basic rule 에 따라 $y_p = K_0 + K_1x + K_2x^2 + K_3x^3$인 해를 찾으면 $y_p = 2x^3 - 3x^2 + 15x - 8$
Answer : $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + c_3e^x + 2x^3 - 3x^2 + 15x - 8$

5. $\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$의 해는 $1, 2, -2$
Basic rule 에 따라 $y_p = Ce^{-x}$인 해를 찾으면 $y_p = 2e^{-x}$
Answer : $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + 2e^{-x}$

6. $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$이 3중근 2를 가지므로
$y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}, y_3 = x^2e^{2x}$

$$W = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & 2x+1 & 2x^2+2x \\ 4 & 4x+4 & 4x^2+8x+2 \end{vmatrix}$$
$$= e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 4 & 8x+2 \end{vmatrix} = 2e^{6x}$$

$$W_1 = e^{4x} \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 1 & 4 & 8x+2 \end{vmatrix} = e^{4x}x^2$$

$$W_2 = e^{4x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 8x+2 \end{vmatrix} = -2e^{4x}x$$

$$W_3 = e^{4x} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = e^{4x}$$

$r = x^{\frac{1}{2}}e^x$이므로

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$
$$= e^{2x} \int \frac{e^{4x}x^2x^{\frac{1}{2}}e^{2x}}{2e^{6x}} dx + xe^{2x} \int \frac{-2e^{4x}xx^{\frac{1}{2}}e^{2x}}{2e^{6x}} dx + x^2e^{2x} \int \frac{e^{4x}x^{\frac{1}{2}}e^{2x}}{2e^{6x}} dx$$
$$= e^{2x}\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} - xe^{2x}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2e^{2x}\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$$
$$= (\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3})x^{\frac{7}{2}}e^{2x} = \frac{8}{105}x^{\frac{7}{2}}e^{2x}$$

일반해는 $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{8}{105}x^{\frac{7}{2}})e^{2x}$

7. $m(m-1)(m-2) + 3m(m-1) = 0$
$m(m-1)(m+1) = 0$ 으로부터
$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^{-1}$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x & x^{-1} \\ 0 & 1 & -x^{-2} \\ 0 & 0 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 2x^{-3}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & x^{-1} \\ 0 & 1 & -x^{-2} \\ 1 & 0 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{-1}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x^{-1} \\ 0 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 1 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = x^{-2}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$r = \frac{e^x}{x}$ 이므로

$$\int \frac{W_1}{W} r dx = \int \frac{-2x^{-1}}{2x^{-3}} \frac{e^x}{x} dx = -\int xe^x dx$$
$$= (1-x)e^x$$

$$\int \frac{W_2}{W} r dx = \int \frac{x^{-2}}{2x^{-3}} \frac{e^x}{x} dx = \frac{1}{2}e^x$$
$$\int \frac{W_3}{W} r dx = \int \frac{1}{2x^{-3}} \frac{e^x}{x} dx = \frac{1}{2} \int x^2e^x dx$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^x$$

이제 page 140 (7)에 의해 y_p를 계산하면,

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$
$$= (1-x)e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}(x - 2 + \frac{2}{x})e^x = \frac{1}{x}e^x$$

일반해는 $y = c_1 + c_2x + c_3x^{-1} + \frac{e^x}{x}$

8. $4m(m-1)(m-2) + 3m - 3 = 0$
$(m-1)(4m^2 - 8m + 3) = 0$ 으로부터

$y_1 = x, y_2 = x^{\frac{1}{2}}, y_3 = x^{\frac{3}{2}}$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ 0 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^{\frac{1}{2}} & x^{\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ 1 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{\frac{3}{2}} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x & x^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$r = x^{\frac{5}{2}}$ 이므로

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$

$$-4\left(x\int x^{\frac{7}{2}}dx - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\int x^4 dx - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\int x^3 dx\right)$$

$$= -4\left(\frac{2}{9}x^{\frac{11}{2}} - \frac{1}{10}x^{\frac{11}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{11}{2}}\right) = \frac{1}{90}x^{\frac{11}{2}}$$

일반해는 $y = c_1 x + c_2 x^{\frac{1}{2}} + c_3 x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{90}x^{\frac{11}{2}}$

9. $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$이 3중근 -1을 가지므로
$y_h = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)e^{-x}$
Basic rule 에 따라 $y_p = e^{-x}A\cos x + B\sin x$인 특수해를 구하면 $y_p = e^{-x}\cos x$
$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cos x)e^{-x}$
$y(0) = c_0 + 1 = 2, y'(0) = c_1 - c_0 - 1 = 0$
$y''(0) = 2c_2 - 2c_1 + c_0 = -1$ 로 부터
$c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 1, \quad y = (1+2x+x^2+\cos x)e^{-x}$

10. $m(m-1)(m-2) + m - 1 = 0$의 해 1(3중근)으로부터 $y_1 = x, y_2 = x\ln x, y_3 = x(\ln x)^2$

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x(\ln x)^2 \\ 1 & \ln x + 1 & (\ln x)^2 + 2\ln x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2(\ln x)\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x\ln x & x(\ln x)^2 \\ 0 & 1 & 2\ln x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2(\ln x)\frac{1}{x} + \frac{2}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \ln x & (\ln x)^2 \\ 0 & 1 & 2\ln x \\ 0 & 1 & 2\ln x + 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ln x & (\ln x)^2 \\ 0 & 1 & 2\ln x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} x\ln x & x(\ln x)^2 \\ 1 & 2\ln x \end{vmatrix} = x(\ln x)^2$$

$$W_2 = -\begin{vmatrix} x & x(\ln x)^2 \\ 0 & 2\ln x \end{vmatrix} = -2x\ln x$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = x$$

$r = \frac{1}{x}$ 이므로

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$

$$= \frac{x}{2}\int (\ln x)^2 dx - x\ln x\int \ln x dx + \frac{x(\ln x)^2}{2}\int 1 dx$$

$$= \frac{x}{2}[x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx]$$

$$- x\ln x(x\ln x - x) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2}$$

$$= \frac{x}{2}[x(\ln)^2 - 2(x\ln x - x) - 2\ln x(x\ln x - x) + x(\ln x)^2]$$

$= x^2$
$y = c_1 x + c_2 x\ln x + c_3 x(\ln x)^2 + x^2$
$y(1) = c_1 + 1 = 1, y'(1) = c_1 + c_2 + 2 = 3$
$y''(1) = c_2 + 2c_3 + 2 = 3$ 로 부터
$c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0, \quad y = x\ln x + x^2$

11. $m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0$의 해 1,2,3 으로부터
$y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3$

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & x & 2x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$$

$= x \cdot 2x^2 = 2x^3$

$$W_1 = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ x & 2x^2 \end{vmatrix} = x^4, \ W_2 = -\begin{vmatrix} x & x^3 \\ 0 & 2x^2 \end{vmatrix} = -2x^3$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

$r = 24x^2$ 이므로

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$$

$$= x\int \frac{x^4}{2x^3}24x^2 dx + x^2\int \frac{-2x^3}{2x^3}24x^2 dx$$

$$+ x^3\int \frac{x^2}{2x^3}24x^2 dx$$

$$= 12x\frac{x^4}{4} - 24x^2\frac{x^3}{3} + 12x^3\frac{x^2}{2} = x^5$$

$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + x^5$
$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 1$
$y'()) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 5 = 3$
$y''(0) = 2c_2 + 6c_3 + 20 = 14$ 로 부터
$c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = -1, y = x - x^3 + x^5$

12. $\lambda^4 + 10\lambda^2 + 9 = 0$의 해 $\pm i, \pm 3i$ 로 부터
$y_h = A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 3x + B_2\sin 3x$
Basic rule에 따라 $y_p = A\cosh x + B\sinh x$인 특수해를 찾으면 $y_p^{\text{iv}} = y_p'' = y_p$ 이므로
$y_p^{\text{iv}} + 10y_p'' + 9y_p = 20A\cosh x + 20\sinh x$
$= 40\sinh x$ 로 부터
$y_p = 2\sinh x$
$y = A_1\cos x + B_1\sin x$
$+ A_2\cos 3x + B_2\sin 3x + 2\sinh x$
$y(0) = A_1 + A_2 = 0, y'(0) = B_1 + 3B_2 + 2 = 6$
$y''(0) = -A_1 - 9A_2 = 0$
$y'''(0) = -B_1 - 27B_2 + 2 = -26$ 로 부터
$A_1 = A_2 = 0, B_1 = B_2 = 1$
$y = \sin x + \sin 3x + 2\sinh x$

13. $\lambda^3 - 4\lambda = 0$의 해 $0, \pm 2$ 로 부터
$y_h = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$
Basic rule 에 따라 $y_p = A\cos x + B\sin x$인 특수해를 찾으면 $y_p = -2\sin x + \cos x$를 얻을 수 있다.
$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + -2\sin x + \cos x$
$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 3$
$y'(0) = 2c_2 - 2c_3 - 2 = -2$
$y''(0) = 4c_2 + 4c_3 - 1 = -1$ 로 부터
$c_1 = 2, c_2 = c_3 = 0,\quad y = 2 - 2\sin x + \cos x$

15. $(D-1)(D^2-2D+2D)(D^2-4D+5)y = e^x$인 경우를 예를 들어 $y_p = \sum_{i=1}^{3} y_i \int \frac{W_i}{W} r dx$로 구한 y_p가 ce^x형태가 됨을 증명하겠다.
characteristic equation의 해가 $1, 1\pm i, 2\pm i$이므로
$y_1 = e^x, y_2 = e^x\cos x, y_3 = e^x \sin x$,
$y_4 = e^{2x}\cos x, y_5 = e^{2x}\sin x$로 두고 먼저

$$W = \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ Y''' \\ Y^{(4)} \end{vmatrix}$$를 계산하면 $(Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5))$

$$W' = \begin{vmatrix} Y' \\ Y' \\ Y'' \\ Y''' \\ Y^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y \\ Y'' \\ Y'' \\ Y''' \\ Y^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y''' \\ Y''' \\ Y^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ Y^{(4)} \\ Y^{(4)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ Y''' \\ Y^{(5)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ Y''' \\ Y^{(5)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ Y''' \\ 7Y^{(4)} + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= 7\begin{vmatrix} Y \\ Y' \\ Y'' \\ Y''' \\ Y^{(4)} \end{vmatrix}$$ $= 7W$이므로($\cdots$ 부분은 3차미분이하식) $W = ce^{7x}$이다. 여기서 7은 근$(1, 1\pm i, 2\pm i)$들의 합인데 , 이것을 일반화하면, 상수계수미방의 Wronskian은 ce^{sx}(s는 근들의 합)이 된다.)

마찬가지 이유로 y_2, y_3, y_4, y_5는
$(D^2-2D+2)(D^2-4D+5)y = 0$의 해이므로

$$W_1 = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_2' & y_3' & y_4' & y_5' \\ y_2'' & y_3'' & y_4'' & y_5'' \\ y_2''' & y_3''' & y_4''' & y_5''' \end{vmatrix} = ce^{6x}$$ 이고,

(상수는 모두 c로 적겠다.)
$y_1 \int \frac{W_1}{W} r dx = ce^x \int \frac{e^{6x}}{e^{7x}} e^x dx = ce^x$
임을 알 수 있다.(중근이나 3중근인 경우도 이 경우처럼 간단하게 증명할 수 있다.)

다음으로 $y_2 \int \frac{W_2}{W} r dx + y_3 \int \frac{W_3}{W} r dx = ce^x$임을 보이자. 먼저 W_2, W_3를 계산해 보면,
y_1, y_4, y_5가
$Ly = (D-1)(D^2-4D+5)y = (D^3-5D^2+9D-5)y = 0$의 해이므로

$$W_2 = -\begin{vmatrix} y_1 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_1' & y_3' & y_4' & y_5' \\ y_1'' & y_3'' & y_4'' & y_5'' \\ y_1''' & y_3''' & y_4''' & y_5''' \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} y_1 & y_4 & y_5 & y \\ y_1' & y_4' & y_5' & y \\ y_1'' & y_4'' & y_5'' & y \\ 5y_1''-9y_1'+5y_1 & y_4''-9y_4'+5y_4 & y_5''-9y_5'+5y_5 & y \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} y_1 & y_4 & y_5 & y_3 \\ y_1' & y_4' & y_5' & y_3' \\ y_1'' & y_4'' & y_5'' & y_3'' \\ 0 & 0 & 0 & y_3'''-5y_3''+9y_3'-5y_3 \end{vmatrix}$$

$$= -Ly_3\begin{vmatrix} y_1 & y_4 & y_5 \\ y_1' & y_4' & y_5' \\ y_1'' & y_4'' & y_5'' \end{vmatrix} = -e^{5x}Ly_3$$이고 마찬가지로 계산하면 $W_3 = e^{5x}Ly_2$임을 알 수 있다.(편의상 상수는 L에 포함시켰다고 생각함)

위의 계산결과를 이용하면,
$\int \frac{W_2}{W} r dx = \int \frac{-e^{5x}Ly_3}{e^{7x}} e^x dx = -\int e^{-x}Ly_3 dx$
$\int \frac{W_3}{W} r dx = \int \frac{e^{5x}Ly_2}{e^{7x}} e^x dx = \int e^{-x}Ly_2 dx$ 를 얻을 수 있고,부분적분과 $y_2' = y_2 - y_3, y_3' = y_3 + y_2$를 이용하면, $\int \frac{W_2}{W} r dx = -\int e^{-x}Ly_3 dx$
$= e^{-x}Ly_3 - \int e^{-x}(Ly_3)' dx$
$= e^{-x}Ly_3 - \int e^{-x}(Ly_3 + Ly_2) dx$
$= e^{-x}Ly_3 + \int \frac{W_2}{W} r dx - \int \frac{W_3}{W} r dx$ 로 부터
$\int \frac{W_3}{W} r dx = e^{-x}Ly_3$ 이고 마찬가지로 이유로
$\int \frac{W_2}{W} = e^{-x}Ly_2$이다.

이제 $y_2 \int \frac{W_2}{W} r dx + y_3 \int \frac{W_3}{W} r dx$
$= e^{-x}(y_2Ly_2 + y_3Ly_3)$인데,
$T = y_2Ly_2 + y_3Ly_3$를 미분해보면
$T' = y_2'Ly_2 + y_2Ly_2' + y_3'Ly_3 + y_3Ly_3'$
$= (y_2 - y_3)Ly_2 + y_2(Ly_2 - Ly_3)$
$+ (y_3 + y_2)Ly_3 + y_3(Ly_3 + Ly_2)$
$= 2(y_2Ly_2 + y_3Ly_3) = 2T$이므로 $T = ce^{2x}$이다.

그러므로 $y_2 \int \frac{W_2}{W} r dx + y_3 \int \frac{W_3}{W} r dx = ce^x$임을 알 수 있고
$y_4 \int \frac{W_4}{W} r dx + y_5 \int \frac{W_5}{W} r dx$도 마찬가지 방법으로 ce^x가 됨을 알 수 있다.

이상에서 본 바와 같이 상수계수 미방에서 r이 지수함수일 경우는 variation of parameters를 이용해 특수해를 구해보면 cr형태의 해를 얻으므로 cr형태의 특수해가 항상 존재한다는 걸 알 수 있다. 그러므로 Basic rule에 의해 $y_p = cr$로 두고 특수해를 구하는 방법은 정당성을 얻는다고 하겠다..

Chapter2. Review

1. homogeneous equation 에서 해의 합은 다시 해가 된는 원리. 해들의 무한합으로 원하는 해를 구하는 idea와 연결 된다.

2. 미방의 차수만큼 필요하다.

3. 어느 하나가 다른 것들의 일차결합으로 표현되면 linear dependent그렇지 않으면 linear independent.미방의 basis는 linear independent이어야 한다.

4. 두개의 함수는 서로 상수배가 되는것을 검사해서 linear independent여부를 간단히 알아 볼수도 있지만, 일반적으로 n개의 함수들은 Wronskian 을 검사해야 한다.

5. 대부분의 mechanics 문제에서 뉴턴 제 2법칙 $F = ma = my''$에 기인한 2차 미분항을 포함한 방정식이 나타나기 때문.

6. 한점에서의 값들로 linear independent를 얘기하는건 결국 실수의 집합에서 linear independent를 얘기하는 것인데 실수 집합은 1차원이므로 두개 이상은 항상 linear dependent이다. 그러므로 아무 의미가 없다.

7. 실제 문제들에서는 주어진 초기값들이나 경계값들을 만족하는 해 (particular solution)을 구해야 한다.

8. n개 함수들의 $n-1$계 도함수까지의 함수들로 만들어진 $n \times n$행렬의 행렬식. linear independent여부를 따지는데 유용하고, homogeneous equation 의 basis들로부터 특수해를 구하는 variation of parameters method formular 에도 나타난다.

9. 상수계수 방정식과 Euler-Cauchy 방정식

10. $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = r(x)$인 미방에서 $a_{n-1}(x), a_{n-2}(x), a_2(x), a_1(x), a_0(x), r(x)$가 주어진 구간 I에서 continuous 이면 주어진 미방을 포함한 초기값문제는 주어진 구간 I에서 유일한 해를 가진다.

11. 예를 들어 $r(x) = e^x$가 homogeneous equation 의 해가 되면 basic rule $y_p = ce^x$대신에 $y_p = xe^x$로 두고 특수해를 찾는 방법을 Modification rule 이라 한다.

12. $y_p = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \frac{W_i}{W} r\,dx$

$$y_1W_1 + y_2W_2 + \cdots + y_{n-1}W_{n-1} + y_nW_n = 0$$
$$y_1'W_1 + y_2'W_2 + \cdots + y_{n-1}'W_{n-1} + y_n'W_n = 0$$
$$y_1''W_1 + y_2''W_2 + \cdots + y_{n-1}''W_{n-1} + y_n''W_n = 0$$
$$\vdots$$
$$y_1^{(n-2)}W_1 + \cdots + y_{n-1}^{(n-2)}W_{n-1} + y_n^{(n-2)}W_n = 0$$
$$y_1^{(n-1)}W_1 + \cdots + y_{n-1}^{(n-1)}W_{n-1} + y_n^{(n-1)}W_n = W$$

임을 이용하면 y_p가 특수해가 됨을 증명할 수 있다.

13. linear equation 이 더 쉽기때문

14. 두 실근을 가지는 경우와 중근을 가지는 경우 두 허근을 가지는 경우가 있는데 두 실근을 가지는 경우는 overdamping 에, 중근을 가지는 경우는 critical damping 에 두 허근을 가지는 경우는 underdamping에 해당한다.

15. input source 의 frequency ω가 system의 frequency $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 에 가까울때 solution의 해가 큰 amplitude 를 가지며 진동하는 것을 resonance(공명)이라 한다.

16. $4\lambda^2 + 24\lambda + 37 = 0$의 해 $-3 \pm \frac{1}{2}i$로 부터
$y = e^{-3x}(A\cos\frac{1}{2}x + B\sin\frac{1}{2}x)$

17. $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$의 해 $2, -\frac{1}{2}$ 로 부터
$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}$ 를 얻고 Basic rule에 따라
$y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$ 두고 특수해를 구하면
$y_p = x^2 - 3x$를 얻는다. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x} + x^2 - 3x$

18. $m^2 - 9 = 0$의 해 ± 3 으로부터$y = c_1x^3 + c_2x^{-3}$

19. $m^2 - 4m + 4 = 0$의 해 2(중근)로 부터
$y_h = (c_1 + c_2\ln x)x^2$를 얻고 $y_p = c$인 특수해를 구하면 $y_p = 3$을 얻는다. $y = (c_1 + c_2\ln x)x^2 + 3$

20. $\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$의 해 $1, -1, 4$ 로 부터
$y_h = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{4x}$를 얻고 Basic rule 에 따라 $y_p = Ce^{2x}$인 해를 찾으면 $y_p = -5e^{2x}$를 얻는다.
$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{4x} - 5e^{2x}$

21. $m(m-1)(m-2) - 9m(m-1) + 33m - 48 = 0$의 해 2,4,6 으로부터 $y = c_1x^2 + c_2x^4 + c_3x^6$

22. $\lambda^2 - 2\pi\lambda + \pi^2 = 0$의 해 π 로 부터
$y_h = (c_1 + c_2x)e^{\pi x}$
$e^{\pi x}$와 $xe^{\pi x}$가 homogeneous equation 의 해이므로 Modification rule 에 따라 $y_p = Cx^2e^{\pi x}$인 해를 찾으면 $y_p = x^2e^{\pi x}$를 얻는다. $y = (c_1 + c_2x + x^2)e^{\pi x}$

23. $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$의 해 $-1 \pm i$로 부터
$y_h = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$
Basic rule에 따라 $y_p = e^{-x}(a\cos 2x + b\sin 2x)$인 해를 찾으면 $y_p = -e^{-x}\cos 2x$ 이므로
$y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x - \cos 2x)$

24. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$의 해는 -2(중근)
$y_1 = e^{-2x}, y_2 = xe^{-2x}$로 두고 variation of parameters method를 써서 y_p 를 찾으면
$r = \frac{e^{-2x}}{x^2}, W = e^{-4x}$(15절 문제 15번 참조)
$y_p = -y_1\int \frac{y_2}{W} r\,dx + y_2\int \frac{y_1}{W} r\,dx$
$= -e^{-2x}\int \frac{xe^{-2x}}{e^{-4x}}\frac{e^{-2x}}{x^2}dx + xe^{-2x}\int \frac{e^{-2x}}{e^{-4x}}\frac{e^{-2x}}{x^2}dx$
$= -e^{-2x}\ln|x| - e^{-2x}$ 이므로

$y = (c_1 + c_2x - \ln|x|)e^{-2x}$

25. $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$의 해 $\pm1, \pm2$로 부터
$y_h = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$
Basic rule에 따라 $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$인 해를 찾으면 $y_p = \cos 2x$ 이므로
$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x} + \cos 2x$

26. $\lambda^3 - \lambda = 0$의 해 $0, \pm1$로 부터 $y_h = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$
$\sinh x$가 homogeneous equation 의 해이므로 modification rule 에 따라 $y_p = Cx\sinh x$인 해를 찾으면
$y_p = \frac{1}{2}x\sinh x$이므로
$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + \frac{1}{2}x\sinh x$

27. $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$의 해 -1(3중근)로 부터
$y_h = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}$이고 Basic rule에 따라 $y_p = A\cos x + B\sin x$인 해를 찾으면
$y_p = -2\cos x - 2\sin x$ 이므로
$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} - 2\cos x - 2\sin x$

28. $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$의 해 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$로 부터
$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$이고 Sum rule에 따라 $y_p = A_1\cos x + B_1\sin x + A_2\cos 2x + B_2\sin 2x$인 해를 찾으면
$y_p = \sin x - 3\cos 2x + 2\sin 2x$ 이므로
$y = e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
$+ \sin x - 3\cos 2x + 2\sin 2x$

29. $m^2 - 1.4m + 0.49 = 0$의 해 0.7(중근) 으로부터
$y_h = (c_1 + c_2\ln|x|)x^{0.7}$이고 $y_p = c$인 해를 찾으면
$c = \frac{0.07}{0.49} = \frac{1}{7}$, $y = (c_1 + c_2\ln|x|)x^{0.7} + \frac{1}{7}$

30. $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$의 해는 2(중근)
$y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$로 두고 variation of parameters method를 써서 y_p 를 찾으면
$r = \frac{e^{2x}}{x}, W = e^{4x}$(15절 문제 15번 참조)
$$y_p = -y_1\int\frac{y_2}{W}r\,dx + y_2\int\frac{y_1}{W}r\,dx$$
$$= -e^{2x}\int\frac{xe^{2x}}{e^{4x}}\frac{e^{2x}}{x}dx + xe^{2x}\int\frac{e^{2x}}{e^{4x}}\frac{e^{2x}}{x}dx$$
$= -e^{2x}x + xe^{2x}\ln|x|$ 이므로
$y = (c_1 + c_2x + x\ln|x|)e^{2x}$

31. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해와 Basic rule 에 따라 일반해를 구하면
$y = A\cos 4x + B\sin 4x + e^x$
$y(0) = A + 1 = 6, y'(0) = 4B + 1 = -2$ 로 부터
$A = 5, B = -\frac{3}{4}$, $y = 5\cos 4x - \frac{3}{4}\sin 4x + e^x$

32. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해와 Basic rule 에 따라 일반해를 구하면
$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 3\cos x + \sin x$
$y(0) = c_1 + c_2 + 3 = 1, y'(0) = c_1 + 2c_2 + 1 = -6$
로 부터 $y = 3e^x - 5e^{2x} + 3\cos x + \sin x$

33. Euler-Cauchy 방정식의 보조 방정식과 variation of parameters method로 일반해를 구하면
$y = c_1x^2 + c_2x^3 - x^2\sin\pi x$
$y(1) = c_1 + c_2 = 5$
$y'(1) = 2c_1 + 3c_2 + \pi = 5 + \pi$ 로 부터
$y = 10x^2 - 5x^3 - x^2\sin\pi x$

34. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해 $-2\pm\omega i$로 부터 일반해는 $y = e^{-2x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$
$y(0) = A = 1, y'(0) = -2A + \omega B = \omega - 2$ 로 부터
$A = B = 1$, $y = e^{-2x}(\cos\omega x + \sin\omega x)$

35. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해와 Sum rule 에 따라 일반해를 구하면
$y = A\cos 2x + B\sin 2x + e^{-2x} + x^2$
$y(0) = A + 1 = 2, y'(0) = 2B - 2 = 2$
로 부터 $y = \cos 2x + 2\sin 2x + e^{-2x} + x^2$

36. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해와 Basic rule 에 따라 일반해를 구하면
$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + 2\cos x + \sin x$
$y(0) = c_1 + c_2 + 2 = 2, y'(0) = c_1 + 3c_2 + 1 = 1$
로 부터 $c_1 = c_2 = 0$, $y = 2\cos x + \sin x$

37. Euler-Cauchy 방정식의 보조 방정식과 variation of parameters method로 일반해를 구하면
$y = c_1x + c_2x^{-1} + 2x^3$
$y(1) = c_1 + c_2 + 2 = -1, y'(1) = c_1 - c_2 + 6 = 11$
로 부터 $y = x - 4x^{-1} + 2x^3$

38. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해 1(중근),-1로 부터 일반해는 $y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-x}$
$y(0) = c_1 + c_3 = 2, y'(0) = c_2 - c_3 = 1$
$y''(0) = 2c_2 + c_1 + c_3 = 0$ 로 부터
$c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 0$, $y = (2 - x)e^x$

39. Euler-Cauchy 방정식의 보조 방정식과 variation of parameters method로 일반해를 구하면
$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 - \frac{1}{2x}$
$y(1) = c_1 + c_2 + c_3 - \frac{1}{2} = 5$
$y'(1) = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \frac{1}{2} = 13$
$y''(1) = 2c_2 + 6c_3 - 1 = 10$, 로 부터
$c_1 = -3, c_2 = 10, c_3 = -\frac{3}{2}, y = -3x + 10x^2 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2x}$

40. 상수계수 방정식의 characteristic equation의 해와 Basic rule 에 따라 일반해를 구하면
$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x} - 2\cos x - 2\sin x$
$y(0) = c_1 - 2 = -1, y'(0) = c_2 - c_1 - 2 = -3$
$y''(0) = 2c_3 - 2c_2 + c_1 + 2 = 5$ 로 부터
$c_1 = c_3 = 1, c_2 = 0$ $y = (1 + x^2)e^{-x} - 2\cos x - 2\sin x$

41. $I'' + 2000I + 250I = 110 \cdot 415\cos 415t$
$I_p = A\cos 415t + B\sin 415t$로 두고 I_p를 찾으면
$I_p'' + 2000I_p' + 250I_p =$
$[(-415^2 + 250)A + 415 \cdot 2000B]\cos 415t$
$+ [(-415^2 + 250)B - 415 \cdot 2000A]\sin 415t$
$= 110 \cdot 415\cos 415t$로 부터
$A = -0.01093, B = 0.05273$
$I_p = -0.01093\cos 415t + 0.05273\sin 415t$

42. $\lambda^2 + 2000\lambda + 250 = 0$의 해 $-1999.87, -0.125008$ 로 부터 $I_h = c_1e^{-1999.87t} + c_2e^{-0.125008t}$

43. $30I'' + 50I' + 40I = 800\cos 4t$
$I_p = A\cos 4t + B\sin 4t$로 두고 I_p를 찾으면
$I_p = -\frac{110}{73}\cos 4t + \frac{50}{73}\sin 4t$

44. 먼저 $0 < t < 0.01$구간; $I_1'' + 200I_1' + 6400I_1 = 1600$
일반해는 $I_1 = c_1e^{-160t} + c_2e^{-40t} + 0.25$
$I_1(0)=c_1+c_2+0.25=0, I_1'(0)=-160c_1 - 40c_2=0$
으로부터 $I_1 = 0.0833e^{-160t} - 0.3333e^{-40t} + 0.25$
다음 $0.01 < t$인 구간;$I_2'' + 200I_2' + 6400I_2 = 0$
일반해는 $I_2 = c_1e^{-160t} + c_2e^{-40t}$
$I_2(0.01)=c_1e^{-1.6} + c_2e^{-0.4}=I_1(0.01)$
$I_2'(0.01)=-160c_1e^{-1.6}-40c_2e^{-0.4}=I_1'(0.01)$ 로 부터
$I_2 = -0.3294e^{-160t} + 0.1639e^{-40t}$

45. 주어진 mass-spring system의 방정식은
$4y'' + 20y' + 10y = 100\sin 4t$
RLC-circuit의 방정식은 $LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'$이므로 $L = 4, R = 20, c = 0.1, E = -25\cos 4t$에 해당한다.

46. $4I'' + 20I' + 2I = 100\cos 10t$이므로
$4I'' + 20I' + 2I = 100e^{10it}$를 푼 다음 I의 실수부를 취하면 된다. $I = Ke^{10it}$로 두면
$I' = 10Kie^{10it}, I'' = -100Ke^{10it}$
$4I'' + 20I' + 2I=(-398 + 200i)Ke^{10it}=100e^{10it}$
이므로$K = \frac{100}{-398+200i} = -0.2006 - 0.1008i$
$Ke^{10it} = (-0.2006 - 0.1008i)(\cos 10t + i\sin 10t)$
이므로Ke^{10it}의 실수부는 $-0.2006\cos 10t+0.1008\sin 10t$

47. $y'' + 2y' + 6y = \sin 2t + 2\cos 2t$
$y_p = A\cos 2t + B\sin 2t$로 두고 y_p를 구하면
$y_p = \frac{1}{2}\sin 2t$

48. $0.125y'' + 1.125y = \cos t - 4\sin t$의 일반해는
$y = A\cos 3t + B\sin 3t + \cos t - 4\sin t$
초기조건 $y(0) = A + 1 = 0, y'(0) = 3B - 4 = 0$
으로부터 $y = -\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t + \cos t - 4\sin t$
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3$

49. $\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$의 해 $-1 \pm \sqrt{5}i$로 부터 일반해는
$y = e^{-t}(A\cos\sqrt{5}t + B\sin\sqrt{5}t) + \frac{1}{2}\sin 2t$
초기조건 $y(0) = A = 1, y'(0) = \sqrt{5}B - A + 1 = 0$
으로부터 $y = e^{-t}\cos\sqrt{5}t + \frac{1}{2}\sin 2t$

50. $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = 24$이고 page 116 (15)에 의해
$4^2=2(24-\omega^2)$일 때, 즉 $\omega = 4$일 때 최대 amplitude를 만든다. 그리고 그 때의 amplitude는 page 116 (16)에 의해 $\frac{2\cdot 10}{4\sqrt{4\cdot 24-16}} = 0.559$가 된다.
실제로 $y'' + 4y' + 24y = 10\cos 4t$의 일반해를 구해보면, Basic rule에 따라 $y = e^{-2t}(A\cos 2\sqrt{5}t + B\sin 2\sqrt{5}t) + 0.25\cos 4t + 0.5\sin 4t$를 얻는데 실제 해의 amplitude는 $\sqrt{0.25^2 + 0.5^2} = 0.559$로서 page 116의 결과와 일치한다.

CHAPTER 3

Systems of Differential Equations, Phase Plane, Qualitative Methods

Systems of differential equations occur in various applications (see Secs. 3.1 and 3.5). Their theory (outlined in Sec. 3.2) includes that of a single equation. Linear systems (Secs. 3.3, 3.4, 3.6) are best treated by the use of matrices and vectors, of which, however, only modest knowledge will be needed here (see Sec. 3.0).

In addition to actually *solving* linear systems of differential equations (Secs. 3.3, 3.6), there is a totally different approach, namely, the powerful method of discussing the general behavior of solutions in the **phase plane** (Sec. 3.4). This is called a **qualitative method** because it does not need actual solutions (which would make it "*quantitative*"), which for many practically important systems cannot be obtained analytically.

The qualitative method also gives information on **stability.** This concept is of general importance in engineering science (for instance, in control theory). It means that, roughly speaking, small changes of a physical system at some instant cause only small changes in the behavior of the system at all later times.

Phase plane methods can be extended to nonlinear systems (Sec. 3.5), for which they are particularly useful.

Notations for variables and functions. For the unknown functions we shall write $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ (or sometimes $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$). This seems preferable to ***suddenly*** changing the ***independent*** variable x in $y = f(x)$ (Calculus!) and in $y = y(x)$ (Chaps. 1, 2) into a ***dependent*** variable ($x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$), as it is sometimes done in systems of differential equations.

Prerequisites for this chapter: Secs. 1.2, 1.6, Chap. 2.
References: Appendix 1, Part A.
Answers to problems: Appendix 2.

3.1. Introductory Examples

1. example 1의 $\mathbf{A}$가 두배가 되므로 eigenvalue는 두배가 되고 eigenvector는 변함 없다. 그러므로 일반해는
$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.08t}$
초기조건에 의해 $c_1 = 75, c_2 = -75$

2. example 1의 $\mathbf{A}$가 $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.02 \\ 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}$로 된다.
$\tilde{\mathbf{A}}$의 eigenvalue은
$0 = \det(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -0.01 - \lambda & 0.02 \\ 0.01 & -0.02 - \lambda \end{vmatrix}$
$= \lambda^2 + 0.03\lambda$로 부터 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.03$
eigenvector는 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$로 두면
$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{0}$의 첫번째 행으로부터
$-0.01 + 0.02a = 0$ 이므로 $a = 0.5$
$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$의 첫번째 행으로부터
$0.02 + 0.02b = 0$ 이므로 $b = -1$
$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
일반해는 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{-0.03t}$
초기조건이 $c_1 + c_2 = 0, 0.5c_1 - c_2 = 150$ 이므로
$c_1 = 100, c_2 = -100$
Answer : $\mathbf{y} = 100 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} - 100 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.03t}$

3. example 1의 $\mathbf{A}$가 두배가 되므로 문제 1의 결과와 동일하다.

4. $I_1(0) = 2c_1 + c_2 + 3 = 28$
$I_2(0) = c_1 + 0.8c_2 = 14$ 로 부터 $c_1 = 10, c_2 = 5$

5. $I_1(0) = 2c_1 + c_2 + 3 = 9$
$I_2(0) = c_1 + 0.8c_2 = 0$ 로 부터 $c_1 = 8, c_2 = -10$

6. **첫번째 방정식은 변함없고 두번째 방정식은 $I_2' = 0.4I_1' - \frac{27}{5}I_2$로 바뀐다. 첫번째 방정식을 대입해 정리하면 $I_2' = -1.6I_1 + 1.06I_2 + 4.8$ 이므로방정식은**
$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4.8 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1.6 & 1.06 \end{bmatrix}$
이 된다. $\mathbf{A}$의 eigenvalue은 $-1.5, -1.44$, 각각의 eigenvector은 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.625 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.64 \end{bmatrix}$
이고, 특수해 $[3, 0]^\top$는 변함없으므로 일반해는
$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{-1.5t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{-1.44t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. system 으로 바꾸어서 푸는 방법;
$y_1 = y, y_2 = y'$로 두면,
$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}$의 eigenvalue는 $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 1$
로 부터 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$
$\lambda_1 = 1$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면
$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = 0$ 으로부터
$a = 1, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 1]^\top$
마찬가지로 $\lambda_2 = -1$의eigenvector는 $x^{(2)} = [1, -1]^\top$
그러므로 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$
$y = y_1 = c_1e^t + c_2e^{-t}$

상수계수 미방의 characteristic equation를 이용하는 방법;
$\lambda^2 - 1 = 0$의 해 $\lambda = 1, -1$ 로 부터 $y = c_1e^t + c_2e^{-t}$
둘의 결과는 일치한다.

8. $y_1 = y, y_2 = y'$로 두면,
$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}$의 eigenvalue는 $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$
로 부터 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$
$\lambda_1 = -1$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면
$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터
$a = -1, \mathbf{x}^{(1)} = [1, -1]^\top$
마찬가지로 $\lambda_2 = -2$의eigenvector는 $x^{(2)} = [1, -2]^\top$
그러므로 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$
$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$

9. $y_1 = y, y_2 = y'$로 두면,
$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}$의 eigenvalue는 $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 9$
로 부터 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$
$\lambda_1 = 3$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면
$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터
$a = 3, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 3]^\top$
마찬가지로 $\lambda_2 = -3$의eigenvector는 $x^{(2)} = [1, -3]^\top$
그러므로 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t}$
$y = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t}$

10. $y_1 = y, y_2 = y'$로 두면,
$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{15}{4} \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}$의 eigenvalue는 $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \frac{15}{4}\lambda - 1$
로 부터 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -\frac{1}{4}$
$\lambda_1 = 4$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면
$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터
$a = 4, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 4]^\top$
마찬가지로 $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$의eigenvector는 $x^{(2)} = [1, -\frac{1}{4}]^\top$
그러므로 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{4}t}$
$y = c_1e^{4t} + c_2e^{-\frac{1}{4}t}$

11. $y_1 = y, y_2 = y'$로 두면,
$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$의 eigenvalue는 $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 4\lambda$ 로 부터 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$

$\lambda_1 = 0$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면

$\mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터

$a = 0, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 0]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=4$의eigenvector는 $x^{(2)}=[1,4]^\top$

그러므로 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t}$

$y = c_1 + c_2 e^{4t}$

12. $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y''$로 두면,

$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$의 eigenvalue는 $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$

$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$ 로 부터 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=-2$

$\lambda_1 = 1$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a, b]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}$으로부터 $a = b = 1, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 1, 1]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=-1$의eigenvector는 $x^{(2)}=[1,-1,1]^\top$

$\lambda_3=-2$의eigenvector는 $x^{(3)}=[1,-2,4]^\top$

그러므로

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-2t}$

$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t}$

14. (a) $y_1{:=}m_1$의 원래점으로부터 m_1의 위치
$y_2{:=}m_2$의 원래점으로부터 m_2의 위치이므로 첫번째 스프링이 늘어난 길이는y_1이고 두번째 스프링이 늘어난 길이는 $y_2 - y_1$이다.
그러므로 m_1에 작용하고 있는 힘은 첫번째 스프링에 의한 힘$-k_1 y_1$과 두번째 스프링에 의한 반대방향의 힘 $k_2(y_2 - y_1)$의 합이고 뉴턴제 2법칙에 의해 이것은 $m_1 y_1''$과 같다. 다음 m_2에 작용하고 있는 힘은 $-k_2(y_2 - y_1)$이고 이것은 $m_2 y_2''$와 같다.즉,

$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)$

$m_2 y_2'' = -k_2(y_2 - y_1)$

그러므로 $y_1'' = -5y_1 + 2y_2$

$y_2'' = 2y_1 - 2y_2$

(b) $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^\top$로 쓰고 (a)의 방정식을 행렬형식으로 나타내면

$\mathbf{y}'' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\omega t}$로 두면 $\mathbf{y}'' = \omega^2 \mathbf{x} e^{\omega t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\omega t}$를 만족하므로 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \omega^2 \mathbf{x}$ 즉 ω^2과 $\mathbf{x}$는 $\mathbf{A}$의 eigenvalue과 eigenvector이다.

$\mathbf{A}$의 eigenvalue와 eigenvector을 구하면

$\lambda_1 = -1, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 2]^\top$

$\lambda_2 = -6, \mathbf{x}^{(2)} = [2, -1]^\top$이므로

$\mathbf{y} = [1,2]^\top e^{it}$또는 $\mathbf{y} = [1,2]^\top e^{-it}$ 또는

$\mathbf{y} = [2,-1]^\top e^{i\sqrt{6}t}$또는$\mathbf{y} = [2,-1]^\top e^{-i\sqrt{6}t}$

이제 superposition principle 에 의해 일반해는

$\mathbf{y} = [1,2]^\top (c_1 e^{it} + c_2 e^{-it})$
$+ [2,-1]^\top (c_3 e^{i\sqrt{6}t} + c_4 e^{-i\sqrt{6}t})$가 된다.

등식$e^{ix} = \cos x + i \sin x$을 이용해 다시 쓰면

$\mathbf{y} = [1,2]^\top (a_1 \cos t + b_1 \sin t)$
$+ [2,-1]^\top (a_2 \cos \sqrt{6}t + b_2 \sin \sqrt{6}t)$

(c) $z_1 = y_1, z_2 = y_1', z_3 = y_2, z_4 = y_2'$로 두면

$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}$

위 행렬의 eigenvalue와 eigenvector을 구하면

$\lambda_1 = i, \mathbf{z}^{(1)} = [-i, 1, -2i, 2]^\top$

$\lambda_2 = -i, \mathbf{z}^{(2)} = [i, 1, 2i, 2]^\top$

$\lambda_3 = i\sqrt{6}, \mathbf{z}^{(3)} = [2i\sqrt{6}, -12, -i\sqrt{6}, 6]^\top$

$\lambda_4 = -i\sqrt{6}, \mathbf{z}^{(4)} = [-2i\sqrt{6}, -12, i\sqrt{6}, 6]^\top$

일반해는

$[z_1, z_2, z_3, z_4]^\top = c_1 \mathbf{z}^{(1)} e^{it} + c_2 \mathbf{z}^{(2)} e^{-it}$
$+ c_3 \mathbf{z}^{(3)} e^{i\sqrt{6}t} + c_4 \mathbf{z}^{(4)} e^{-i\sqrt{6}t}$

$[z_1, z_3]^\top = [1,2]^\top (\tilde{c_1} e^{it} + \tilde{c_2} e^{-it})$
$+ [2,-1]^\top (\tilde{c_3} e^{i\sqrt{6}t} + \tilde{c_4} e^{-i\sqrt{6}t})$

$(\tilde{c_1}=-ic_1, \tilde{c_2}=ic_2, \tilde{c_3}=i\sqrt{6}c_3, \tilde{c_4}=-i\sqrt{6}c_4)$이므로 (b)의 결과와 일치한다.

3.3. Homogeneous Systems witn Constant Coefficients.Phase Plane,Critical Points

1. 1절 문제 7번과 동일.

2. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 12$

$= 0$으로부터 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$

$\lambda_1 = -3$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터

$a = -\frac{5}{2},\ \mathbf{x}^{(1)} = [2, -5]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=4$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(2)}=[1,1]^\top$

그러므로 $y_1 = 2c_1 e^{-3t} + c_2 e^{4t}$

$y_2 = -5c_1 e^{-3t} + c_2 e^{4t}$

3. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 4 = 0$으로부터

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

$\lambda_1 = 2$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터

$a = 1,\ \mathbf{x}^{(1)} = [1, 1]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=-2$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(2)}=[1,-3]^\top$

그러므로 $y_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

$y_2 = c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t}$

4. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$으로부터

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 9$

$\lambda_1 = 3$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터

$a = -\frac{1}{3},\ \mathbf{x}^{(1)} = [3, -1]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=9$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(2)}=[3, 1]^\top$

그러므로 $y_1 = 3c_1e^{3t} + 3c_2e^{9t}$

$y_2 = -c_1e^{3t} + c_2e^{9t}$

5. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$으로부터

$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$

$\lambda_1 = 1 + i$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면

$(\mathbf{A}-(1+i)\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)}=\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}=\mathbf{0}$ 으로부터

$a = -i,\ \mathbf{x}^{(1)} = [1, -i]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=1-i$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(2)}=[1, i]^\top$

$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(1-i)t}$

$= e^t\{c_1[\begin{smallmatrix} 1 \\ -i \end{smallmatrix}](\cos t+i\sin t)+c_2[\begin{smallmatrix} 1 \\ i \end{smallmatrix}](\cos t-i\sin t)\}$

$= e^t \left(\begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_1 i + c_2 i \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} c_1 i - c_2 i \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} \sin t \right)$

이제 $c_1 + c_2 = A, c_1 i - c_2 i = B$로 두면

$y_1 = e^t(A\cos t + B\sin t)$

$y_2 = e^t(-B\cos t + A\sin t)$

6. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$으로부터

$\lambda = -6$(중근)

$\lambda = -6$의 eigenvector를 $\mathbf{x}^{(1)} = [1, a]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} + 6\mathbf{I})\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터

$a = -1,\ \mathbf{x}^{(1)} = [1, -1]^\top$

더 이상 eigenvector가 없으므로

$(\mathbf{A} + 6\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}^{(1)}$인 $\mathbf{u}$를 구해야 한다.

간단하게 $\mathbf{u} = [0, a]^\top$로 두면

$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 로 부터 $u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

이제 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{-6t}+c_2(\mathbf{x}^{(1)}te^{-6t}+\mathbf{u}e^{-6t})$ 이므로

$y_1 = c_1 + c_2te^{-6t}$

$y_2 = -c_1e^{-6t} - c_2(t + \frac{1}{2})e^{-6t}$

7. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -4 \\ -10 & 1 & -14 \\ -4 & -14 & -2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$의 eigenvalue는

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 324\lambda - 2916=0$ 으로부터 $\lambda_1=-18, \lambda_2=9, \lambda_3=18$

$\lambda_1 = -18$의 eigenvector를 $\mathbf{x} = [1, a, b]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} + 18\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 28 & -10 & -4 \\ -10 & 19 & -14 \\ -4 & -14 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터 $a = b = 2, \mathbf{x}^{(1)} = [1, 2, 2]^\top$

마찬가지로 $\lambda_2=9$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(2)}=[2, 1, -2]^\top$

$\lambda_3=18$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(3)}=[2, -2, 1]^\top$

그러므로 $y_1 = c_1e^{-18t} + 2c_2e^{9t} + 2c_3e^{18t}$

$y_2 = 2c_1e^{-18t} + c_2e^{9t} - 2c_3e^{18t}$

$y_3 = 2c_1e^{-18t} - 2c_2e^{9t} + c_3e^{18t}$

8. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$의 eigenvalue는

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5) + 2(\lambda+3)=0$

으로부터 $\lambda_1=-3$(중근),$\lambda_2=-6$

$\lambda_1 = -3$의 eigenvector를 $\mathbf{x} = [1, a, b]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 으로부터

$-a + 2b = 0$이므로,$\mathbf{x}^{(1)} = [1, 0, 0]^\top$ $\mathbf{x}^{(2)}=[1, 2, 1]^\top$

$\lambda_3=-6$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(3)}=[1, 1, -1]^\top$

그러므로 $y_1 = (c_1 + c_2)e^{-3t} + c_3e^{-6t}$

$y_2 = 2c_2e^{-3t} + c_3e^{-6t}$

$y_3 = c_2e^{-3t} - c_3e^{-6t}$

($c_1 + c_2$를 c_1으로 적을수도 있다.)

9. $\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}$의 eigenvalue는

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda=0$

으로부터 $\lambda_1=3$(중근),$\lambda_2=0$

$\lambda_1 = 3$의 eigenvector를 $\mathbf{x} = [1, a, b]^\top$로 두면

$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = 0$

으로부터 $2 + 2a - b = 0$이므로

$\mathbf{x}^{(1)} = [1, 0, 2]^\top$ $\mathbf{x}^{(2)}=[1, -1, 0]^\top$

$\lambda_3=0$의eigenvector는 $\mathbf{x}^{(3)}=[-2, 1, 1]^\top$

그러므로 $y_1 = (c_1 + c_2)e^{3t} - 2c_3$

$y_2 = -c_2e^{3t} + c_3$

$y_3 = 2c_1e^{3t} + c_3$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-3, 4$

각각의 eigenvector은 $[2, -5]^\top, [1, 1]^\top$

일반해는 $y_1 = 2c_1e^{-3t} + c_2e^{4t}$

$y_2 = -5c_1e^{-3t} + c_2e^{4t}$

$y_1(0) = 2c_1 + c_2 = 0, y_2(0) = -5c_1 + c_2 = -7$

으로부터 $c_1 = 1, c_2 = -2$

$y_1 = 2e^{-3t} - 2e^{4t}, y_2 = -5e^{-3t} - 2e^{4t}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $1, -1$

각각의 eigenvector은 $[1, 1]^\top, [1, -1]^\top$

일반해는 $y_1 = c_1e^t + c_2e^{-t}$

$y_2 = c_1e^t - c_2e^{-t}$

$y_1(0)=c_1 + c_2=1, y_2(0)=c_1 - c_2=0$

으로부터 $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$

$y_1 = \cosh t, y_2 = \sinh t$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $3, -1$
각각의 eigenvector은 $[1,2]^\top, [1,-2]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$
$y_2 = 2c_1e^{3t} - 2c_2e^{-t}$
$y_1(0)=c_1 + c_2=4, y_2(0)=2c_1 - 2c_2=4$
으로부터 $c_1 = 3, c_2 = 1$
$y_1 = 3e^{3t} + e^{-t}, y_2 = 6e^{3t} - 2e^{-t}$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-\frac{1}{2}, 1$
각각의 eigenvector은 $[2,-1]^\top, [5,-1]^\top$
일반해는 $y_1 = 2c_1e^{-\frac{t}{2}} + 5c_2e^t$
$y_2 = -c_1e^{-\frac{t}{2}} - c_2e^t$
$y_1(0)=2c_1 + 5c_2=10, y_2(0)=-c_1 - c_2=-5$
으로부터 $c_1 = 5, c_2 = 0$
$y_1 = 10e^{-\frac{t}{2}}, y_2 = -5e^{-\frac{t}{2}}$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $1, 3$
각각의 eigenvector은 $[3,-1]^\top, [3,1]^\top$
일반해는 $y_1 = 3c_1e^t + 3c_2e^{3t}$
$y_2 = -c_1e^t + c_2e^{3t}$
$y_1(0)=3c_1 + 3c_2=0, y_2(0)=-c_1 + c_2=2$
으로부터 $c_1 = -1, c_2 = 1$
$y_1 = -3e^t + 3e^{3t}, y_2 = e^t + e^{3t}$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -14 & 10 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-9, -4$
각각의 eigenvector은 $[2,1]^\top, [1,1]^\top$
일반해는 $y_1 = 2c_1e^{-9t} + c_2e^{-4t}$
$y_2 = c_1e^{-9t} + c_2e^{-4t}$
$y_1(0)=2c_1 + c_2=-1, y_2(0)=c_1 + c_2=1$
으로부터 $c_1 = -2, c_2 = 3$
$y_1 = -4e^{-9t} + 3e^{-4t}, y_2 = -2e^{-9t} + 3e^{-4t}$

16. $y_1' = -\frac{16}{200}y_1 + \frac{4}{200}y_2$
$y_2' = \frac{16}{200}y_1 - \frac{16}{200}y_2$
방정식의 행렬의 eigenvalue은 $-0.04, -0.12$
각각의 eigenvector은 $[1,2]^\top, [1,-2]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1e^{-0.04t} + c_2e^{-0.12t}$
$y_2 = 2c_1e^{-0.04t} - 2c_2e^{-0.12t}$
$y_1(0)=c_1 + c_2=100, y_2(0)=2c_1 - 2c_2=200$
으로부터 $c_1 = 100, c_2 = 0$
$y_1 = 100e^{-0.04t}, y_2 = 200e^{-0.04t}$

17. page 43 주석의 kirchhoff current law에 의해 분기점에서 나가고 들어오는 전류의 합은 0이므로 첫번째 RC-회로에서 저항R에 흐르는 전류는 $I_1 - I_2$이다. 따라서 kirchhoff voltage law에 의해 RC-회로의 voltage drop 은 $\frac{1}{C}\int I_1 + R(I_1 - I_2) = 0$ (*1)
마찬가지로 두번째 RL-회로에서는
$LI_2' + R(I_2 - I_1) = 0$ (*2)가 성립한다. (*1)식을 미분하면 $\frac{1}{C}I_1 + R(I_1' - I_2') = 0$
여기에 (*2)식를 대입하면
$RI_1' = RI_2' - \frac{1}{C}I_1 = R(\frac{R}{L}(I_1 - I_2)) - \frac{1}{C}I_1$
$= (\frac{R^2}{L} - \frac{1}{C})I_1 - \frac{R^2}{L}I_2$

그러므로 전류 I_1, I_2의 미분방정식은
$I_1' = (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_1 - \frac{R}{L}I_2$
$I_2' = \frac{R}{L}I_1 - \frac{R}{L}I_2$가 된다.

이제 $R = 3, L = 4, C = \frac{1}{12}$이므로 방정식의 행렬은
$\begin{bmatrix} -\frac{13}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$이고 eigenvalue는 $-1, -3$
각각의 eigenvector은$[1,-3]^\top, [3,-1]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1e^{-t} + 3c_2e^{-3t}$
$y_2 = -3c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$

18. 문제 17번에 의해 방정식의 행렬은
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R/L - 1/(RC) & -R/L \\ R/L & -R/L \end{bmatrix}$
$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$으로부터
$\lambda = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$이므로 실수의 eigenvalue을 가질 필요충분조건은
$\frac{1}{4R^2C^2} \geq \frac{1}{LC}$ 정리하면 $L \geq 4R^2C$

20. example 4;
$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} e^{-2it}$
$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t)$
$+ c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} (\cos 2t - i \sin 2t)$
$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1i - 2c_2i \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} c_1i - c_2i \\ -2c_1 - 2c_2 \end{bmatrix} \sin 2t$
$c_1 + c_2 = A, c_1i - c_2i = B$로 두면
$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} A \\ 2B \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} B \\ -2A \end{bmatrix} \sin 2t$
$y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 = A^2 + B^2$

example 5;
$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$
$= e^{-t}c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t)$
$+ e^{-t}c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} (\cos t - i \sin t)$
$= e^{-t} \left(\begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1i - c_2i \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} c_1i - c_2i \\ -c_1 - c_2 \end{bmatrix} \sin t \right)$
$c_1 + c_2 = A, c_1i - c_2i = B$로 두면
$\mathbf{y} = e^{-t} \left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} B \\ -A \end{bmatrix} \sin t \right)$

y_1과 y_2의 관계를 극좌표로 나타내면,
$y_1 = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$
$= \sqrt{A^2 + B^2}e^{-t} \cos(\delta - t)$
$y_2 = e^{-t}(-A \sin t + B \cos t)$
$= \sqrt{A^2 + B^2}e^{-t} \sin(\delta - t)$
(δ는 점(A, B)의 편각)으로 정리 되므로 $\delta - t$는 편각 $\theta, r^2 = y_1^2 + y_2^2 = (A^2 + B^2)e^{-2t} = c_0e^{2\theta}$
$(c_0 = e^{-2\delta}(A^2 + B^2))$

3.4. Criteria for Critical Points. Stability

1. $p=3, q=2, \Delta=1$이므로 unstable node
   일반해는 $y_1=c_1e^t, y_2=c_2e^{2t}$
   $$\lim_{(y_1,y_2)\to(0,0)}\frac{y_2'}{y_1'}=\lim_{t\to-\infty}\frac{y_2'}{y_1'}=\lim_{t\to-\infty}\frac{2c_2e^{2t}}{c_1e^t}$$
   $=\lim_{t\to-\infty}\frac{2c_2}{c_1}e^t=0=$const 이므로 improper node.

2. $q=-9$이므로 saddle point
   (saddle point는 항상 unstable 임)
   일반해는 $y_1=c_1e^{-3t}+c_2e^{3t}$
   $y_2=-5c_1e^{-3t}+c_2e^{3t}$

3. $q=-3$이므로 saddle point
   일반해는 $y_1=c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$
   $y_2=-c_1e^{-t}+c_2e^{3t}$

4. $p=-12, q=27, \Delta=36$이므로 stable attractive node
   일반해는 $y_1=c_1e^{-3t}+c_2e^{-9t}$
   $y_2=-3c_1e^{-3t}+3c_2e^{-9t}$
   $$\lim_{(y_1,y_2)\to(0,0)}\frac{y_2'}{y_1'}=\lim_{t\to\infty}\frac{y_2'}{y_1'}$$
   $$=\lim_{t\to\infty}\frac{9c_1e^{-3t}-27c_2e^{-9t}}{-3c_1e^{-3t}-9c_2e^{-9t}}$$
   $=\lim_{t\to\infty}\frac{9c_1-27c_2e^{-6t}}{-3c_1-9c_2e^{-6t}}=-3=$const 이므로
   improper node

5. $p=-4, q=8, \Delta=-16$이므로 stable attractive spiral
   일반해는 $y_1=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t)$
   $y_2=e^{-2t}(B\cos 2t-A\sin 2t)$

6. $p=0, q=9, \Delta=-36$이므로 center
   (center는 항상 stable)
   일반해는 $y_1=(2A+6B)\cos 3t+(2B-6A)\sin 3t$
   $y_2=10A\cos 3t+10B\sin 3t$

7. $p=0, q=9$이므로 center
   일반해는 $y_1=A\cos 3t+B\sin 3t$
   $y_2=3B\cos 3t-3A\sin 3t$

8. $q=-10$이므로 saddle point
   일반해는 $y_1=c_1e^{-5t}+4c_2e^{2t}$
   $y_2=-c_1e^{-5t}+3c_2e^{2t}$

9. $q=-40$이므로 saddle point
   일반해는 $y_1=3c_1e^{-10t}+c_2e^{4t}$
   $y_2=4c_1e^{-10t}-c_2e^{4t}$

10. $p=-2, q=1, \Delta=0$이므로 stable attractive node
    $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\-5&-1\end{bmatrix}$, $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda+1)^2=0$
    으로부터 eigenvalue는 -1(중근)인데, eigenvector은 $[0,1]^\top$ 하나뿐이다. 그러므로 degenerate node.

    $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{u}=[0,1]^\top$를 만족하는 $\mathbf{u}$를 찾으면 $[-\frac{1}{5},0]^\top$
    그러므로 일반해는
    $$\mathbf{y}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\0\end{bmatrix}\right)e^{-t}$$

11. $q=-2$이므로 saddle point
    일반해는 $y_1=c_1e^{(2-\sqrt{6})t}+c_2e^{(2+\sqrt{6})t}$
    $y_2=-\sqrt{6}c_1e^{(2-\sqrt{6})t}+\sqrt{6}c_2e^{(2+\sqrt{6})t}$

12. $\lambda^2+\frac{1}{9}=0$의 해 $\pm\frac{1}{3}i$로 부터 $y=A\cos\frac{t}{3}+B\sin\frac{t}{3}$
    $y_1=y, y_2=y'$로 두면
    $y_1'=y_2, y_2'=-\frac{1}{9}y_1$ 이므로 $-\frac{1}{9}y_1y_1'=y_2y_2'$
    적분하면 $-\frac{1}{9}y_1^2=y_2^2+c$
    그러므로 (y,y')의 trajectory들은 타원들

13. 일반해는 $y=c_1+c_2e^{-at}$
    $y_1=y, y_2=y'$로 두면
    $y_1'=y_2, y_2'=-ay_2$ 이므로$y_2'=-ay_1'$
    적분하면 $y_2=-ay_1+c$ (평행한 직선들)

14. 일반해는 $y=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)$
    $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}$에서 $p=-2, q=2, \Delta=-4$
    이므로 stable attractive spiral

15. (10) $p=2, q=1, \Delta=0$이므로 unstable node

    (11) $q=-1$이므로 (unstable) saddle

    (12) $p=0, q=4$이므로 (stable) center

    (13) $p=-2, q=2, \Delta=-4$이므로 stable attractive spiral

16. 시간의 방향이 바뀌므로 trajectory의 방향만 바뀐다. 즉 stable improper node 에서 unstable improper node로 바뀐다.

17. $\mathbf{A}+0.1\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0.1&1\\-4&0.1\end{bmatrix}$에서
    $p=0.2, q=4.01, \Delta<0$ 이므로 unstable spiral 로 바뀐다.

18. center이므로 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&-a\end{bmatrix}$로 두면
    $q_{\mathbf{A}}=-a^2-bc>0, \Delta_{\mathbf{A}}=-4q_{\mathbf{A}}<0$
    $\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}a+k&b\\c&-a+k\end{bmatrix}$ 이므로$p_{\tilde{\mathbf{A}}}=2k$,
    $q_{\tilde{\mathbf{A}}}=k^2-a^2-bc>0, \Delta_{\tilde{\mathbf{A}}}=\Delta_{\mathbf{A}}<0$
    그러므로 $k<0$이면 stable attractive spiral로, $k>0$이면 unstable spiral로 바뀐다.

19. $\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}b&1+b\\-4+b&b\end{bmatrix}$ 이므로
    $p=2b, q=3b+4, \Delta=4(b+1)(b-4)$
    spiral point;$\Delta<0$이어야 하므로
    $-1<b<4$
    saddle;$q<0$이어야 하므로 $b<-\frac{4}{3}$
    node; $q>0, \Delta\geq 0$이어야 하므로
    $-\frac{4}{3}<b\leq-1$ or $4\leq b$

3.5. Qualitative Methods for Nonlinear Systems

1. limit cycle은 주변의 모든 trajectory와 거리가 0 (가장 가까운 점이 없다.)이고, center 주위의 한 trajectory는 주변의 모든 trajectory와 거리가 0이 아니다.(가장 가까운 두점이 존재한다.)

2. $y = A\cos t + B\sin t, y' = B\cos t - A\sin t$ 이므로 radius$=\sqrt{y^2+y'^2} = \sqrt{A^2+B^2}$

3. y_1축과 만날 때는 가장 높이 올라갔을 때의 상태(속력 0)이고, y_2축과 만날 때는 진자가 가장 저점을 통과할 때의 상태(속력은 최대).
wave 모양의 trajectory 는 진자가 회전을 하고 있는 상태를 나타내는데 y_2축과 만나는 점은 가장 저점을 통과하는 순간이다.

4. example 1과 반대로 critical point $(n\pi, 0)$ 중에서 n이 짝수이면 saddle, n이 홀수이면 center가 된다.

5. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = y_1 - y_1^2 = 0$을 만족하는 (y_1, y_2)는 (0,0)과 (1,0)
(0,0)에서 $y_1' = y_2, y_2' = y_1 - y_1^2 \approx y_1$이므로 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이고 $q = -1 < 0$이므로 saddle.
(1,0)에서 $(y_1-1)' = y_2, y_2' = -(y_1-1)-(y_1-1)^2 \approx -(y_1-1)$이므로 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$이고 $p = 0$, $q = 1 > 0$이므로 center.

6. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = -y_1 - y_1^2 = 0$ 을 풀면 $(0,0), (-1,0)$
$(0,0)$에서 $y_2' = -y_1 - y_1^2 \approx -y_1$ 이므로
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$이고$p = 0, q = 1$ 이므로center
(-1,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 + 1$로 두면
$\tilde{y_1}' = y_2, y_2' = -(\tilde{y_1}-1) - (\tilde{y_1}-1)^2 = \tilde{y_1} - \tilde{y_1}^2 \approx \tilde{y_1}$ 이므로 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$이고 $q = -1 < 0$이므로 saddle

7. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = \frac{1}{2}y_1^2 - y_1 = 0$ 을 풀면 $(0,0), (2,0)$
$(0,0)$에서 $y_2' \approx -y_1$ 이므로center
(2,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 2$로 두면
$y_2' = \frac{1}{2}(\tilde{y_1}+2)^2 - (\tilde{y_1}+2)^2 = \frac{1}{2}\tilde{y_1}^2 + \tilde{y_1} \approx \tilde{y_1}$ 이므로 saddle

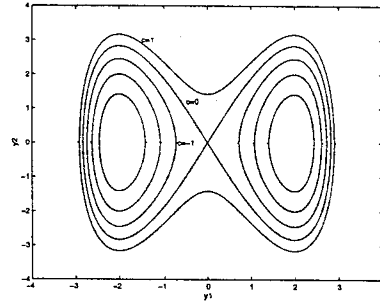
8. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = y_1^3 - y_1 = 0$ 을 풀면 $(0,0), (\pm 1, 0)$
$(0,0)$에서 $y_2' \approx -y_1$ 이므로center
(1,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 1$로 두면
$y_2' = (\tilde{y_1}+1)^3 - (\tilde{y_1}+1) = \tilde{y_1}^3 + 3\tilde{y_1}^2 + 2\tilde{y_1} \approx 2\tilde{y_1}$ 이므로 saddle. 마찬가지로 $(-1,0)$에서도 saddle

9. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = 9y_1 - y_1^3 = 0$ 을 풀면 $(0,0), (\pm 3, 0)$
$(0,0)$에서 $y_2' \approx 9y_1$ 이므로
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$이고 $q = -9 < 0$ 이므로saddle
(3,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 3$으로 두면
$y_2' = 9(\tilde{y_1}+3) - (\tilde{y_1}+3)^3 = -\tilde{y_1}^3 - 9\tilde{y_1}^2 - 18\tilde{y_1} \approx -18\tilde{y_1}$ 이므로 center.
마찬가지로 $(-3,0)$에서도 center

10. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = -4y_1 + 5y_1^3 - y_1^5 = 0$ 을 풀면 critical point는 $(0,0), (\pm 1, 0), (\pm 2, 0)$
$(0,0)$에서 $y_2' \approx -4y_1$ 이므로center
(1,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 1$로 두면 $y_2' \approx 6\tilde{y_1}$ 이므로 saddle. 마찬가지로 $(-1,0)$에서도 saddle
(2,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 2$로 두면 $y_2' \approx -24\tilde{y_1}$ 이므로 center. 마찬가지로 $(-2,0)$에서도 center

11. $y_1' = y_2 = 0, y_2' = -\cos y_1 = 0$ 을 풀면 $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 0), (-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 0)$($n$은 임의의 정수)
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ 이므로
$(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 0)$에서 $\tilde{y_1} = y_1 - (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$로 두면
$y_2' = -\cos(\tilde{y_1} + \frac{\pi}{2}) = \sin\tilde{y_1} \approx \tilde{y_1}$ 이므로 saddle.
$(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 0)$에서 $\tilde{y_1} = y_1 + (\frac{\pi}{2} - 2n\pi)$로 두면
$y_2' = -\cos(\tilde{y_1} - \frac{\pi}{2}) = -\sin\tilde{y_1} \approx -\tilde{y_1}$ 이므로 center

12. $y_1 = y, y_2 = y'$로 두면$y_1' = y_2, y_2' = 4y_1 - y_1^3$
변변 곱하면, $y_2 y_2' = (4y_1 - y_1^3)y_1'$
양변 적분하면 $\frac{y_2^2}{2} = 2y_1^2 - \frac{1}{4}y_1^4 + c$



13. $y_1' = y_2, y_1 y_2' + y_2^2 = 0$
두번째 식을 y_2로 나누면 $y_1\frac{y_2'}{y_2} + y_2 = 0$
$y_1' = y_2$를 대입해서 정리하면 $\frac{y_2'}{y_2} = -\frac{y_1'}{y_1}$
양변 적분하면 $y_2 = \frac{c}{y_1}$ (쌍곡선들)

14. damping term 이 들어가면 주기적인 상태였던 center들은 spiral로 바뀌어 어느 한점으로 가까이 갈 것이다.
$y_1' = y_2 = 0, y_2' = 4y_1 - y_1^3 - y_2 = 0$ 을 풀면 $(0,0), (\pm 2, 0)$ 이므로 critical point 는 변함없다.
$(0,0)$에서 $y_2' \approx 4y_1 - y_2$ 이므로$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$이고 $q = -4 < 0$ 이므로 saddle
$(2,0)$에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 2$로 두면 $y_2' \approx -8\tilde{y_1} - y_2$ 이므로 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$이고 $p = -1, q = 8 > 0, \Delta = -31 < 0$이므로 spiral (center에서 sprial로 바뀌었다.) $(-2,0)$에서도 마찬가지로 sprial로 바뀐다.

16. (a) $y_2' = \mu(1-y_1^2)y_2 - y_1 \approx -y_1 + \mu y_2$ 이므로 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$이고 $p = \mu, q = 1, \Delta = \mu^2 - 4$ 이므로 $\mu \geq 2$일 때는 unstable node, $0 < \mu < 2$일 때는 unstable spiral, $\mu = 0$일 때는 center, $-2 < \mu < 0$일 때는 stable attractive spiral, $\mu \leq -2$일 때는 stable attractive node .
또 $\mu \to 0$이면 page 181 (11)에 의해서 isocline 은 원점을 지나는 직선들이 된다.

(b) 속도가 작으면 negative damping, 속도가 크면 positive damping.
Rayleigh equation을 미분하면
$Y''' = -\mu\{-\frac{2}{3}Y'^2Y'' + (1-\frac{1}{3}Y'^2)Y''\} + Y' = 0$
$Y''' - \mu(1-Y'^2)Y'' + Y' = 0$ 이므로
$Y' = y$로 두면 Van der Pol equation 이 된다.

(c) $y_1' = y_2, y_2' = -(\omega_0^2 y_1 + \beta y_1^3)$
변변 곱하면 $y_2 y_2' = -(\omega_0^2 y_1 + \beta y_1^3)y_1'$
양변 적분하면 $\frac{y_2^2}{2} = -(\omega_0^2 \frac{y_1^2}{2} + \beta \frac{y_1^4}{4}) + c$
($\beta > 0$이면 닫힌 곡선이 된다.)

3.6. Nonhomogeneous Linear Systems

1. $\mathbf{y}$가 (1)의 해라면 $\mathbf{y} - \mathbf{y}^{(p)}$는 homogeneous equation의 해이므로 당연히 $\mathbf{y}$는 $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(h)} + \mathbf{y}^{(p)}$꼴이다.증명해야 할 것은 homogeneous equation이 n개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$을 잘 고르면 나머지 모든 해들은 그것들의 일차결합,즉 $c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(n)}$으로 표시될 수 있겠는가 하는 것이다.
$\mathbf{y}^{(h)} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$으로 두자. 다음
$\mathbf{y}^{(1)}$는 $\mathbf{y}^{(1)}(0) = (1, 0, 0, \cdots, 0)$을 만족하도록,
$\mathbf{y}^{(2)}$는 $\mathbf{y}^{(2)}(0) = (0, 1, 0, \cdots, 0)$을 만족하도록,
⋮
$\mathbf{y}^{(n)}$는 $\mathbf{y}^{(n)}(0) = (0, 0, \cdots, 0, 1)$을 만족하도록
고르고 (3장 2절 존재정리에 의해서 항상 가능하다),
$\tilde{\mathbf{y}}^{(h)} = y_1(0)\mathbf{y}^{(1)} + y_2(0)\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + y_n(0)\mathbf{y}^{(n)}$ 으로 두면 $\tilde{\mathbf{y}}^{(h)}$은 homogeneous equation의 해이고 $\mathbf{y}^{(h)}$와 초기조건이 같다. 그러므로 3장 2절 유일성 정리에 의해서 $\mathbf{y}^{(h)}$는 $\tilde{\mathbf{y}}^{(h)}$와 같은 함수이고, 따라서 $\mathbf{y}^{(h)}$는 $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \cdots, \mathbf{y}^{(n)}$의 일차결합으로 표시될 수 있다.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-2, 2$이고
각각의 eigenvector은 $[1,-1]^\top, [1,1]^\top$
이제 $\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}t) + [t, 1]^\top$ 이므로
$v_1 = 2(u_2 + v_2 t) + t, v_2 = 2(u_1 + v_1 t) + 1.$
$v_1 = 2u_2, 2v_2 + 1 = 0, 2u_1 + 1 = v_2, v_1 = 0$ 을 풀면
$v_1 = u_2 = 0, v_2 = -\frac{1}{2}, u_1 = -\frac{3}{4}$
그러므로 일반해는
$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2}t \end{bmatrix}$$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-1, 1$이고
각각의 eigenvector은 $[1,-1]^\top, [1,1]^\top$
이제 $\mathbf{y}_p = \mathbf{u}e^{3t}$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = 3\mathbf{u}e^{3t} = \mathbf{A}(\mathbf{u}e^{3t}) + [1,-3]^\top e^{3t}$ 이므로
$3u_1 = u_2 + 1, 3u_2 = u_1 - 3$ 을 풀면 $u_1 = 0, u_2 = -1$
그러므로 일반해는
$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-1, 2$이고
각각의 eigenvector은 $[1,1]^\top, [1, \frac{1}{4}]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = -\mathbf{u}\sin t + \mathbf{v}\cos t$
$= \mathbf{A}\mathbf{u}\cos t + \mathbf{A}\mathbf{v}\sin t + [10\cos t, 0]^\top$ 이므로
$-u_1 = 3v_1 - 4v_2, v_1 = 3u_1 - 4u_2 + 10$
$-u_2 = v_1 - 2v_2, v_2 = u_1 - 2u_2$을 연립해 풀면
$u_1 = -7, u_2 = -3, v_1 = 1, v_2 = -1$
그러므로 일반해는 $y_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 7\cos t + \sin t$
$y_2 = c_1e^{-t} + \frac{1}{4}c_2e^{2t} - 3\cos t - \sin t$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-4, 4$이고
각각의 eigenvector은 $[1,-7]^\top, [1,1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}\cos 3t + \mathbf{v}\sin 3t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = [\sin 3t, 3\cos 3t]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1e^{-4t} + c_2e^{4t} + \sin 3t$
$y_2 = -7c_1e^{-4t} + c_2e^{4t} + 3\cos 3t$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $2, 5$이고
각각의 eigenvector은 $[1,-2]^\top, [1,1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t$로 두고 특수해를 찾으면
일반해는 $y_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{5t} - 0.18 - 0.4t$
$y_2 = -2c_1e^{2t} + c_2e^{5t} + 0.32 + 0.6t$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 -1이고
eigenvector은 $[1,1]^\top$하나 뿐이다.
$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$인 $\mathbf{u}$를 찾으면 $\mathbf{u} = [-1, 0]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}e^t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = \mathbf{u}e^t = \mathbf{A}\mathbf{u}e^t + [0, e^t]^\top$ 로 부터
$-2u_1 + u_2 = u_1, -u_1 + 1 = u_2$ 을 풀면
$u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{3}{4}$
일반해는 $y_1 = e^{-t}(c_1 - c_2 + c_2 t) + \frac{1}{4}e^t$
$y_2 = e^{-t}(c_1 + c_2 t) + \frac{3}{4}e^t$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $4, -4$이고
각각의 eigenvector은 $[1,1]^\top, [1,-1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2$로 두고 특수해를 찾으면
$$\mathbf{y}_p' = \mathbf{v} + 2\mathbf{w}t = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}(\mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 - 16t^2 \end{bmatrix}$$ 으로부터

$v_1 = 4u_2, v_2 = 4u_1 + 2, 2w_1 = 4v_2, 2w_2 = 4v_1,$
$0 = 4w_2, 0 = 4w_1 - 16$ 을 풀면
$w_1 = 4, w_2 = 0, v_1 = 0, v_2 = 2, u_1 = u_2 = 0$
그러므로 일반해는 $y_1 = c_1e^{4t} + c_2e^{-4t} + 4t^2$
$y_2 = c_1e^{4t} - c_2e^{-4t} + 2t$
$y_1(0) = c_1 + c_2 = 3, y_2(0) = c_1 - c_2 = 1$ 으로부터
$c_1 = 2, c_2 = 1$

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $1, -1$이고
각각의 eigenvector은 $[1,1]^\top, [1,-1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}e^{2t}$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p'=2\mathbf{u}e^{2t}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}e^{2t} + \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}e^{2t}$ 으로부터
$2u_1 = u_2 + 6, 2u_2 = u_1 - 3$ 을 풀면 $u_1 = 3, u_2 = 0$
그러므로 일반해는 $y_1 = c_1e^t + c_2e^{-t} + 3e^{2t}$
$y_2 = c_1e^t - c_2e^{-t}$
$y_1(0)=c_1 + c_2 + 3 = 11, y_2(0)=c_1 - c_2 = 0$
으로부터$c_1 = c_2 = 4$
그러므로 해는 $y_1 = 8\cosh t + 3e^{2t}, y_2 = 8\sinh t$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $2, -4$이고
각각의 eigenvector은 $[4,1]^\top, [1,1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}\cosh t + \mathbf{v}\sinh t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p'=\mathbf{u}\sinh t + \mathbf{v}\cosh t$
$=\mathbf{A}(\mathbf{u}\cosh t + \mathbf{v}\sinh t) + \begin{bmatrix} 2\cosh t \\ \cosh t + 2\sinh t \end{bmatrix}$
cosh항은 $v_1 = 4u_1 - 8u_2 + 2, v_2 = 2u_1 - 6u_2 + 1$
sinh항은 $u_1 = 4v_1 - 8v_2, u_2 = 2v_1 - 6v_2 + 2$
연립해 풀면 $u_1=u_2=0, v_1=2, v_2=1$
그러므로 일반해는 $y_1 = 4c_1e^{2t} + c_2e^{-4t} + 2\sinh t$
$y_2 = c_1e^{2t} + c_2e^{-4t} + \sinh t$
$y_1(0)=4c_1 + c_2 = 0, y_2(0)=c_1 + c_2 = 0$
으로부터$c_1 = c_2 = 0$
그러므로 해는 $y_1 = 2\sinh t, y_2 = \sinh t$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $5i, -5i$이고
각각의 eigenvector은 $[1,i]^\top, [1,-i]^\top$
homogeneous equation 의 일반해는
$\mathbf{y} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}e^{5it} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}e^{-5it}$
$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1i - c_2i \end{bmatrix}\cos 5t + \begin{bmatrix} c_1i - c_2i \\ -c_1 - c_2 \end{bmatrix}\sin 5t$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t$로 두고 특수해를 찾으면 $\mathbf{y}_p = [3t, -4]^\top$
그러므로 일반해는 $y_1 = A\cos 5t + B\sin 5t + 3t$
$y_2 = B\cos 5t - A\sin 5t - 4$
$y_1(0)=A = 1, y_2(0) = B - 4 = -2$ 로 부터
해는 $y_1 = \cos 5t + 2\sin 5t + 3t$
$y_2 = 2\cos 5t - \sin 5t - 4$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $1, 2$이고
각각의 eigenvector은 $[1,-1]^\top, [4,-5]^\top$
equation의 우변에 있는 e^t가 homogeneous equation 의 해에 나타나므로 modification에 따라
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}te^t + \mathbf{v}e^t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = \mathbf{u}te^t + \mathbf{u}e^t + \mathbf{v}e^t$
$= \mathbf{A}\mathbf{u}te^t + \mathbf{A}\mathbf{v}e^t + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}e^t$로 부터
$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + [5,-6]^\top.$
$\mathbf{u}$는 $\mathbf{A}$의 eigenvector이므로 $\mathbf{u} = a[1,-1]^\top$꼴이고
$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v}=\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{v}=\mathbf{u}-\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-5 \\ -a+6 \end{bmatrix}$의
해가 있으려면 a는 $5(a-5) = -4(-a+6)$을 만족해야 하므로 $a = 1$ 이고 간단한 $\mathbf{v}$를 $\mathbf{v} = [1,0]^\top$으로 고르면 $\mathbf{y}_p = [te^t + e^t, -te^t]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1e^t + 4c_2e^{2t} + te^t + e^t$
$y_2 = -c_1e^t - 5c_2e^{2t} - te^t$
$y(0) = c_1 + 4c_2 + 1 = 19$
$y_2(0) = -c_1 - 5c_2 = -23$ 으로부터$c_1 = -2, c_2 = 5$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $2i, -2i$이고
각각의 eigenvector은 $[1,2i]^\top, [1,-2i]^\top$
homogeneous equation 의 일반해는
$\mathbf{y} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}e^{2it} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}e^{-2it}$
$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ 2c_1i - 2c_2i \end{bmatrix}\cos 2t + \begin{bmatrix} c_1i - c_2i \\ -2c_1 - 2c_2 \end{bmatrix}\sin 2t$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = [4\cos t, \sin t]^\top$
그러므로 일반해는 $y_1 = A\cos 2t + B\sin 2t + 4\cos t$
$y_2 = 2B\cos 2t - 2A\sin 2t + \sin t$
$y_1(0)=A + 4 = 5, y_2(0) = 2B = 2$ 로 부터
$A = B = 1$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $3, -1$이고
각각의 eigenvector은 $[2,1]^\top, [2,-1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = [t^2, -t]^\top$
그러므로 일반해는 $y_1 = 2c_1e^{3t} + 2c_2e^{-t} + t^2$
$y_2 = c_1e^{3t} - c_2e^{-t} - t$
$y_1(0) = 2c_1 + 2c_2 = 2$
$y_2(0) = c_1 - c_2 = -1$ 으로부터$c_1 = 0, c_2 = 1$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $6, 1$이고
각각의 eigenvector은 $[4,1]^\top, [1,-1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = [t^2 - 5, -t]^\top$
그러므로 일반해는 $y_1 = 4c_1e^{6t} + c_2e^t + t^2 - 5$
$y_2 = c_1e^{6t} - c_2e^t - t$
$y_1(0) = 4c_1 + c_2 - 5 = 0$
$y_2(0) = c_1 - c_2 = 0$ 으로부터$c_1 = c_2 = 1$

16. $\mathbf{v}$를 찾는 일차 연립방정식
$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$에서 해가 존재해야 하므로 a는 결정되지만, 행렬 $\mathbf{A} + 2\mathbf{I}$가 역행렬이 존재하지 않으므로 $\mathbf{v}$는 하나로 결정되지는 않는다.

17. 첫번째 회로에서$LI_1' + R_1(I_1 - I_2) = E$
두번째 회로에서 $(I_2 - I_1)R_1 + I_2R_2 + 1/C\int I_2 = 0$
두번째 식을 미분해서 정리하면

$(R_1+R_2)I_2' = -\frac{R_1^2}{L}I_1 + (\frac{R_1^2}{L} - \frac{1}{C})I_2 + \frac{E}{L}R_1$
이제 회로의 주어진 값들을 대입하면
$I_1' = -2I_1 + 2I_2 + 200$
$I_2' = -\frac{2}{5}I_1 + \frac{1}{5}I_2 + 40$
$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-0.9 \pm \sqrt{0.41}$
각각의 eigenvector은
$[2, 1.1+\sqrt{0.41}]^\top, [2, 1.1-\sqrt{0.41}]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}$로 두고 특수해를 찾으면 $\mathbf{y}_p = [100, 0]^\top$
그러므로 일반해는
$I_1 = 2c_1e^{(-0.9+\sqrt{0.41})t} + 2c_2e^{(-0.9-\sqrt{0.41})t} + 100$
$I_2 = (1.1+\sqrt{0.41})c_1e^{(-0.9+\sqrt{0.41})t}$
$\quad + (1.1-\sqrt{0.41})c_2e^{(-0.9-\sqrt{0.41})t}$

18. 방정식은
$I_1' = -2I_1 + 2I_2 + 440\sin t$
$I_2' = -\frac{2}{5}I_1 + \frac{1}{5}I_2 + 88\sin t$로 바뀐다.
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 352 \\ 44 \end{bmatrix}\cos t + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 616 \\ 132 \end{bmatrix}\sin t$

19. 17번 문제에서 $c_1 = 17.948, c_2 = -67.948$

20. 첫번째 회로에서$L_1I_1' + R_1(I_1 - I_2) + R_2I_1 = E$
두번째 회로에서 $L_2I_2' + R_1(I_2 - I_1) = 0$
회로의 주어진 값들을 대입하면
$I_1' = -3I_1 + \frac{5}{4}I_2 + 125,\ I_2' = I_1 - I_2$
$\begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{4} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}$
각각의 eigenvector은 $[1,2]^\top, [5,-2]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}$로 두고 특수해를 찾으면 $\mathbf{y}_p = \frac{500}{7}[1,1]^\top$
그러므로 일반해는
$I_1 = c_1e^{-\frac{1}{2}t} + 5c_2e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{500}{7}$
$I_2 = 2c_1e^{-\frac{1}{2}t} - 2c_2e^{-\frac{7}{2}t} + \frac{500}{7}$
$I_1(0) = c_1 + 5c_2 + \frac{500}{7} = 0, I_2(0) = 2c_1 - 2c_2 + \frac{500}{7} = 0$
을 풀면 $c_1 = -\frac{125}{3}, c_2 = -\frac{125}{21}$

Chapter3. Review

1. 일차의 경우를 예를 들면, nonhomogeneous linear system은 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$에서 $\mathbf{g}$가 $\mathbf{0}$이 아닌 방정식을 말하고, nonlinear system은 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$ 형태로 정리되지 않는 방정식을 말한다.

2. n차의 linear equation은 $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)}$로 두면 일차의 linear system으로 바꿀 수 있다.

3. linear system의 해 (y_1, y_2)의 자취를 trajectory, y_1-y_2평면을 phase plane이라 한다.

4. $y_1 = c_1, y_2 = c_2$가 해일 때, phase plane 의 점 (c_1, c_2)는 한점으로 이루어진 trajectory인데 이 점을 critical point라 한다. critical point는 계가 평형을 이루는 점이므로 그 점 주변의 해의 모양을 아는 것은 계를 이해하는데 매우 중요하다.

5. node:주변의 모든 trajectory가 (접선을 가지면서) 모두 들어오거나 모두 나가는 critical point.
saddle:두 방향의 들어오는 trajectory와 두 방향의 나가는 trajectory가 있는 critical point.
center:주변의 모든 trajectory가 closed curve인 critical point.
spiral:주변의 모든 trajectory가 (접선을 가지지 않으면서) 모두 들어오거나 모두 나가는 critical point.

6. stability는 평형점(critical point)이 얼마나 안정한가 하는 것을 말해준다.

7. $\mathbf{y}' = F(\mathbf{y})$형태의 nonlinear방정식에서 $F(\mathbf{y})$를 특정한 점 근처에서 $\mathbf{A}\mathbf{y}$로 근사해서 방정식을 푸는 것을 말한다.

8. undamped pendulum; $\theta'' + k\sin\theta = 0$
$\theta = 0$점 근처에서의 linearization:$\theta'' + k\theta = 0$
damped pendulum; $\theta'' + c\theta' + k\sin\theta = 0$
$\theta = 0$점 근처에서의 linearization:$\theta'' + c\theta' + k\theta = 0$

9. phase plane에 trajectory들을 그린 것을 말한다. undamped pendulum의 center들은 damped pendulum에서는 spiral로 바뀐다.

10. y의 크기가 작으면 negative damping(y'의 계수가 음수)이어서 에너지가 보충되고 y의 크기가 크면 positive damping(y'의 계수가 양수)이어서 운동이 방해를 받는 system 을 말한다. 예를 들어 Van der Pol equation; $y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$이 있고, 이 방정식의 phase portrait에서는 limit cycle 이 나타난다.

11. $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$방정식에서 $\mathbf{A}$의 eigenvalueλ와 eigenvector$\mathbf{x}$를 구하면, $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$는 해가 되므로.

12. $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$방정식에서 $\mathbf{A}$가 $n \times n$일 때 n개의 linear independent인 eigenvector $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(n)}$ 가 존재하면 이것을 basis of eigenvectors라 한다. 이것이 존재하면 그것에 대응되는 eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$에 대해, $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}^{(2)}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$은 방정식의 모든 해를 표현한다.

13. $\mathbf{A}$가 2×2일 경우 eigenvalue λ와 eigenvector $\mathbf{x}$가 하나만 존재하면 $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$인 $\mathbf{u}$를 찾아 일반해를 $c_1\mathbf{x}e^{\lambda t} + c_2(\mathbf{x}te^{\lambda t} + \mathbf{u}e^{\lambda t})$로 구할 수 있다.

14. saddle point 에서는 두방향의 나가는 trajectory와 두방향의 들어오는 trajectory가 있고 그 외의 trajectory들은 옆으로 지나간다. node 에서는 trajectory 들이 모두 들어오거나 모두 나간다.

15. 5절 문제 1번과 동일.

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-1, 6$
각각의 eigenvector은 $[1,-1]^\top, [4,3]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{6t}, y_2 = -c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{6t}$
$q = -6 < 0$ 이므로 saddle

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-5, 1$
각각의 eigenvector은 $[1,-1]^\top, [1,2]^\top$
일반해는 $y_1 = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t}, y_2 = -c_1 e^{-5t} + 2c_2 e^{t}$
$q = -5 < 0$ 이므로 saddle

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $\pm 2i$
각각의 eigenvector은 $[1,-i]^\top, [1,i]^\top$
일반해는 $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{2it} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-2it}$
$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -ic_1 + ic_2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} ic_1 - ic_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} \sin 2t$
$= \begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \sin 2t$
$p = 0, q = 4 > 0$ 이므로 center

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-4 \pm i$
각각의 eigenvector은 $[-2-i, 1]^\top, [-2+i, 1]^\top$
일반해는
$\mathbf{y} = e^{-4t} \left(c_1 \begin{bmatrix} -2-i \\ 1 \end{bmatrix} e^{it} + c_2 \begin{bmatrix} -2+i \\ 1 \end{bmatrix} e^{-it} \right)$
$= e^{-4t} \begin{bmatrix} -2(c_1+c_2) - i(c_1-c_2) \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} \cos t$
$+ e^{-4t} \begin{bmatrix} -2i(c_1-c_2) + c_1 + c_2 \\ c_1 i - c_2 i \end{bmatrix} \sin t$
$= e^{-4t} \left(\begin{bmatrix} -2A - B \\ A \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} -2B + A \\ B \end{bmatrix} \sin t \right)$
$p = -8, q = 17, \Delta = -4$ 이므로 stable spiral

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-1, -2$
각각의 eigenvector은 $[1,-2]^\top, [1,-3]^\top$
일반해는
$y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}, y_2 = -2c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t}$
$p = -3, q = 2; \Delta = 1$ 이므로 stable attractive node

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $5, -2$
각각의 eigenvector은 $[4,3]^\top, [1,-1]^\top$
일반해는
$y_1 = 4c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t}, y_2 = 3c_1 e^{5t} - c_2 e^{-2t}$
$q = -10 < 0$ 이므로 saddle

22. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $3, -1$
각각의 eigenvector은 $[2,1]^\top, [2,-1]^\top$
일반해는
$y_1 = 2c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-t}, y_2 = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}$
$q = -3 < 0$ 이므로 saddle

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 13 & -6 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $-1 \pm i$
각각의 eigenvector은 $[2, 5-i]^\top, [2, 5+i]^\top$
일반해는
$\mathbf{y} = e^{-t} \left(c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5-i \end{bmatrix} e^{it} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5+i \end{bmatrix} e^{-it} \right)$
$= e^{-t} \begin{bmatrix} 2(c_1+c_2) \\ 5(c_1+c_2) - i(c_1-c_2) \end{bmatrix} \cos t$
$+ e^{-t} \begin{bmatrix} 2i(c_1-c_2) \\ 5i(c_1-c_2) + c_1 + c_2 \end{bmatrix} \sin t$
$= e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 2A \\ 5A - B \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 2B \\ 5B + A \end{bmatrix} \sin t \right)$
$p = -2, q = 2, \Delta = -4$ 이므로 stable spiral

24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $1, -2$이고
각각의 eigenvector은 $[2,-1]^\top, [1,-2]^\top$
equation의 우변에 있는 e^t가 homogeneous equation의 해에 나타나므로 modification에 따라
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}te^t + \mathbf{v}e^t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = \mathbf{u}te^t + \mathbf{u}e^t + \mathbf{v}e^t$
$= \mathbf{A}\mathbf{u}te^t + \mathbf{A}\mathbf{v}e^t + [1,1]^\top e^t$로 부터
$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + [1,1]^\top$.
$\mathbf{u}$는 $\mathbf{A}$의 eigenvector이므로 $\mathbf{u} = a[2,-1]^\top$꼴이고
$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{u} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-1 \\ -a-1 \end{bmatrix}$의
해가 있으려면 a는 $-2(2a-1) = -a-1$을 만족해야 하므로 $a = 1$ 이고 간단한 $\mathbf{v}$를 $\mathbf{v} = [1,0]^\top$으로 고르면 $\mathbf{y}_p = [2te^t + e^t, -te^t]^\top$
일반해는 $y_1 = 2c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + 2te^t + e^t$
$y_2 = -c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t} - te^t$

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $1, -1$이고
각각의 eigenvector은 $[3,-1]^\top, [1,-1]^\top$
equation의 우변에 있는 e^{-t}가 homogeneous equation 의 해에 나타나므로 modification에 따라
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u}te^{-t} + \mathbf{v}e^{-t}$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p' = -\mathbf{u}te^{-t} + \mathbf{u}e^{-t} - \mathbf{v}e^{-t}$
$= \mathbf{A}\mathbf{u}te^{-t} + \mathbf{A}\mathbf{v}e^{-t} + [-2,0]^\top e^{-t}$로 부터
$-\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + [-2,0]^\top$.
$\mathbf{u}$는 $\mathbf{A}$의 eigenvector이므로 $\mathbf{u} = a[1,-1]^\top$꼴이고
$(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{u} - \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 \\ -a \end{bmatrix}$의
해가 있으려면 a는 $-(a+2) = -3a$을 만족해야 하므로 $a = 1$ 이고 간단한 $\mathbf{v}$를 $\mathbf{v} = [1,0]^\top$으로 고르면
$\mathbf{y}_p = [te^{-t} + e^{-t}, -te^{-t}]^\top$
일반해는 $y_1 = 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} + te^{-t} + e^{-t}$
$y_2 = -c_1 e^t - c_2 e^{-t} - te^{-t}$

26. homogeneous equation의 일반해는 문제 22번과 같다. $\mathbf{y}_p = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = [\cos t - \sin t, 0]^\top$

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $4, -4$
각각의 eigenvector은 $[1,-1]^\top, [1,1]^\top$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t + \mathbf{w}t^2$으로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{y}_p = [-1 - 8t^2, -4t]^\top$

일반해는 $y_1 = c_1e^{-4t} + c_2e^{4t} - 1 - 8t^2$
$y_2 = -c_1e^{-4t} + c_2e^{4t} - 4t$

28. $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - p\lambda + q = 0$에서 saddle 이라는 조건으로부터 $q < 0$이고 따라서 $\mathbf{A}$는 서로 다른 부호의 실수eigenvalue을 가진다. 그러므로 $\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$으로 대각화가 가능하다.
$\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$이므로 $\mathbf{A}^2$은
$p = \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0, q = \det(\mathbf{A}^2) = \lambda_1^2\lambda_2^2 > 0, \Delta = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1^2\lambda_2^2 = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \geq 0$ 이어서 unstable node.

29. $p = \lambda_1 + \lambda_2 = -1, q = \lambda_1\lambda_2 = -12$ 이므로saddle

30. 첫번째 회로에서 $5\int I_1 dt + I_1 - I_2 = 0$
두번째 회로에서 $I_2 - I_1 + \frac{5}{4}I_2' = 0$
첫번째 식을 미분해서 정리하면
$I_1' = -\frac{21}{5}I_1 - \frac{4}{5}I_2, I_2' = \frac{4}{5}I_1 - \frac{4}{5}I_2$
방정식의 행렬의 eigenvalue$-1, -4$
각각의 eigenvector은 $[1, -4]^\top, [4, -1]^\top$ 이므로
일반해는 $\mathbf{J} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}e^{-t} + c_2\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-4t}$
초기조건으로부터 $c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{3}$

31. 첫번째 회로에서 $R(I_1 - I_2) + LI_1' = E$
두번째 회로에서 $R(I_2 - I_1) + \frac{1}{C}\int I_2 dt = 0$
두번째 식을 미분해서 정리하면
$I_1' = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}(I_1 - I_2), I_2' = -\frac{R}{L}I_1 + (\frac{R}{L} - \frac{1}{RC})I_2 + \frac{E}{L}$
회로의 주어진 수치들을 대입하면 방정식은
$I_1' = -\frac{5}{2}I_1 + \frac{5}{2}I_2 + 169\sin t$
$I_2' = -\frac{5}{2}I_1 - \frac{15}{2}I_2 + 169\sin t$
$\mathbf{A} = \frac{5}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 -5이고 eigenvector은 $[1, -1]^\top$ 하나 뿐이다.
$(\mathbf{A} + 5\mathbf{I})\mathbf{u} = [1, -1]^\top$인 $\mathbf{u}$를 하나 찾으면 $[\frac{2}{5}, 0]^\top$
그러므로 homogeneous equation의 일반해는
$\mathbf{J} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{-5t} + c_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \end{bmatrix}\right)e^{-5t}$
$\mathbf{J}_p = \mathbf{u}\cos t + \mathbf{v}\sin t$로 두고 특수해를 찾으면
$\mathbf{J}_p = [-19\cos t + 62.5\sin t, 6\cos t + 2.5\sin t]^\top$
그러므로 일반해는
$I_1 = (c_1 + c_2t + \frac{2}{5}c_2)e^{-5t} - 19\cos t + 62.5\sin t$
$I_2 = -(c_1 + c_2t)e^{-5t} + 6\cos t + 2.5\sin t$
$I_1(0) = c_1 + \frac{2}{5}c_2 - 19 = 0$
$I_2(0) = -c_1 + 6 = 0$ 으로부터$c_1 = 6, c_2 = 32.5$

32. 문제 31의 formula에 주어진 수치들을 대입하면
$I_1' = -0.1I_1 + 0.1I_2 + 10, I_2' = -0.1I_1 - 0.9I_2 + 10$
위 행렬의 eigenvalue는 $-0.1127, -0.8873$
각각의 eigenvector은 $[1, -0.127]^\top, [1, -7.873]^\top$
$\mathbf{J}_p = \mathbf{u}$로 두고 특수해를 찾으면 $\mathbf{J}_p = [100, 0]^\top$.
일반해는 $I_1 = c_1e^{-0.1127t} + c_2e^{-0.8873t} + 100$
$I_2 = -0.127c_1e^{-0.1127t} - 7.873c_2e^{-0.8873t}$
초기조건으로부터 $c_1 = -101.6, c_2 = 1.64$

33. $y_1' = -\frac{9}{100}y_1 + \frac{4}{100}y_2$
$y_2' = \frac{9}{100}y_1 - \frac{9}{100}y_2$
방정식중 행렬의 eigenvalue은 $-0.03, -0.15$
각각의 eigenvector은 $[2, 3]^\top, [2, -3]^\top$
일반해는 $y_1 = 2c_1e^{-0.03t} + 2c_2e^{-0.15t}$
$y_2 = 3c_1e^{-0.03t} - 3c_2e^{-0.15t}$
$y_1(0) = 2c_1 + 2c_2 = 0, y_2(0) = 3c_1 - 3c_2 = 90$
으로부터$c_1 = 15, c_2 = -15$

34. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$의 eigenvalue은 $\pm i$
각각의 eigenvector은 $[1, i]^\top, [1, -i]^\top$
$\mathbf{y} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}e^{it} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}e^{-it}$
$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ ic_1 - ic_2 \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} ic_1 - ic_2 \\ -c_1 - c_2 \end{bmatrix}\sin t$
으로부터 homogeneous equation 의 일반해는
$\mathbf{y} = A\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_p$를 찾는 방법중
Undetermined coefficients method;
$\mathbf{y}_p = \mathbf{u} + \mathbf{v}t$로 두면
$\mathbf{y}_p' = \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v}t + [t, 0]^\top$ 이므로
$v_1 = u_2 + v_2t + t, v_2 = -u_1 - v_1t$ 로 부터
$v_2 = -1, v_1 = u_2 = 0, u_1 = 1,\ \mathbf{y}_p = [1, -t]^\top$

Variation of parameters method;
homogeneous equation의 basis는 $\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$이므로 $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$.
$\mathbf{u} = \int_0^t \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g}dt = \int_0^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}dt$
$= \int_0^t \begin{bmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{bmatrix}dt = \begin{bmatrix} t\sin t + \cos t - 1 \\ -t\cos t + \sin t \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_p = \mathbf{Y}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\sin t + \cos t - 1 \\ -t\cos t + \sin t \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ -t + \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$
Diagonalization method;
$\mathbf{A}$의 eigenvector가 $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ 이므로
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$에 대하여 $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$는 대각행렬이다. 실제로 $\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
$\mathbf{z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y}$로 두고 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{z}, \mathbf{y}' = \mathbf{X}\mathbf{z}'$를 방정식에 대입하면 $\mathbf{X}\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{z} + \mathbf{g}$
$\mathbf{X}^{-1}$을 양변에 곱하면 $\mathbf{z}' = \mathbf{D}\mathbf{z} + \mathbf{X}^{-1}\mathbf{g}$.
$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ 이고 방정식을 원소로 풀어쓰면 $\mathbf{z}_1' = i\mathbf{z}_1 + \frac{t}{2},\ \mathbf{z}_2' = -i\mathbf{z}_2 + \frac{t}{2}$
이제 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$에 대한 일차 linear equation을 풀면,
$(\mathbf{z}_1' - i\mathbf{z}_1)e^{-it} = (\mathbf{z}_1e^{-it})' = \frac{t}{2}e^{-it}$
$(\mathbf{z}_2' + i\mathbf{z}_2)e^{it} = (\mathbf{z}_2e^{it})' = \frac{t}{2}e^{it}$
$\mathbf{z}_1 = e^{it}\int \frac{t}{2}e^{-it}dt = \frac{1}{2}(it + 1)$

$\mathbf{z}_2 = e^{-it}\int \frac{t}{2}e^{it}dt = \frac{1}{2}(-it+1)$ 이므로

$\mathbf{y}_p = \mathbf{X}\mathbf{z} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} it+1 \\ -it+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t \end{bmatrix}$

세 방법의 결과는 일치하지만 첫번째 방법이 제일 간단하다.

35. $y_2 = 0, y_1 - y_1^3 = 0$ 을 풀면 critical point는 $(0,0),(1,0),(-1,0)$
(0,0)에서 $y_2' \approx y_1$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, q = -1 < 0$ 이므로 saddle
(1,0)에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 1$로 두면 $y_2' \approx -2\tilde{y_1}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, p = 0, q = 2 > 0$ 이므로 center
$(-1,0)$ 에서도 마찬가지로 center

36. $y_2 = 0, \ -\tan y_1 = 0$ 을 풀면 critical point는 $(n\pi, 0)$ (n은 임의의 정수).
$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{12}x^5 + \cdots$ 이므로
$(n\pi,0)$에서 $\tilde{y_1} = y_1 - n\pi$로 두면
$y_2' = -\tan y_1 = -\tan\tilde{y_1} \approx -\tilde{y_1}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, p = 0, q = 1 > 0$ 이므로 center

37. $-4y_2 = 0, \ \sin y_1 = 0$ 을 풀면 critical point는 $(2n\pi,0),(\pi+2n\pi,0)$ (n은 임의의 정수).
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$ 이므로
$(2n\pi,0)$에서 $\tilde{y_1} = y_1 - 2n\pi$로 두면
$y_2' = \sin y_1 = \sin\tilde{y_1} \approx \tilde{y_1}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, p = 0, q = 4 > 0$ 이므로 center
$(\pi+2n\pi,0)$에서 $\tilde{y_1} = y_1 - (\pi+2n\pi)$로 두면
$y_2' = \sin y_1 = \sin(\tilde{y_1}+\pi) = -\sin\tilde{y_1} \approx -\tilde{y_1}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, q = -4 < 0$ 이므로 saddle

38. $2y_2 + 2y_2^2 = 0, -8y_1 = 0$ 을 풀면 critical point는 $(0,0),(0,-1)$
(0,0)에서 $y_1' \approx 2y_2$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, p = 0, q = 16 > 0$ 이므로 center
$(0,-1)$에서 $\tilde{y_2} = y_2 + 1$로 두면 $y_1' \approx -2\tilde{y_2}$
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}, q = -16 < 0$ 이므로 saddle

CHAPTER 4

Series Solutions of Differential Equations. Special Functions

If a homogeneous linear differential equation has ***constant coefficients,*** it can be solved by algebraic methods, and its solutions are elementary functions known from calculus (e^x, cos x, etc.), as we know from Chap. 2. However, if such an equation has ***variable coefficients*** (functions of x), it must usually be solved by other methods. **Legendre's equation** (Sec. 4.3), the **hypergeometric equation** (Sec. 4.4), and **Bessel's equation** (Sec. 4.5) are very important equations of this type. Since these and other equations and their solutions play a basic role in applied mathematics, we devote an entire chapter to two standard methods of solution and their applications: the **power series method** (Secs. 4.1, 4.2), which yields solutions in the form of power series, and an extension of it, called the **Frobenius method** (Sec. 4.4).

The study of those solutions (and of other "higher" functions not discussed in calculus) is called the **theory of special functions.** Hence Chap. 4 will give the student a chance to become familiar with some of the methods in this area. This will include a discussion of **Sturm–Liouville theory** (Secs. 4.7, 4.8) based on **orthogonality of functions,** an idea whose significance to mathematical physics and its engineering applications can hardly be overestimated.

COMMENT. This chapter can also be studied directly after Chap. 2 because it uses no material from Chap. 3.

Prerequisite for this chapter: Chap. 2.
Sections that may be omitted in a shorter course: 4.2, 4.6–4.8.
References: Appendix 1, Part A.
Answers to problems: Appendix 2.

4.1. Power Series Method

1. 아래의 문제 1번에서 k대신 3인 경우
$y = a_0(1+3x+\frac{3^2}{2}x^2+\frac{3^3}{3!}x^3+\frac{3^4}{4!}x^4+\cdots) = a_0e^{3x}$

2. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$
$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$
$y' = ky$이므로 $a_1 = ka_0$, $a_2 = \frac{ka_1}{2} = \frac{k^2}{2}a_0$,
$a_3 = \frac{ka_2}{3} = \frac{k^3}{3!}a_0$, $a_4 = \frac{ka_3}{4} = \frac{k^4}{4!}a_0, \cdots$로 부터
$y = a_0(1+kx+\frac{k^2}{2}x^2+\frac{k^3}{3!}x^3+\frac{k^4}{4!}x^4+\cdots) = a_0e^{kx}$

3. 문제 2번에서 k대신 -2인 경우
$y = a_0(1-2x+\frac{(-2)^2}{2}x^2+\frac{(-2)^3}{3!}x^3+\frac{(-2)^4}{4!}x^4+\cdots)$
$= a_0e^{-2x}$

4. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$
$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$
$(1-x)y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$
$- a_1x - 2a_2x^2 - 3a_3x^3 + \cdots$
$y = (1-x)y'$ 이므로
$a_0 = a_1$, $a_1 = 2a_2 - a_1$, $a_2 = 3a_3 - 2a_2$,
$a_3 = 4a_4 - 3a_3, \cdots$ 으로 부터
$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$
$y = a_0(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = \frac{a_0}{1-x}$

5. $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots$
$y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\cdots$
$2xy = \quad 2a_0x+2a_1x^2+2a_2x^3+2a_3x^4+2a_4x^5+\cdots$
$y' = 2xy$ 이므로 $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$
$a_2 = a_0$, $a_4 = \frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}a_0$,
$a_6 = \frac{2}{6}a_4 = \frac{1}{3!}a_0, \cdots$ 로 부터
$y = a_0(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots) = a_0e^{x^2}$

6. $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$
$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$
$(1+x)y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$
$+ a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots$
$y = (1+x)y'$ 이므로
$a_0 = a_1$, $a_1 = 2a_2 + a_1$, $a_2 = 3a_3 + 2a_2$,
$a_3 = 4a_4 + 3a_3, \cdots$ 으로 부터
$0 = a_2 = a_3 = \cdots$, 그러므로 $y = a_0(1+x)$

7. $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots$
$y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\cdots$
$xy = \quad a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \cdots$
$y' = xy$ 이므로 $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$
$a_2 = \frac{1}{2}a_0$, $a_4 = \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}a_0$,
$a_6 = \frac{1}{6}a_4 = \frac{1}{8}\frac{1}{3!}a_0, \cdots$ 로 부터
$y = a_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}\frac{1}{3!}x^6 + \cdots) = a_0e^{\frac{1}{2}x^2}$

8. $y'' = ky$ 방정식;
$y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots$
$y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\cdots$
$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3$
$+ 6\cdot 5a_6x^4 + \cdots$
$y'' = ky$ 이므로 짝수항은 $a_2 = \frac{k}{2}a_0$,
$a_4 = \frac{k}{4\cdot 3}a_2 = \frac{k^2}{4!}a_0$, $a_6 = \frac{k}{6\cdot 5}a_4 = \frac{k^3}{6!}a_0, \cdots$
홀수항은 $a_3 = \frac{k}{3!}a_1$, $a_5 = \frac{k}{5\cdot 4}a_3 = \frac{k^2}{5!}a_1 \cdots$
그러므로 $y = a_0(1 + \frac{k}{2}x^2 + \frac{k^2}{4!}x^4 + \frac{k^3}{6!}x^6 + \cdots)$
$+ a_1(x + \frac{k}{3!}x^3 + \frac{k^2}{5!}x^5 + \cdots)$
$k = 2^2$인 경우이므로
$y = a_0(1 + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + \frac{1}{6!}(2x)^6 + \cdots)$
$+ \frac{a_1}{2}(2x + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 + \cdots)$
$= a_0 \cosh 2x + \frac{a_1}{2}\sinh 2x$

9. 문제 8번 풀이과정에서 $k = -3^2$인 경우이므로
$y = a_0(1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + \frac{1}{4!}(3x)^4 - \frac{1}{6!}(3x)^6 + \cdots)$
$+ \frac{a_1}{3}(3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + \frac{1}{5!}(3x)^5 - \cdots)$
$= a_0 \cos 3x + \frac{a_1}{3}\sin 3x$

10. $y' = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots$
$y'' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$
$y'' = y'$이므로 $a_1 = a_0$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}a_0$,
$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3!}a_0$, $a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{1}{4!}a_0, \cdots$로 부터
$y' = a_0(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots) = a_0e^x$
$y = a_0e^x + c$

11. $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots$
$y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\cdots$
$3x^2y = 3a_0x^2+3a_1x^3+3a_2x^4+3a_3x^5+3a_4x^6+\cdots$
$y' = 3x^2y$ 이므로 $0 = a_1 = a_4 = a_7 = \cdots$
$0 = a_2 = a_5 = a_8 = \cdots, a_3 = a_0$,
$a_6 = \frac{3}{6}a_3 = \frac{1}{2}a_0, a_9 = \frac{3}{9}a_6 = \frac{1}{3!}a_0, \cdots$ 로 부터
$y = a_0(1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3!}x^9 + \cdots) = a_0e^{x^3}$

12. 문제 8번 풀이과정에서 $k = 1$인 경우이므로
$y = a_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1^2}{4!}x^4 + \frac{1^3}{6!}x^6 + \cdots)$
$+ a_1(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1^2}{5!}x^5 + \cdots)$
$= a_0 \cosh x + a_1 \sinh x$

13. power series는 수렴반경을 생각하지 않으면 formal한 수열에 지나지 않는다.

4.2. Theory of the Power Series Method

1. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$이라 두면,
$$-2xy = \sum_{n=0}^{\infty} -2a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} -2a_{n-1}x^n$$
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{이고}$$
$y' = -2xy$ 이므로 각 계수들을 비교하면
$a_1 = 0, -2a_{n-1} = (n+1)a_{n+1} (n \geq 1)$ 로 부터
모든 홀수항 $a_1, a_3, a_5, \cdots$은 0이고 짝수항은 위의 점화식에 $n = 2k - 1$을 대입하면,

$a_{2k} = -\frac{1}{k}a_{2(k-1)}(k \ge 1)$을 만족한다.

$a_{2k} = -\frac{1}{k}a_{2(k-1)} = (-\frac{1}{k})(-\frac{1}{k-1})a_{2(k-2)}$

$= (-\frac{1}{k})(-\frac{1}{k-1})\cdots(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{1})a_0 = \frac{(-1)^k}{k!}a_0$

이제 $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_0\frac{(-1)^k}{k!}x^{2k}$

$= a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^k}{k!} = a_0e^{-x^2}$

2. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$,

$y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}$또는 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

$xy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$,

$(x-2)y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(na_n - 2(n+1)a_{n+1})x^n$

$(x-2)y' = xy$ 이므로 각 계수들을 비교하면,

$-2a_1 = 0, a_{n-1} = na_n - 2(n+1)a_{n+1}(n \ge 1)$

다시 쓰면,$a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{na_n - a_{n-1}}{2(n+1)}(n \ge 1)$

$a_2 = \frac{-a_0}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}a_0,\ a_3 = \frac{2a_2}{2\cdot 3} = -\frac{1}{12}a_0,$

$a_4 = \frac{3a_3 - a_2}{2\cdot 4} = 0,\ a_5 = \frac{4a_4 - a_3}{2\cdot 5} = \frac{1}{120}a_0,$

$a_6 = \frac{5a_5 - a_4}{2\cdot 6} = \frac{1}{288}a_0, \cdots$

이제 $y = a_0(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{288}x^6 + \cdots)$

3. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}$

$xy' - 3y = \sum_{n=0}^{\infty}(na_n - 3a_n)x^n = k$ 로 부터

$-3a_0 = k,\ na_n - 3a_n = 0(n \ge 1)$

그러므로 $a_0 = -\frac{k}{3},\ a_n = 0(n \ne 3)$

$y = -\frac{k}{3} + a_3x^3$

4. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}$

$x^2y' = \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n$

$(1-x^2)y' = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1})x^n$

$2xy = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}x^n$

$(1-x^2)y' = 2xy$ 이므로각 계수들을 비교하면

$a_1 = 0, (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = 2a_{n-1}(n \ge 1)$

다시쓰면 $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_{n-1}(n \ge 1)$

$y = a_0(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) = \frac{a_0}{1-x^2}$

5. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$

$y'' - 3y' + 2y =$

$\sum_{n=0}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} - 3(n+1)a_{n+1} + 2a_n)x^n.$

$y'' - 3y' + 2y = 0$ 이므로

$a_{n+2} = \frac{3}{n+2}a_{n+1} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}a_n(n \ge 0)$

$a_2 = \frac{3}{2}a_1 - a_0,\ a_3 = a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{7}{6}a_1 - a_0, \cdots$

$y = a_0 + a_1x + (\frac{3}{2}a_1 - a_0)x^2 + (\frac{7}{6}a_1 - a_0)x^3 + \cdots$

실제로는 $a_n = \frac{c_1 + c_2 2^n}{n!}$형태의 수열이 위의 점화식을 만족하므로 우리가 알고 있는 결과 $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$와 다르지 않다는걸 알 수 있다.

6. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ x^2y = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n,$

$(4x^2-2)y = \sum_{n=2}^{\infty}(4a_{n-2} - 2a_n)x^n - 2(a_0 + a_1x),$

$-4xy' = -4\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^n,$

$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$

$y'' - 4xy' + (4x^2-2)y$

$= 2a_2 + 6a_3x - 4a_1x - 2(a_0 + a_1x)$

$+ \sum_{n=2}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} - 4na_n + 4a_{n-2} - 2a_n)x^n$

$y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$이므로 $a_0 = a_2, a_1 = a_3,$

$a_{n+2} = \frac{(4n+2)a_n - 4a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}\ (n \ge 2).$

짝수항; $a_{2k} = b_k$로 두면,

$b_0 = b_1,\ b_{k+1} = \frac{(8k+2)b_k - 4b_{k-1}}{(2k+1)(2k+2)}(k \ge 1)$

로부터 $b_2 = \frac{1}{2}b_0,\ b_3 = \frac{1}{3!}b_0, \cdots$를 얻는다.

실제로 $b_k = \frac{b_0}{k!}$수열이 점화식을 만족한다.

홀수항; 마찬가지로 $a_{2k+1} = c_k$로 두면,

$c_0 = c_1, c_{k+1} = \frac{(8k+6)c_k - 4c_{k-1}}{(2k+2)(2k+3)}(k \ge 1)$

로부터 $c_2 = \frac{1}{2}c_0, b_3 = \frac{1}{3!}c_0, \cdots$를 얻는다.

그러므로$y = a_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots)$

$+ a_1(x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \cdots)$

$= (a_0 + a_1x)(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots) = (a_0 + a_1x)e^{x^2}$

7. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\ y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n.$

$y'' + 4y = \sum_{n=0}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} + 4a_n)x^n$

$y'' + 4y = 0$ 이므로,

$a_{n+2} = \frac{-4}{(n+2)(n+1)}a_n\ (n \ge 0)$

$n = 2k$ 경우;

$a_n = \frac{-4}{n(n-1)}a_{n-2} = \frac{-4}{n(n-1)}\frac{-4}{(n-2)(n-3)}a_{n-4}$

$= \cdots = \frac{(-4)^k}{n!}a_0$

짝수차항을 보면, $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!}x^{2k}$

$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = a_0 \cos 2x$

마찬가지로 $n = 2k+1$인 경우는 $a_n = \frac{(-4)^k}{n!}a_1$이므로 홀수차항을 보면,

$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}x^{2k+1} = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

$= \frac{a_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2x)^{2k+1} = \frac{a_1}{2}\sin 2x$

그러므로 $y = a_0 \cos 2x + \frac{a_1}{2}\sin 2x$

8. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

$(1-x^2)y'' = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n)x^n.$

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y =$

$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n)x^n.$

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ 이므로

$(n+1)a_{n+2} - (n-1)a_n = 0 \ (n \geq 0).$

$a_3 = \frac{0}{2}a_1 = 0$ 이므로 $0 = a_3 = a_5 = \cdots$

n이 짝수인 경우는

$a_n = \frac{n-3}{n-1}a_{n-2} = \frac{n-3}{n-1}\frac{n-5}{n-3}a_{n-4}$

$= \frac{n-3}{n-1}\frac{n-5}{n-3}\cdots\frac{1}{3}\frac{-1}{1}a_0 = \frac{-1}{n-1}a_0$

그러므로 $y = a_1 x + a_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 + \cdots)$

9. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$

$y' = ky$ 이므로 $(n+1)a_{n+1} = ka_n, a_n = \frac{k^n}{n!}a_0$

$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}t^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}(x-1)^n$

10. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}t^n$

$y'' = y$ 이므로 $a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$

n이 짝수이면 $a_n = \frac{a_0}{n!}$, n이 홀수이면 $a_n = \frac{a_1}{n!}$

$y = a_0(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots) + a_1(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots)$

$= a_0 \cosh t + a_1 \sinh t$

11. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$,

$(t+1)y' = \sum_{n=0}^{\infty}(na_n + (n+1)a_{n+1})t^n.$

$(t+1)y' = y + t + 1$ 이므로

$a_1 = a_0 + 1,\ a_1 + 2a_2 = a_1 + 1,$

$na_n + (n+1)a_{n+1} = a_n \ (n \geq 2)$ 로 부터

$a_n = -\frac{n-2}{n}a_{n-1} = (-\frac{n-2}{n})(-\frac{n-3}{n-1})a_{n-2}$

$= (-\frac{n-2}{n})(-\frac{n-3}{n-1})\cdots(-\frac{2}{4})(-\frac{1}{3})a_2 \ (n \geq 3).$

$a_2 = \frac{1}{2}$ 이므로 $a_n = (-1)^{n-2}\frac{1}{n(n-1)} (n \geq 2)$

$y = a_0 + (a_0+1)t + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n-1)}t^n$

$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$을 이용해 다시 쓰면,

$y = a_0(1+t) + t + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n}$

$= a_0(1+t) + t + t\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n}$

$= a_0(1+t) + t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^n$

$= a_0(1+t) + (t+1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}t^n$

$= a_0(1+t) + (t+1)\ln(1+t) = a_0 x + x\ln x$

12. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,\ y' = a_1 + 2a_2 x + \cdots$

$\frac{y}{x} + 1 = \frac{a_0}{x} + (a_1 + 1) + a_2 x + \cdots$

$y' = \frac{y}{x} + 1$이려면 상수항이 $a_1 = a_1 + 1$이어야 한다.

13. $|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{m!}{(m+1)!} = \frac{1}{m+1} \to 0$ 이므로

$|x^2| < \infty$, 즉 $|x| < \infty$

14. $|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{(m+2)(m+1)}{(m+1)m} = \frac{m+2}{m} \to 1$ 이므로 $|x| < 1$

15. $|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{3^m}{3^{m+1}} = \frac{1}{3}$ 이므로

$|x-3|^2 < 3$, 즉 $|x-3| < \sqrt{3}$

16. $|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = 1$ 이므로 $|x^4| < 1$, 즉 $|x| < 1$

17. $|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = |\frac{k^m}{k^{m+1}}| = \frac{1}{|k|}$ 이므로

$|x^2| < |k|$, 즉 $|x| < \sqrt{|k|}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m+1)!}$

$|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{(2m+1)!}{(2m+3)!} = \frac{1}{(2m+3)(2m+2)} \to 0$ 이므로

$|x^2| < \infty$, 즉 $|x| < \infty$

19. $|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{(\frac{2}{3})^{m+1}}{(\frac{2}{3})^m} = \frac{2}{3}$ 이므로 $|x^2| < \frac{3}{2}$, 즉 $|x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$

20. $\sqrt[m]{|a_m|} = \sqrt[m]{m^m} = m \to \infty$ 이므로수렴반경은 0

21. $\sqrt[m]{|a_m|} = \sqrt[m]{\frac{1}{2^m}} = \frac{1}{2}$ 이므로

$|x - x_0|^2 < 2$, 즉 $|x - x_0| < \sqrt{2}$

22. (a) $e^x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$

$(e^x)' = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s!} = e^x$

$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$

$(\cos x)' = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!} = -\sin x$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m,$$

$$(\frac{1}{1-x})' = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)x^s.$$

$(\frac{1}{1-x})^2 = (\sum_{m=0}^{\infty} x^m)^2 = \sum_{s=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{s} 1)x^s$이므로 $(\frac{1}{1-x})' = (\frac{1}{1-x})^2$

(b) $\cosh x + \sinh x =$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{(m)!} = e^x$$

(c) Series에 홀수승만 있으면 기함수이고 짝수승만 있으면 우함수,최소승이 x^{10}이면 함수를 x^{10}으로 나눈 함수도 0에서 연속이고,모든 계수가 양수면 양수구간에서는 함수값이 양수.

(d) Series로 표현된 함수의 주기나 boundedness를 Series표현으로부터 바로 보이는 것은 일반적으로 어렵다. 예를 들어
$$S(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$
$$C(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
로 주어진 함수의 boundedness를 보이려면 $S' = C, C' = -S$임을 보이고 이것을 이용해 $(S^2 + C^2)' = 2SC - 2CS = 0$임을 보여서 $S^2 + C^2 =$상수임을 보여야 한다.주기성을 보이는 것은 더 어려운데 일단 $C(x)$가 양수인 zero α가 있음을 보인 다음 4α가 주기임을 보이는 과정을 거쳐야 한다.

23. s대신 $m+1$을 대입하면, $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)(m+2)}{(m+1)^2+1}x^m$
$$|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{(m+2)(m+3)}{(m+1)(m+2)}\ \frac{(m+1)^2+1}{(m+2)^2+1} \to 1,\ |x| < 1$$

24. p대신 $m+2$을 대입하면, $\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)x^m$
$$|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{(m+3)(m+2)}{(m+2)(m+1)} \to 1,\ |x| < 1$$

25. n대신 $m-1$을 대입하면, $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^3}{(m+1)!}x^m$
$$|\frac{a_{m+1}}{a_m}| = \frac{1}{m+2}\ \frac{(m+1)^3}{m^3} \to 0,\ |x| < \infty$$

4.3. Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$

1. $n = 0$이면, $a_{s+2} = \frac{s}{s+2}a_s\ (s \geq 0)$
$s = 2k-1$일 때,
$$a_{2k+1} = \frac{2k-1}{2k+1}a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k+1}\frac{2k-3}{2k-1}a_{2k-3}$$
$$= \frac{2k-1}{2k+1}\frac{2k-3}{2k-1}\cdots\frac{3}{5}\frac{1}{3}a_1 = \frac{a_1}{2k+1}\ (k \geq 1)$$
그러므로 $y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$
$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots$ 이므로
$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$
$$= 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots) = 2y_2(x)$$

$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0$을 $z = y'$로 두고 풀면,
$$(1-x^2)z' - 2xz = 0,\ \frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{1-x^2},$$
$$\ln|z| = -\ln|1-x^2| + c,\ y' = \frac{c}{1-x^2} = \frac{c}{2}(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x})$$
$y = \frac{c}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} + c_1$, y_2는 $c = -1, c_1 = 0$인 경우이므로 두 결과가 일치한다.

2. $n = 1$이면, $a_{s+2} = \frac{s-1}{s+1}a_s\ (s \geq 0)$
$s = 2k$일 때,
$$a_{2k+2} = \frac{2k-1}{2k+1}a_{2k} = \frac{2k-1}{2k+1}\frac{2k-3}{2k-1}a_{2k-2}$$
$$= \frac{2k-1}{2k+1}\frac{2k-3}{2k-1}\cdots\frac{3}{5}\frac{1}{3}\frac{-1}{1}a_0 = \frac{-a_0}{2k+1}\ (k \geq 0)$$
그러므로 $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \cdots$

3. $n - 2m \geq 0$인 m에 대해서만 summation을 하면 된다. 예를 들어, $n = 2$이면 $m = 0$일 때의 $\frac{4!}{2^2 2!2!}x^2$과 $m = 1$일 때의, $-\frac{2!}{2^2}$만 더하면 된다.

4. $P_3(x)$를 예를 들면,
$$(1-x^2)P_3'' - 2xP_3' = (1-x^2)(15x) - x(15x^2 - 3)$$
$$= -30x^3 + 18x = -12(\frac{30}{12}x^3 - \frac{18}{12}x) = -12P_3$$

5. (1*)의 첫번째 summation에서 summation 지표 m 대신 $s+2$를 대입하면 $\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-2} = \sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s$가 됨을 이용하면, 3(b)식을 간단히 얻을 수 있다.

6. (11)에서 '1/(음의 정수)!'를 0으로 약속하면 불편한 M대신 n으로 쓸 수 있다.
$$(x^2-1)^n = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}(x^2)^{n-m}.$$
$$\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2m}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}(2n-2m)(2n-2m-1)$$
$$(2n-2m-2)\cdots(2n-2m-(n-1))\,x^{2n-2m-n}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{(2n-2m)!}{(2n-2m-n)!}x^{n-2m}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(2n-2m)!}{(n-2m)!}x^{n-2m}$$

$= 2^n n! P_n(x)$

7. $t = \frac{x}{a}$로 두면
$\frac{dy}{dt} = y'\frac{dx}{dt} = ay',\ \frac{d^2y}{dt^2} = a^2 y''$
이것을 방정식에 대입하면
$(a^2 - a^2t^2)\frac{1}{a^2}\frac{d^2y}{dt^2} - 2at\frac{1}{a}\frac{dy}{dt} + 12y = 0$
$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 12y = 0$
$n = 3$인 Legendre equation이므로
$y = c_1P_3(t) + c_2y_1(t) = c_1P_3(\frac{x}{a}) + c_2y_1(\frac{x}{a})$
(여기서 y_1은 p206 (6)에서 $n = 3$인 경우의 함수)

8. $\frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^3] = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{dx^3}(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)$
$= \frac{1}{2^3 3!}(6\cdot 5\cdot 4x^3 - 3\cdot 4! x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = P_3(x)$

9. p206 (4)에 의해
$|\frac{a_{s+2}}{a_s}| = \frac{(s-n)(s+n+1)}{(s+2)(s+1)} \to 1\ (s\to\infty)$

10. (a) 먼저 page208 (11)을 이용해 Legendre polynomial 이 점화식;
$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$
을 만족함을 증명하겠다.
$(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$
$= \sum_{m=0}^{n+1}(-1)^m \frac{(n+1)(2n+2-2m)!x^{n+1-2m}}{2^{n+1}m!(n+1-m)!(n+1-2m)!}$
$+ \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m \frac{n(2n-2-2m)!x^{n-1-2m}}{2^{n-1}m!(n-1-m)!(n-1-2m)!}$
$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{2(n+1-m)[(n+1)(2n+1-2m) - 2mn]}{2^{n+1}m!(n+1-m)!(n+1-2m)!}$
$\cdot (2n-2m)!x^{n+1-2m}$
$= \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{(2n+1)(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n+1-2m}$
$= (2n+1)xP_n(x)$.
다음 $\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)u^n \quad (*)$
중의 F_n이 같은 점화식을 만족함을 보이겠다.
(*)의 양변을 u로 미분하고 $1 - 2xu + u^2$을 곱하면
$\frac{x-u}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nF_nu^{n-1}(1 - 2xu + u^2)$.
(*)를 좌변에 대입하고 u의 power로 정리하면
$x\sum_{n=0}^{\infty}F_nu^n - \sum_{n=1}^{\infty}F_{n-1}u^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_{n+1}u^n$
$- 2x\sum_{n=1}^{\infty}nF_nu^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)F_{n-1}u^n$
이것으로부터 $n \geq 1$이면 F_n은 점화식;
$(n+1)F_{n+1} - (2n+1)xF_n + nF_{n-1} = 0$
을 만족함을 알 수 있다. 같은 점화식을 만족하고 (*)에 $u = 0$을 대입하면 $F_0(x) = 1 = P_0(x)$,(*)를 미분해서 $u = 0$을 대입하면 $F_1(x) = x = P_1(x)$이므로 $F_n = P_n\ (n \geq 0)$이다.

(b) (13)식에 $u = r_1/r_2, x = \cos\theta$를 대입.

(c)$x = 1$이면 (13)식의 좌변은 $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty}u^n$이므로 $P_n(1) = 1$.
$x=-1$이면 (13)식의 좌변은 $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^n$이므로 $P_n(-1) = (-1)^n$.
$x=0$이면 $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}u^{2n}$이므로
$P_{2n+1}(0) = 0$이고
$P_{2n}(0) = \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}$
$= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}$

(d) (a)의 증명과정 참조.

11. $u = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$로 두고 $y = uv, y' = u'v + uv', y'' = u''v + 2u'v' + uv''$를 방정식에 대입해서 정리하면
$(1-x^2)uv'' + \{(1-x^2)2u' - 2xu\}v'$
$+ \{[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]u + (1-x^2)u'' - 2xu'\}v = 0.$
여기에 $(1-x^2)u' = -mxu$, $(1-x^2)u'' - 2xu' = -m(u + x\frac{-mxu}{1-x^2})$를 대입하고 양변을 u로 나누면 (15)를 얻을 수 있다.

다음 수학적 귀납법으로 아래 명제를 증명하자.
"$F(x) = (1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u$를 m번 미분하면 $(1-x^2)(u^{(m)})'' - 2(m+1)x(u^{(m)})'$
$+ [n(n+1) - m(m+1)]u^{(m)}$이다."
$m=0$일 때는 당연히 참이고 m일 때 명제가 참이라면,
$F^{(m+1)} = \{(1-x^2)(u^{(m)})'' - 2(m+1)x(u^{(m)})'$
$+ [n(n+1) - m(m+1)]u^{(m)}\}'$
$=(1-x^2)(u^{(m+1)})'' - 2x(u^{(m)})''$
$- 2(m+1)x(u^{(m+1)})' - 2(m+1)(u^{(m)})'$
$+ [n(n+1) - m(m+1)]u^{(m+1)}$
$= (1-x^2)(u^{(m+1)})'' - 2x(m+2)(u^{(m+1)})'$
$+ [n(n+1) - (m+2)(m+1)]u^{(m+1)}$ 이므로
위의 명제는 참이다. 그러므로 Legendre equation의 해 u에 대해 $u^{(m)}$은 (15)의 해이다.

12. $P_1^1 = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_1' = \sqrt{1-x^2}$
$P_2^1 = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_2' = 3x\sqrt{1-x^2}$
$P_2^2 = (1-x^2)P_2'' = 3(1-x^2)$
$P_4^2 = (1-x^2)P_4'' = \frac{1}{2}(1-x^2)(105x^2 - 15)$

4.4. Frobenius Method

1. p, q가 $x=x_0$에서 analytic일때, 일반적으로 Power series method는 $y'' + py' + qy = 0$인 방정식에, Frobenius method는 $(x-x_0)^2y'' + (x-x_0)py' + qy = 0$인 방정식에 이용된다. Power series method에서 해의 수렴반경은 전개하는 점$x = x_0$에서 p, q의 가장 가까운 singular point까지의 거리보다는 크다. 그러므로 $x_0 = 2$에서 전개하면 수렴반경은 singular point 1까지의 거리 1 보다는 크다.

2. $x+1=t$로 두면 $t^2y''+ty'-y=0$ (Euler-Cauchy)
$r(r-1)+r-1=0$ 을 풀면 $r=\pm1$
$y_1=x+1, y_2=(x+1)^{-1}$

3. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$으로 두면
$x(1-x)y''+2(1-2x)y'-2y=$
$\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}$
$-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_mx^{m+r}$
$+2\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}$
$-4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_mx^{m+r}-2\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}.$
summation에서 $m=-1$일때,$r(r-1)a_0+2ra_0=0.$
$r^2+r=0$ 이므로$r=0,-1$(정수차이)

첫번째 해; $r=0$일 때,
$(m+1)ma_{m+1}-m(m-1)a_m+2(m+1)a_{m+1}$
$-4ma_m-2a_m=0.$
$(m+1)(m+2)a_{m+1}-(m^2+3m+2)a_m=0$
이므로 $a_{m+1}=a_m(m\ge0)$
그러므로 $y_1=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$

두번째 해; $r=-1$일 때,
$m(m-1)a_{m+1}-(m-1)(m-2)a_m+2ma_{m+1}$
$-4(m-1)a_m-2a_m=0.$
$m(m+1)a_{m+1}-(m^2+m)a_m=0$ 이므로
$a_{m+1}=a_m(m\ge1)$
그러므로 $y=\frac{1}{x}(a_0+a_1x(1+x^2+x^3+\cdots))$
$=\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{1-x}=\frac{a_0}{x}+a_1y_1$
y_1과 $\frac{1}{x}$가 linear independent이므로 $y_2=\frac{1}{x}$

$r=0,-1$이 정수차이이므로 이방법으로 구한 두번째 해가 첫번째 해와 linear dependent일 수 있다. 그러면, 2장 1절의 reduction of order방법을 이용해 y_2를 구해야 한다.

4. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$으로 두면
$4xy''+2y'+y=4\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}$
$+2\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{m+r}.$
summation에서 $m=-1$일때,$4r(r-1)a_0+2ra_0=0.$ 즉 $2r^2-r=0$ 이므로$r=0,\frac{1}{2}$ (정수차가 아님)

첫번째 해; $r=0$일 때,
$4(m+1)ma_{m+1}+2(m+1)a_{m+1}+a_m=0$
$a_{m+1}=-\frac{1}{(2m+2)(2m+1)}a_m\ (m\ge0)$
일반항을 구하면 $a_m=\frac{(-1)^m}{(2m)!}$
$y_1=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(\sqrt{x})^{2m}$
$=\cos\sqrt{x}$

두번째 해; 2장 1절 reduction of order 이용
$p=\frac{1}{2x},-\int pdx=-\frac{1}{2}\ln x$
$U=\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{2}\ln x}=\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$
$u=\int\frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}dx=\int\frac{2dt}{\cos^2t}$ ($\sqrt{x}=t$치환)
$=\tan t=\tan\sqrt{x}$. 그러므로 $y_2=uy_1=\sin\sqrt{x}$

5. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$으로 두면
$xy''+2y'+xy=\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}$
$+2\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}+\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r}.$
summation에서 $m=-1$일때,$r(r-1)a_0+2ra_0=0.$
$a_0\ne0$ 이므로$r^2+r=0$에서 $r=0,-1$ (정수차)

첫번째 해; $r=0$일 때,
$m=0$일 때, $2a_1=0$이고
$(m+1)ma_{m+1}+2(m+1)a_{m+1}+a_{m-1}=0\ (m\ge1)$
$a_{m+1}=-\frac{a_{m-1}}{(m+2)(m+1)}$ 이므로
홀수항은 모두 0, 즉 $0=a_1=a_3=a_5=\cdots$
짝수항은 $a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{(2k+1)2k}$ 이므로 일반항을 구하면
$a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_0$
$y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}=\frac{a_0}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$
$=\frac{a_0}{x}\sin x.$ 그러므로 $y_1=\frac{\sin x}{x}$

두번째 해; 2장 1절 reduction of order 이용
$p=\frac{2}{x},-\int pdx=-2\ln x$
$U=\frac{x^2}{\sin^2x}e^{-2\ln x}=\frac{1}{\sin^2x}$
$u=\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\cot x$
그러므로 $y_2=uy_1=-\cot x\frac{\sin x}{x}=-\frac{\cos s}{x}$

6. 문제 5번과 마찬가지 방법으로 구하거나,
$t=2x$로 두면,$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}y'$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{4}y''$
이것을 방정식에 대입하면 $t\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+ty=0$ 이므로 문제 5번의 방정식이 된다. 그러므로
$y_1=\frac{\sin t}{t}=\frac{\sin 2x}{2x},y_2=\frac{\cos t}{t}=\frac{\cos 2x}{2x}$

7. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^m$으로 두면
$xy''+(1-2x)y'+(x-1)y$
$=\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}$
$+\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}$

$$-2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}.$$
$m=-1$일때,$r(r-1)a_0+ra_0=0, r=0$

첫번째 해; $r=0$일 때,
$m=0$일 때, $a_1-a_0=0$이고
$(m+1)ma_{m+1}+(m+1)a_{m+1}-2ma_m$
$+a_{m-1}-a_m=0\ (m\geq 1)$
일반항을 구하면,
$(m+1)^2a_{m+1}-(2m+1)a_m+a_{m-1}=0$
$(m+1)^2a_{m+1}-(m+1)a_m-ma_m+a_{m-1}=0$
$(m+1)\{(m+1)a_{m+1}-a_m\}=ma_m-a_{m-1}$
$b_m=ma_m-a_{m-1}$이라 두면,$(m+1)b_{m+1}=b_m$
$b_1=0$ 이므로$b_m=ma_m-a_{m-1}=0$
$a_m=\frac{a_{m-1}}{m}$ 이므로$a_m=\frac{a_0}{m!}$
$$y_1=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=a_0e^x$$
두번째 해; 2장 1절 reduction of order 이용
$p=\frac{1}{x}-2, -\int pdx=-\ln x+2x$
$$U=\frac{1}{e^{2x}}e^{-\ln x+2x}=\frac{1}{x}$$
$u=\int\frac{1}{x}dx=\ln x$ 그러므로 $y_2=uy_1=e^x\ln x$

8. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$으로 두면
$xy''+2(1-x)y'+(x-2)y$
$$=\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}$$
$$+2\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}$$
$$-2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r}-2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}.$$
$m=-1$일때,$r(r-1)a_0+2ra_0=0, r=0,-1$

첫번째 해; $r=0$일 때,
$m=0$일 때, $2a_1-2a_0=0$이고
$(m+1)ma_{m+1}+2(m+1)a_{m+1}-2ma_m$
$+a_{m-1}-2a_m=0\ (m\geq 1)$
일반항을 구하면,
$(m+1)(m+2)a_{m+1}-2(m+1)a_m+a_{m-1}=0$
$(m+2)\{(m+1)a_{m+1}-a_m\}=ma_m-a_{m-1}$ 로
부터 $a_m=\frac{a_{m-1}}{m}$ 이므로$a_m=\frac{a_0}{m!}$
$$y_1=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=a_0e^x$$
두번째 해; 2장 1절 reduction of order 이용
$p=\frac{2}{x}-2, -\int pdx=-2\ln x+2x$
$$U=\frac{1}{e^{2x}}e^{-2\ln x+2x}=\frac{1}{x^2}$$
$u=\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}$ 그러므로 $y_2=uy_1=-\frac{e^x}{x}$

9. $x+2=t$로 두면 Euler-Cauchy equation.
$y_1=x+2,\ y_2=(x+2)^{-1}$

10. $x-1=t$로 두면 Euler-Cauchy equation.
$y_1=(x-1)^2,\ y_2=(x-1)^{-2}$

11. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$으로 두면
$2x(x-1)y''-(x+1)y'+y$
$=2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-2\sum_{m=-1}^{\infty}(m+$
$r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}$
$-\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}$
$m=-1$일 때, $-2r(r-1)a_0-ra_0=0, r=0,\frac{1}{2}$

첫번째 해; $r=0$일 때
$2m(m-1)a_m-2(m+1)ma_{m+1}-ma_m$
$-(m+1)a_{m+1}+a_m(m\geq 0)$
$-(m+1)(2m+1)a_{m+1}+(2m^2-3m+1)a_m=0$
$a_{m+1}=\frac{(2m-1)(m-1)}{(m+1)(2m+1)}a_m(m\geq 0)$
$a_1=a_0,\ 0=a_2=a_3=\cdots$, 그러므로 $y_1=1+x$

두번째 해; $r=\frac{1}{2}$일 때,
$2(m+\frac{1}{2})(m-\frac{1}{2})a_m-2(m+\frac{3}{2})(m+\frac{1}{2})a_{m+1}$
$-(m+\frac{1}{2})a_m-(m+\frac{3}{2})a_{m+1}+a_m\ (m\geq 0)$
$(m+\frac{3}{2})(2m+2)a_{m+1}=(2m^2-m)a_m(m\geq 0)$
$0=a_1=a_2=a_3=\cdots$, 그러므로 $y_2=\sqrt{x}$

12. $y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$으로 두면
$$xy''+y'-xy=\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r}$$
$$+\sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r}-\sum_{m=1}^{\infty}a_{m-1}x^{m+r}.$$
$m=-1$일 때,$r(r-1)a_0+ra_0=0,\ r=0$

첫번째 해; $r=0$일 때
$m=0$일 때 $a_1=0$이고,
$(m+1)ma_{m+1}+(m+1)a_{m+1}-a_{m-1}=0\ (m\geq 1)$
$a_{m+1}=\frac{1}{(m+1)^2}a_{m-1}$
홀수항은 모두 0,짝수항은 $a_{2k}=\frac{1}{(2k)^2}a_{2k-2}(k\geq 1)$
일반항을 구하면 $a_{2k}=\frac{a_0}{(2^k k!)^2}\ (k\geq 0)$
$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2^k k!)^2}$$
두번째 해; $r=0$이 중근이므로,
$y_2=y_1\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}a_m x^m$으로 두면
$xy_2''+y_2'-xy_2$
$$=xy_1''\ln x+2y_1'-y_1\frac{1}{x}+\sum_{m=1}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-1}$$

$$+ y_1' \ln x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$
$$- x y_1 \ln x - \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k x^{2k-1}}{(2^k k!)^2} + a_1 + 4a_2 x$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \{(m+1)^2 a_{m+1} - a_{m-1}\} x^m$$

상수항은 $a_1 = 0$, x의 계수는 $1 + 4a_2 = 0$
m이 짝수이면 $(m+1)^2 a_{m+1} - a_{m-1} = 0$ 이므로
$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$
$m = 2k - 1$이면
$(m+1)^2 a_{m+1} - a_{m-1} = -\frac{4k}{(2^k k!)^2} (k \geq 2)$
즉 $a_{2k} = \frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} - \frac{4k}{(2k)^2 (2^k k!)^2} (k \geq 2)$
$a_2 = -\frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{a_2}{4^2} - \frac{8}{4^2 8^2} = -\frac{3}{4^3 \cdot 2}$
$a_6 = \frac{a_4}{6^2} - \frac{12}{6^2 (2^3 3!)^2} = -\frac{11}{6^3 \cdot 4^3} \cdots$
$y_2 = y_1 \ln x - \frac{1}{4} x^2 - \frac{3}{4^3 \cdot 2} x^4 - \frac{11}{6^3 \cdot 4^3} x^6 + \cdots$

13. Euler Cauchy equation $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-3}$

14. $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$으로 두면

$$x^2 y'' + x^3 y' + (x^2 - 2) y$$
$$= \sum_{m=-2}^{\infty} (m+r+2)(m+r+1) a_{m+2} x^{m+r+2}$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r+2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2}$$
$$- 2 \sum_{m=-2}^{\infty} a_{m+2} x^{m+r+2}$$

$m = -2$일 때,$r(r-1)a_0 - 2a_0 = 0$, $r = -1, 2$

첫번째 해; $r = -1$일 때,
$m = -1$일 때 $-2a_1 = 0$이고
$(m+1) m a_{m+2} + (m-1) a_m + a_m - 2a_{m+2}$
$= 0 (m \geq 0)$ 정리하면 $a_{m+2} = -\frac{m}{(m-1)(m+2)} a_m$ 이므로 $0 = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots$
$y = x^{-1}\{a_0 + a_3(x^3 + \sum_{k=4}^{\infty} b_k x^k)\}$ 형태인데,
간단하게 $a_3 = 0$으로 잡으면, $y_1 = x^{-1}$

두번째 해; 2장 1절 reduction of order 이용
$p = x$, $-\int p dx = -\frac{x^2}{2}$

$$U = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\frac{x^2}{2})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!} x^{2k+2}$$
$$u = \int U dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k! (2k+3)} x^{2k+3}$$
$$y_2 = u y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k! (2k+3)} x^{2k+2}$$

15. $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$으로 두면

$$x y'' + 3y' + 4x^3 y$$
$$= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r+1)(m+r) a_{m+1} x^{m+r}$$
$$+ 3 \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r+1) a_{m+1} x^{m+r} + 4 \sum_{m=3}^{\infty} a_{m-3} x^{m+r}$$

$m = -1$일 때 $r(r-1)a_0 + 3r a_0 = 0$, $r = 0, -2$

첫번째 해; $r = 0$일 때, $m = 0, 1, 2$일 때는 각각
$3a_1 = 0, 2a_2 + 6a_2 = 0, 6a_3 + 9a_3 = 0$.
$(m+1) m a_{m+1} + 3(m+1) a_{m+1} + 4a_{m-3} = 0$.
$a_{m+1} = -\frac{4}{(m+3)(m+1)} a_{m-3}$ $(m \geq 3)$ 이므로
$a_{4k+4} = -\frac{1}{(2k+3)(2k+2)} a_{4k} (k \geq 0)$,
$a_{4k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_0$

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k} = x^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (x^2)^{2k+1}$$
$$= x^{-2} \sin(x^2)$$

두번째 해; 2장 1절 reduction of order 이용
$p = \frac{3}{x}$, $-\int p dx = -3 \ln x$
$U = \frac{x^4}{\sin^2(x^2)} \frac{1}{x^3} = \frac{x}{\sin^2(x^2)}$

$$u = \int \frac{x dx}{\sin^2(x^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{2} \cot(x^2)$$
$$y_2 = u y_1 = -\frac{1}{2} x^{-2} \cos(x^2)$$

16. (a) $x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby$

$$= \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r+1)(m+r) a_{m+1} x^{m+r}$$
$$- \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r}$$
$$+ c \sum_{m=-1}^{\infty} (m+r+1) a_{m+1} x^{m+r}$$
$$-(a+b+1) \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r} - ab \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}.$$

$m - 1$일 때, $r(r-1)a_0 + cra_0 = 0$ 으로부터
$r_1 = 0$, $r_2 = 1 - c$.

$r_1 = 0$일 때 ;
$(m+1) m a_{m+1} - m(m-1) a_m + c(m+1) a_{m+1}$
$- (a+b+1) m a_m - ab a_m = 0 \quad (m \geq 0)$.
$(m+1)(m+c) a_{m+1} - (m+a)(m+b) a_m = 0$.
$c \neq 0, -1, -2, \cdots$이면

$$a_{m+1} = \frac{(m+a)(m+b)}{(m+1)(m+c)} a_m (m \geq 0).$$

일반항은

$$a_{m+1} = \frac{(a+m)(b+m)}{(m+1)(c+m)} \frac{(a+m-1)(b+m-1)}{m(c+m-1)} \cdots \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} a_0$$

$a_0 = 1$로 두면 $m \geq 1$부터

$$a_m = \frac{a(a+1) \cdots (a+(m-1)) b(b+1) \cdots (b+(m-1))}{m! c(c+1) \cdots (c+(m-1))}$$

그러므로 (16)의 결과를 얻는다.

(b)a나 b가 음의 정수이면 a_m은 언젠가부터는 0이 된다.
또,$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \frac{(m+a)(m+b)}{(m+1)(m+c)} \to 1 \ (m \to \infty)$ 이므로
수렴반경은 $|x| < 1$.

(c) $F(-n,b,b;-x)$

$$= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-n)(-n+1)\cdots(-n+m-1)}{m!}(-x)^m$$
$$= 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-(m+1))}{m!}x^m$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{n}{m}x^m = (1+x)^n.$$

(위의 등식은 임의의 실수 n에 대해 성립한다.)

$nxF(1-n,1,2;x)$
$$= nx\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-n)(2-n)\cdots(m-n)}{m!(2+m-1)}x^m\right]$$
$$= nx-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)}{(m+1)!}(-x)^{m+1}$$
$$= nx-\sum_{m=1}^{\infty}\binom{n}{m+1}(-x)^{m+1}$$
$$= -\sum_{m=1}^{\infty}\binom{n}{m}(-x)^m = 1-(1-x)^n$$

$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots = xF(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};-x^2)$

$\arcsin x = x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7+\cdots$
$$= x(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot(2m-1)}{m!(2m+1)2^m}x^{2m}) = xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};x^2)$$

$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots = xF(1,1,2;-x)$

$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots) = 2xF(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};x^2)$

(d) $r_2 = 1-c$이면 (a)의 점화식에 m대신 $m+1-c$를 대입해서 점화식
$$(m+2-c)(m+1)a_{m+1}$$
$$-(m+1-c+a)(m+1-c+b)a_m = 0 \ (m \geq 0)$$
을 얻고 이것은 $r_1 = 0$인 경우에서 c,a,b대신 각각 $2-c, a-c+1, b-c+1$인 경우와 같으므로 $y_2 = x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; x)$.

(e) $x = \dfrac{t-t_1}{t_2-t_1}$이면,
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t_2-t_1}\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{(t_2-t_1)^2}\frac{d^2y}{dx^2},$$
$(t-t_1)(t_2-t_1) = x(x-1)(t_2-t_1)^2$,
$Ct+D = C[(t_2-t_1)x+t_1]+D$.
이것을 (18)에 대입하면,
$$(t-t_1)(t-t_2)\frac{d^2y}{dt^2}+(Ct+D)\frac{dy}{dt}+Ky$$
$$= x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+(Cx+\frac{Ct_1+D}{t_2-t_1})\frac{dy}{dx}+Ky.$$
그러므로 (15)에서 $-\dfrac{Ct_1+D}{t_2-t_1} = c, C = a+b+1$, $K = ab$인 경우이다.

17. $c = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$인 경우이고 c가 정수가 아니므로 문제 16의 y_1, y_2가 basis이다.
$$y = AF(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};x)+Bx^{\frac{1}{2}}F(\tfrac{3}{4},1,\tfrac{3}{2};x)$$
$$= A(1-x)^{-\frac{1}{4}}+Bx^{\frac{1}{2}}F(\tfrac{3}{4},1,\tfrac{3}{2};x)$$
(마지막 등호에서는 문제 16(c)의 결과를 이용했다.)

18. $c = 3, a = 2, b = 2$인 경우이므로 $y_1 = F(2,2,3;x)$. c가 정수가 아니지만 문제 16(d)의 점화식이 $(m-1)(m+1)a_{m+1}-m^2a_m = 0 \ (m \geq 0)$ 이므로 $0 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$이어서 $y_2 = x^{-2}$. y_1은 무한차, y_2는 -2차 이므로 y_1, y_2는 linear independent이어서 basis이다.
그러므로 $y = AF(2,2,3;x)+Bx^{-2}$

19. $c = \frac{1}{4}, a = -2, b = 1$인 경우이다.
$$y = AF(-2,1,\tfrac{1}{4};x)+Bx^{\frac{3}{4}}F(-\tfrac{5}{4},\tfrac{7}{4},\tfrac{7}{4};x)$$
$$= A(1-8x+\tfrac{32}{5}x^2)+Bx^{\frac{3}{4}}(1-x)^{\frac{5}{4}}$$

20. $c = \frac{1}{2}, a = -1, b = -2$인 경우이다.
$$y = AF(-1,-2,\tfrac{1}{2};x)+Bx^{\frac{1}{2}}F(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2};x)$$
$$= A(1+4x)+Bx^{\frac{1}{2}}F(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2};x)$$

4.5. Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$

1. $\nu = \frac{1}{3}, y = AJ_{\frac{1}{3}}(x)+BJ_{-\frac{1}{3}}(x)$

2. $\lambda x = z, y' = \lambda\dfrac{dy}{dz}, y'' = \lambda^2\dfrac{d^2y}{dz^2}$
$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\nu^2)y = 0$$
$$y = AJ_\nu(z)+BJ_{-\nu}(z) = AJ_\nu(\lambda x)+BJ_{-\nu}(\lambda x)$$
(ν가 정수가 아닐 때)

3. $x^2 = z, y' = 2x\dfrac{dy}{dz}, y'' = 2\dfrac{dy}{dz}+(2x)^2\dfrac{d^2y}{dz^2}$
$$z(2\frac{dy}{dz}+4z\frac{d^2y}{dz^2})+2z\frac{dy}{dz}+(4z^2-\tfrac{1}{4})y = 0$$
$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\tfrac{1}{4^2})y = 0$$
$$y = AJ_{\frac{1}{4}}(x^2)+BJ_{-\frac{1}{4}}(x^2)$$

4. $\sqrt{x} = z, y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{dy}{dz}, y'' = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{1}{4x}\dfrac{d^2y}{dz^2}$
$$4z^4(-\frac{1}{4z^3}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{4z^2}\frac{d^2y}{dz^2})+2z\frac{dy}{dz}+(z^2-\tfrac{1}{36})y = 0$$
$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\tfrac{1}{36})y = 0$$
$$y = AJ_{\frac{1}{6}}(\sqrt{x})+BJ_{-\frac{1}{6}}(\sqrt{x})$$

5. $9z(2\dfrac{dy}{dz}+4z\dfrac{d^2y}{dz^2})+18z\dfrac{dy}{dz}+(36z^2-16)y = 0$
$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(z^2-\tfrac{4}{9})y = 0$$
$$y = AJ_{\frac{2}{3}}(x^2)+BJ_{-\frac{2}{3}}(x^2)$$

6. $z^2(-\dfrac{1}{4z^3}\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{1}{4z^2}\dfrac{d^2y}{dz^2})+\dfrac{1}{2z}\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{1}{4}y = 0$
$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+z^2y = 0,\ y = J_0(\sqrt{x})$$

7. $y = u/x^2, y' = \frac{u'x-2u}{x^3}, y''=\frac{(u''x-u')x-3(u'x-2u)}{x^4}$
$\frac{u''x^2-4u'x+6u}{x^3} + \frac{5u'x-10u}{x^3} + \frac{u}{x} = 0$
$x^2u'' + xu' + (x^2-4)u = 0$
$u = J_2(x),\ y = x^{-2}J_2(x)$

8. $y = u\sqrt{x}, y' = u'\sqrt{x} + \dfrac{u}{2\sqrt{x}},$
$y'' = u''\sqrt{x} + \dfrac{u'}{\sqrt{x}} - \dfrac{u}{4x\sqrt{x}}$
$x^2(u''\sqrt{x} + \dfrac{u'}{\sqrt{x}} - \dfrac{u}{4x\sqrt{x}}) + \frac{1}{4}(x+\frac{3}{4})u\sqrt{x} = 0$
$x^2u'' + xu' + \frac{1}{4}(x-\frac{1}{4})u = 0$
$\sqrt{x} = z, u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{du}{dz}, u''=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{1}{4x}\dfrac{d^2u}{dz^2}$
$z^4(-\dfrac{1}{4z^3}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{1}{4z^2}\dfrac{d^2u}{dz^2}) + \dfrac{z}{2}\dfrac{du}{dz} + \dfrac{1}{4}(z^2-\dfrac{1}{4})u = 0$
$z^2\dfrac{d^2u}{dz^2} + z\dfrac{du}{dz} + (z^2-\dfrac{1}{4})u = 0$
$u = AJ_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + BJ_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})$
$y = \sqrt{x}\{AJ_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}) + BJ_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x})\}$

9. $y = x^{\frac{1}{3}}u, y' = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}u + x^{\frac{1}{3}}u'$
$y'' = -\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}}u + \frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}u' + x^{\frac{1}{3}}u''$
$81x^2y'' + 27xy' + (9x^{\frac{2}{3}}+8)y$
$= -18x^{\frac{1}{3}}u + 54x^{\frac{4}{3}}u' + 81x^{\frac{7}{3}}u'' + 9x^{\frac{1}{3}}u + 27x^{\frac{4}{3}}u'$
$+ (9x^{\frac{2}{3}}+8)x^{\frac{1}{3}}u = 0$
$x^2u'' + xu' + (\frac{1}{9}x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{81})u = 0$
$x^{\frac{1}{3}} = z, u'=\frac{1}{3}z^{-2}\dfrac{du}{dz}, u''=-\frac{2}{9}z^{-5}\dfrac{du}{dz} + \frac{1}{9}z^{-4}\dfrac{d^2u}{dz^2}$
방정식에 대입하면,
$-\dfrac{2}{9}z\dfrac{du}{dz} + \dfrac{1}{9}z^2\dfrac{d^2u}{dz^2} + \dfrac{z}{3}\dfrac{du}{dz} + (\frac{1}{9}z^2 - \frac{1}{81})u = 0$
$z^2\dfrac{d^2u}{dz^2} + a\dfrac{du}{dz} + (z^2-\frac{1}{9})u = 0$
$u = AJ_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}) + BJ_{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}})$
$y = x^{\frac{1}{3}}\{AJ_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}) + BJ_{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}})\}$

10. $y' = 3x^2u + x^3u', y'' = 6xy + 6x^2u' + x^3u''$
$x^2u'' + xu' + (x^2-9)u = 0$
$u = J_3(x),\ y = x^3J_3(x)$

11. (25)와 (27)에 의해 바로 증명된다.

12. $J_0'(x)= \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m}(m!)^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1}(m-1)!m!}$
$= \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}x^{2m+1}}{2^{2m+1}m!(m+1)!} = -J_1(x)$

13. $(xJ_1)' = xJ_0,\ xJ_1' + J_1 = xJ_0,\ J_1' = J_0 - x^{-1}J_1$

14. $|\dfrac{a_{m+1}}{a_m}| = \dfrac{2^{2m+n}m!(n+m)!}{2^{2m+2+n}(m+1)!(n+m+1)!}$
$= \dfrac{1}{2^2(m+1)(n+m+1)} \to 0\ (m\to\infty)$

15. (26)에서 $\nu = 1$일 때 $J_2(x) = 2x^{-1}J_1(x) - J_0(x)$

16. (12)에서 2차항까지만 생각하면 $J_0 \approx 1 - 0.25x^2$

17. (26)에 의해
$J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x), J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)$
둘을 결합하면 $J_3(x) = (\frac{8}{x^2}-1)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x)$

18. (12)의 무한급수에서 항과 항 사이의 크기의 비가
$\dfrac{x^{2(m+1)}/2^{2(m+1)}((m+1)!)^2}{x^{2m}/2^{2m}(m!)^2} = \dfrac{x^2}{2^2(m+1)^2}$ 이므로 $0 < x < 2$일 때는 $m = 0$부터 교대급수이다. 그러므로 Leibniz test에 의해서 $0 < x < 2$일 때는 $|J_0(x) - 1| \le x^2/2^2(1!)^2 < 1$이므로 $J_0(x)$는 양수이다.
다음 $2 \le x \le 8$일 때는 $m = 1$일 때부터 교대급수이므로,
$|J_0(2) - (1 - \dfrac{2^2}{2^2(1!)^2} + \dfrac{2^4}{2^4(2!)^2})| \le \dfrac{2^6}{2^6(3!)^2},$
$|J_0(\sqrt{8}) - (1 - \dfrac{8}{2^2(1!)^2} + \dfrac{8^2}{2^4(2!)^2} - \dfrac{8^3}{2^6(3!)^2})| \le \dfrac{8^4}{2^8(4!)^2}$이어서 $J_0(2)$는 양수이고 $J_0(\sqrt{8})$는 음수이다.
그러므로 $J_0(x)$의 첫번째 zero는 2와 $\sqrt{8}$사이에 존재한다.

19. (25)에서 $\nu-1$일 때, $(x^{-(\nu-1)}J_{\nu-1})' = -x^{-(\nu-1)}J_\nu$
(26)에 의해 $J_{\nu-1} = x^{-\nu}(x^\nu J_\nu)' = \nu x^{-1}J_\nu + J_\nu'$
첫번째 식에 대입하면,
$(\nu x^{-\nu}J_\nu + x^{-\nu+1}J_\nu')' = -x^{-(\nu-1)}J_\nu$
$-\nu^2J_\nu + \nu xJ_\nu' + (-\nu+1)xJ_\nu' + x^2J_\nu'' = -x^2J_\nu$
$x^2J_\nu'' + xJ_\nu' + (x^2-\nu^2)J_\nu = 0$

20. J_0 의 zero사이에는 Rolle의 정리에 의해 $J_0' = 0$인 점이 존재한다. (25)에 의해 $J_0' = -J_1$이므로 J_0의 zero 사이에는 J_1의 zero가 적어도 하나 존재한다. 다음 마찬가지로 (24)에 의해 $(xJ_1)' = xJ_0$ 이고 $xJ_1(x) = 0 \Leftrightarrow J_1(x) = 0$이므로 ($J_1(0) = 0$임) J_1의 연속된 zero사이에는 $xJ_0(x) = 0$인 점이 존재한다. $J_1(0) = 0$이고 J_1의 연속된 zero사이의 점이므로 이점은 0점이 아니다. 그러므로 이점에서 $J_0(x) = 0$이다.

21. x가 양수이면 $J_n(x) = 0$과 $x^{\pm n}J_n(x) = 0$은 동치. J_n의 zero 사이에는 Rolle 정리에 의해 $(x^{-n}J_n)' = 0$인 점이 존재한다. (25)에 의해 $(x^{-n}J_n)' = -x^{-n}J_{n+1}$이므로 $J_{n+1}(x)=0$인 점이 존재한다. 반대로 J_{n+1}의 zero 사이에는 (24)에 의해 $(x^{n+1}J_{n+1})' = x^{n+1}J_n$이므로 $J_n = 0$인 점이 존재한다. 그럼므로 J_n의 연속된 zero 사이에는 J_{n+1}의 zero가 꼭 하나만 존재한다.

22. 미분하면 (24)식이 된다.

23. 미분하면 (25)식이 된다.

24. 미분하면 (27)식이 된다.

25. $\int J_3(x)dx = \int J_1(x)dx - 2J_2(x)$ (문제 24,$\nu = 2$)
$\int J_1(x)dx = -J_0(x) + c$ (문제 23,$\nu = 0$)이므로

$\int J_3(x)dx = -J_0(x) - 2J_2(x) + c$

26. $\int x^2 J_1 dx = x^2 J_2 + c$ (문제 22,$\nu = 2$)
$\int xJ_0 dx = xJ_1 + c$ (문제 22,$\nu = 1$)
$\int x^3 J_0 dx = \int x^2(xJ_0)dx = x^2(xJ_1) - 2\int x^2 J_1 dx$
$= x^3 J_1 - 2x^2 J_2 + c$

27. $\int J_5(x)dx = \int J_3(x)dx - 2J_4(x)$ (문제 24,$\nu = 4$)
$\int J_3(x)dx = -J_0(x) - 2J_2(x) + c$ (문제 25)
$\int J_5 dx = -J_0(x) - 2J_2(x) - 2J_4(x) + c$

28. (a) 무게는 당연히 $W(x) = \rho g(L-x)$이고 x점 이하의 부분에 작용하는 힘은 접선방향의 장력 T와 무게 W이다.
수직방향의 움직임은 없으므로 장력T의 수직성분은 W와 같다. 그러므로 장력T와 무게 W의 합, 즉 T의 수평성분; $F(x) = W\tan\theta_x = Wu_x$
가 x점 이하의 부분에 작용하는 힘이다. (θ_x는 cable의 수직방향에 대한 u의 접선의 각도)

이제 작은 부분 Δx를 생각하면 Δx에 작용하는 힘은; $F(x) - F(x+\Delta x) \approx \Delta x F_x = \Delta x(Wu_x)_x$
이고 뉴턴 제 2법칙에 의해
$\rho\Delta x u_{tt} = \Delta x(Wu_x)_x$ 을 얻는다.
정리하면 $u_{tt} = g[(L-x)u_x]_x$.

x점마다 주기적인 운동이 예상되므로
$u(x,t) = y(x)\cos(\omega t + \delta)$로 두면,
$u_{tt} = -\omega^2 y(x)\cos(\omega t+\delta)$,
$g[(L-x)u_x]_x = g[-y' + (L-x)y'']\cos(\omega t+\delta)$이므로 $(L-x)y'' - y' + \lambda^2 y = 0$, $(\lambda^2 = \omega^2/g)$ 을 얻는다.

(b) $s = 2\lambda\sqrt{L-x}$ 로 두면,
$y' = \frac{dy}{ds}\cdot(-\frac{2}{s}\lambda^2)$, $y'' = \frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{4\lambda^2}{s^2} - \frac{dy}{ds}\cdot\frac{4\lambda^4}{s^3}$.
$(L-x)y'' - y' + \lambda^2 y = \lambda^2[\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dy}{ds} + y] = 0.$

$\nu = 0$인 Bessel 방정식이고 $s = 0$일 때 ($x = L$일 때) 연속이므로 $y(x) = J_0(s) = J_0(2\omega\sqrt{(L-x)/g})$.
(편의상 $x = L$일 때의 진폭을 1 로 가정했다.)

(c) $y(0) = 0$ 이므로$J_0(2\omega\sqrt{L/g}) = 0$이어야 한다. 그러므로 ω는 $2\omega\sqrt{L/g}$가 J_0의 zero가 되는 값이어야 한다.
$2\omega\sqrt{L/g}$가 J_0의 첫번째 zero (약 2.405)가 되는 ω에 대한 y를 첫번째 normal mode, 두번째 zero가 되는 ω에 대한 y를 두번째 normal mode, $\cdots$ 라 한다.
첫번째 normal mode 의 그래프는;
x가 0에서 L까지 증가하는 동안 $2\omega\sqrt{(L-x)/g}$는 J_0의 첫번째 zero 2.405에서 0으로 감소하므로 Fig 103의 그래프에서 2.405에서 0사이의 모양과 ($\sqrt{L-x}$때문에 똑같지는 않지만) 비슷하다. 마찬가지로 두번째 normal mode의 그래프는 J_0의 두번째 zero에서 0사이의 모양과 비슷하다.
cable의 길이가 2 meter일 때 첫번째 normal mode의 frequency는;
$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.405}{2\pi\cdot 2\sqrt{L/g}} = \frac{2.405}{4\pi\sqrt{2/9.8}} = 0.424$ [cycle/sec]
마찬가지로 10meter cable일 때는 0.19 [cycle/sec] .

29. $u''v + 2u'v' + uv'' + p(u'v + uv') + quv$
$= vu'' + (2v' + pv)u' + (v'' + pv' + qv)u$ 으로부터
$2v' + pv = 0, \frac{dv}{v} = -\frac{pdx}{2}$, $v = \exp(-\frac{1}{2}\int pdx)$
Bessel 방정식에서 $p = \frac{1}{x}$ 이므로$v = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = x^{-\frac{1}{2}}$
$vu'' + \left(v'' + \frac{1}{x}v' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})v\right)u$
$= x^{-\frac{1}{2}}u'' + (\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})x^{-\frac{1}{2}})u = 0$
$x^2u'' + (\frac{1}{4} + x^2 - \nu^2)u = 0$
$\nu = \frac{1}{2}$일 때, $u'' + u = 0$
$u = A\cos x + B\sin x$, $y = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\cos x + B\sin x)$
(29)(30)의 결과와 일치한다.

4.6. Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$

1. ν가 정수n인 경우 J_n과 J_{-n}은 linear dependent이므로 First kind Bessel함수로는 basis를 만들 수가 없다. 그래서 Second kind의 Bessel Function Y_n을 생각한다. J_n은 $x = 0$에서 연속이지만 Y_n은 $x = 0$에서 발산한다.

2. $n = 5$, $y = AJ_5(x) + BY_5(x)$

3. $5x = z, y' = 5\frac{dy}{dz}, y'' = 25\frac{d^2y}{dz^2}$
$4z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 4z\frac{dy}{dz} + (4z^2 - 9)y = 0$
$y = AJ_{\frac{3}{2}}(5x) + BJ_{-\frac{3}{2}}(5x)$

4. $y = u\sqrt{x}, y' = u'\sqrt{x} + \frac{u}{2\sqrt{x}}$,
$y'' = u''\sqrt{x} + \frac{u'}{\sqrt{x}} - \frac{u}{4x\sqrt{x}}$
$u''\sqrt{x} + \frac{u'}{\sqrt{x}} - \frac{u}{4x\sqrt{x}} + xu\sqrt{x} = 0$
$x^2u'' + xu' + (x^3 - \frac{1}{4})u = 0$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z, u' = x^{\frac{1}{2}}\frac{du}{dz}, u'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{dz} + x\frac{d^2u}{dz^2}$
$\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dz} + x^3\frac{d^2u}{dz^2} + x^{\frac{3}{2}}\frac{du}{dz} + (x^3 - \frac{1}{4})u = 0$
$(\frac{3}{2}z)^2\frac{d^2u}{dz^2} + (\frac{3}{2})^2 z\frac{du}{dz} + \left((\frac{3}{2}z)^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + (z^2 - \frac{1}{9})u = 0$
$u = AJ_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + BJ_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})$
$y = \sqrt{x}(AJ_{\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + BJ_{-\frac{1}{3}}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}))$

5. $u''\sqrt{x} + \frac{u'}{\sqrt{x}} - \frac{u}{4x\sqrt{x}} + x^2u\sqrt{x} = 0$
$x^2u'' + xu' + (x^4 - \frac{1}{4})u = 0$
$\frac{1}{2}x^2 = z, u' = x\frac{du}{dz}, u'' = \frac{du}{dz} + x^2\frac{d^2u}{dz^2}$

$x^4\frac{d^2u}{dz^2}+2x^2\frac{du}{dz}+(x^4-\frac14)u=0$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\frac{1}{4^2})u=0$
$u=AJ_{\frac14}(\frac12x^2)+BJ_{-\frac14}(\frac12x^2)$
$y=\sqrt{x}(AJ_{\frac14}(\frac12x^2)+BJ_{-\frac14}(\frac12x^2))$

6. $u''\sqrt{x}+\frac{u'}{\sqrt{x}}-\frac{u}{4x\sqrt{x}}+k^2xu\sqrt{x}=0$
$x^2u''+xu'+(k^2x^3-\frac14)u=0$
$\frac23kx^{\frac32}=z, u'=kx^{\frac12}\frac{du}{dz}, u''=\frac12kx^{-\frac12}\frac{du}{dz}+k^2x\frac{d^2u}{dz^2}$
$\frac12kx^{\frac32}\frac{du}{dz}+k^2x^3\frac{d^2u}{dz^2}+kx^{\frac32}\frac{du}{dz}+(k^2x^3-\frac14)u=0$
$(\frac32z)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(\frac32)^2z\frac{du}{dz}+((\frac32z)^2-\frac14)=0$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\frac19)u=0$
$u=AJ_{\frac13}(\frac23kx^{\frac32})+BJ_{-\frac13}(\frac23kx^{\frac32})$
$y=\sqrt{x}(AJ_{\frac13}(\frac23kx^{\frac32})+BJ_{-\frac13}(\frac23kx^{\frac32}))$

7. $u''\sqrt{x}+\frac{u'}{\sqrt{x}}-\frac{u}{4x\sqrt{x}}+k^2x^2u\sqrt{x}=0$
$x^2u''+xu'+(k^2x^4-\frac14)u=0$
$\frac12kx^2=z, u'=kx\frac{du}{dz}, u''=k\frac{du}{dz}+k^2x^2\frac{d^2u}{dz^2}$
$k^2x^4\frac{d^2u}{dz^2}+2kx^2\frac{du}{dz}+(k^2x^4-\frac14)u=0$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\frac{1}{4^2})u=0$
$u=AJ_{\frac14}(\frac12kx^2)+BJ_{-\frac14}(\frac12kx^2)$
$y=\sqrt{x}(AJ_{\frac14}(\frac12kx^2)+BJ_{-\frac14}(\frac12kx^2))$

8. $u''\sqrt{x}+\frac{u'}{\sqrt{x}}-\frac{u}{4x\sqrt{x}}+k^2x^4u\sqrt{x}=0$
$x^2u''+xu'+(k^2x^6-\frac14)u=0$
$\frac13kx^3=z, u'=kx^2\frac{du}{dz}, u''=2kx\frac{du}{dz}+k^2x^4\frac{d^2u}{dz^2}$
$k^2x^6\frac{d^2u}{dz^2}+3kx^3\frac{du}{dz}+(k^2x^6-\frac14)u=0$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\frac{1}{9\cdot4})u=0$
$u=AJ_{\frac16}(\frac13kx^3)+BJ_{-\frac16}(\frac13kx^3)$
$y=\sqrt{x}(AJ_{\frac16}(\frac13kx^3)+BJ_{-\frac16}(\frac13kx^3))$

9. $y=x^{\frac14}u, y'=\frac14x^{\frac{-3}{4}}u+x^{\frac14}u'$,
$y''=-\frac{3}{16}x^{\frac{-7}{4}}u+\frac12x^{\frac{-3}{4}}u'+x^{\frac14}u''$ 를 대입하면,
$-\frac{3}{16}x^{\frac14}u+\frac12x^{\frac54}u'+x^{\frac94}u''+\frac18x^{\frac14}u+\frac12x^{\frac54}u'$
$+\frac{1}{16}(x^{\frac12}+\frac{15}{16})x^{\frac14}u=0.$
$x^2u''+xu'+\frac{1}{16}(x^{\frac12}-\frac{1}{16})u=0.$
$x^{\frac14}=z, u'=\frac14x^{\frac{-3}{4}}\frac{du}{dz}, u''=-\frac{3}{16}x^{\frac{-7}{4}}\frac{du}{dz}+\frac{1}{16}x^{-\frac32}\frac{d^2u}{dz^2}.$
대입하면,
$-\frac{3}{16}x^{\frac14}\frac{du}{dz}+\frac{1}{16}x^{\frac12}\frac{d^2u}{dz^2}+\frac14\frac{du}{dz}+\frac{1}{16}(x^{\frac12}-\frac{1}{16})u=0.$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\frac{1}{16})u=0.$
$u=AJ_{\frac14}(x^{\frac14})+BJ_{-\frac14}(x^{\frac14}).$
$y=x^{\frac14}(AJ_{\frac14}(x^{\frac14})+BJ_{-\frac14}(x^{\frac14})).$

10. $y=x^\nu u, y'=\nu x^{\nu-1}u+x^\nu u'$,
$y''=\nu(\nu-1)x^{\nu-2}u+2\nu x^{\nu-1}u'+x^\nu u''.$
대입하면,
$\nu(\nu-1)x^\nu u+2\nu x^{\nu+1}u'+x^{\nu+2}u''$
$+(1-2\nu)(\nu x^\nu u+x^{\nu+1}u')+\nu^2(x^{2\nu}+1-\nu^2)x^\nu u=0$
$x^2u''+xu'+\nu^2(x^{2\nu}-\nu^2)u=0.$
다음, $x^\nu=z, u'=\nu x^{\nu-1}\frac{du}{dz}$,
$u''=\nu(\nu-1)x^{\nu-2}\frac{du}{dz}+(\nu x^{\nu-1})^2\frac{d^2u}{dz^2}$ 를 대입하면,
$\nu(\nu-1)x^\nu\frac{du}{dz}+\nu^2x^{2\nu}\frac{d^2u}{dz^2}+\nu x^\nu\frac{du}{dz}$
$+\nu^2(x^{2\nu}-\nu^2)u=0.$
$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{du}{dz}+(z^2-\nu^2)u=0.$
$u=AJ_\nu(x^\nu)+BY_\nu(x^\nu)$
$y=x^\nu(AJ_\nu(x^\nu)+BY_\nu(x^\nu))$

11. $Y_0(x)=\frac{2}{\pi}(\ln\frac12x+\gamma)+o(x)$임을 보이자.
page 230 (6)의 Y_0식에서 마지막 summation 항은 $o(x)$이고, $J_0(x)=1+O(x^2)$이므로 (O와 o의 정의는 $\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x}=0, \lim_{x\to0}\frac{O(x^2)}{x^2}=$상수)
$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}[(\ln\frac{x}{2}+\gamma)+O(x^2)(\ln\frac{x}{2}+\gamma)+o(x)]$로 쓸 수 있다. 그런데 $\lim_{x\to0}x\ln x=0$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{O(x^2)(\ln\frac{x}{2}+\gamma)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{O(x^2)}{x^2}x(\ln\frac{x}{2}+\gamma)=$상수$\cdot0=0$이어서 $O(x^2)(\ln\frac{x}{2}+\gamma)=o(x)$이다.
그러므로 $Y_0(x)=\frac{2}{\pi}(\ln\frac12x+\gamma)+o(x)$이다.
$\frac{2}{\pi}(\ln\frac12x+\gamma)=0$인 x를 구하면 $x\approx1.12$

12. $\sqrt{2/(\pi x)}\sin(x-\frac14\pi)=0$ 인 점을 구하면
$\pi/4=0.79, 5\pi/4=3.93, 9\pi/4=7.07$

13. $H_\nu^{(1)}$과 $H_\nu^{(2)}$ 이 linear independent임을 보이면 된다. $H_\nu^{(1)}=kH_\nu^{(2)}$라면, $J_\nu+iY_\nu=kJ_\nu-kiY_\nu$.
$(K-1)J_\nu-(k+1)iY_\nu=0$. 에서 J_ν, Y_ν는 linear independent이므로 $k-1=0,(k+1)i=0$, 모순.

14. $I'_\nu(x)=i^{-\nu+1}J'_\nu(ix), I''_\nu(x)=-i^{-\nu}J''_\nu(ix)$을
$(ix)^2J''_\nu(ix)+(ix)J'_\nu(ix)+((ix)^2-\nu^2)J_\nu(ix)=0$에 대입하면,
$-x^2(-i^\nu)I''_\nu(x)+ixi^{\nu-1}I'_\nu(x)+(-x^2-\nu^2)i^\nu I_\nu(x)=0.$
$x^2I''_\nu(x)+xI'_\nu(x)-(x^2+\nu^2)I_\nu(x)=0.$
(13)식은 5절의 (20)으로부터 나온다.

15. $I_\nu(x)$가 real임은 문제 14번 (13)으로부터 당연.
또 (13)식에서 $\nu>-1$일 때는 $\Gamma(m+\nu+1)>0$이므로 계수들이 모두 양수이어서 $I_\nu>0$이고 zero는 없는 것이 당연하다.
하지만 $\nu<-1$일 때는 zero 가 존재할 수도 있다. 예를 들어 $I_{-\frac32}$인 경우

$I_{-\frac32}=\frac{x^{-\frac32}}{2^{-\frac32}\Gamma(-\frac12)}+\frac{x^{\frac12}}{2^{\frac12}\Gamma(\frac12)}+\cdots$ 이므로

$$\lim_{x\to 0^+} I_{-\frac{3}{2}}(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{3}{2}}\Gamma(-\frac{1}{2})} = -\infty$$

(왜냐하면 $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi} < 0$)

$$\lim_{x\to\infty} I_{-\frac{3}{2}}(x) \geq \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} = \infty \text{ 이어서}$$

$I_{-\frac{3}{2}}(x_0) = 0$인 양수 x_0가 존재한다.

다음, 양이 아닌 정수에서 $1/\Gamma$함수값은 0 이므로

$$I_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m-n}}{2^{2m-n}m!\Gamma(m-n+1)}$$

$$= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{x^{2m-n}}{2^{2m-n}m!\Gamma(m-n+1)}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s+n}}{2^{2s+n}(s+n)!\Gamma(s+1)} \quad (m = s+n)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{2s+n}}{2^{2s+n}\Gamma(s+n+1)s!} = I_n(x).$$

16. I_ν와 $I_{-\nu}$가 해이고 homogeneous equation이므로 K_ν도 당연히 해가 된다.

4.7. Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions

1. Case 3;
$r(a) = 0$이고 y와 y'가 $x = a$에서 bounded 되어 있으므로 page236의 (8)에서 두번째 줄은 0이고 선형방정식 $\begin{pmatrix} y_n(b) & y_n'(b) \\ y_m(b) & y_m'(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = 0$가 영벡터가 아닌 해 $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$을 가지므로 행렬의 행렬식은 0이다
즉, $y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) = 0$이므로 (8)의 첫번째 줄도 0이다.
Case 4; Case 3과 마찬가지로 선형방정식이 0가 아닌 해를 가지므로 행렬식이 0이 되어 (8)의 첫번째 줄과 두번째 줄이 0이다.

2. $[rz_m']' + (q+\lambda p)z_m = c\{[ry_m']' + (q+\lambda p)y_m\} = 0$이고 z_m은 초기조건 (2)를 y_m과 마찬가지로 만족한다.

3. 아래 문제 5번에서 L이 1인 경우

4. $\lambda = -\nu^2$ $(\nu > 0)$ 일 경우;
일반해는 $y = c_1e^{\nu x} + c_2e^{-\nu x}$.
$y(0) = c_1 + c_2 = 0$, $y(L) = c_1e^{\nu L} + c_2e^{-\nu L} = c_1(e^{\nu L} - e^{-\nu L}) = 0$으로부터 $c_1 = c_2 = 0$이므로 음수인 eigenvalue은 없다.
$\lambda = 0$인 경우;일반해는 $y = c_1 + c_2x$이고 경계조건을 만족하는 c_1, c_2는 0뿐이므로 0은 eigenvalue가 아니다.
$\lambda = \nu^2$ $(\nu > 0)$일 경우;
일반해는 $y = A\cos\nu x + B\sin\nu x$
$y(0) = A = 0$, $y(L) = B\sin\nu L = 0$으로부터
$\nu L = \pi + n\pi$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$
그러므로 $\lambda = \left((\pi + n\pi)/L\right)^2$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$,
$y_n(x) = \sin\left((\pi + n\pi)x/L\right)$

$n \neq m$이라면,
$\frac{1}{L}\int_0^L y_ny_mdx = \int_0^1 \sin(\pi + n\pi)t \cdot \sin(\pi + m\pi)tdt$
$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left((n+m)\pi t\right) - \cos\left((n-m)\pi t\right)dt$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left((n+m)\pi t\right)}{(n+m)\pi} - \frac{\sin\left((n-m)\pi t\right)}{(n-m)\pi}\right]_0^1$$
$= 0$ 이므로 $\{y_n\}$은 orthogonal set.

5. $\lambda = -\nu^2$일 경우; 일반해는 $y = c_1e^{\nu x} + c_2e^{-\nu x}$.
$y(0) = c_1 + c_2 = 0$, $y'(L) = \nu c_1e^{\nu L} - \nu c_2e^{-\nu L} = \nu c_1(e^{\nu L} + e^{-\nu L}) = 0$으로부터 $c_1 = c_2 = 0$이므로 음수인 eigenvalue은 없다.
$\lambda = 0$인 경우;일반해는 $y = c_1 + c_2x$이고 경계조건을 만족하는 c_1, c_2는 0뿐이므로 0은 eigenvalue가 아니다.
$\lambda = \nu^2$ $(\nu > 0)$일 경우;
일반해는 $y = A\cos\nu x + B\sin\nu x$
$y(0) = A = 0$, $y'(L) = \nu B\cos\nu L = 0$으로부터
$\nu L = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$
그러므로 $\lambda = \left((\frac{\pi}{2} + n\pi)/L\right)^2$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$,
$y_n(x) = \sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)x/L\right)$

$n \neq m$이라면,
$\frac{1}{L}\int_0^L y_ny_mdx = \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)t \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + m\pi)tdt$
$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \cos\left((n+m+1)\pi t\right) - \cos\left((n-m)\pi t\right)dt$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left((n+m+1)\pi t\right)}{(n+m+1)\pi} - \frac{\sin\left((n-m)\pi t\right)}{(n-m)\pi}\right]_0^1$$
$= 0$ 이므로 $\{y_n\}$은 orthogonal set.

6. 4,5번과 마찬가지로 음수의 eigenvalue은 없다.
$\lambda = 0$일 경우 일반해는 $y = c_1 + c_2x$이고 경계조건을 만족하는 해는 $y = 1$이 존재한다.
$\lambda = \nu^2$ $(\nu > 0)$일 경우;
일반해는 $y = A\cos\nu x + B\sin\nu x$
$y(0) = y(2\pi)$로부터 $A = A\cos 2\pi\nu + B\sin 2\pi\nu$
$y'(0) = y'(2\pi)$로부터 $B\nu = -A\nu\sin 2\pi\nu + B\nu\cos 2\pi\nu$
첫번째에 A를 곱하고 두번째에 B를 곱해 변변 더하면, $A^2 + B^2\nu = A^2\cos 2\pi\nu + B^2\nu\cos 2\pi\nu$ 이므로
$\cos 2\pi\nu = 1$, $2\pi\nu = 2n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$
그러므로 eigenvalue은 $\lambda = n^2$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 이고, eigenfunction 는 $n = 0$일 때 $y_0 = 1$, $n \neq 0$일 때 $y_{n1} = \cos nx$, $y_{n2} = \sin nx$ 두가지씩이다.
또 $\int_0^{2\pi} y_{n1}y_{n2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2nxdx = 0$이고 4,5번과 마찬가지로 $n \neq m$일 때는 삼각함수의 곱을 합으로 바꾸는 formula를 이용하면 eigenfunction들이 orthogonal함을 보일 수 있다.

7. $x = e^t$, $\dfrac{dy}{dt} = e^ty' = xy'$
$$0 = (xy')' + \lambda x^{-1}y = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dt}) + \lambda e^{-t}y$$
$$= \frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} + \lambda e^{-t}y \text{ 으로부터} \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda y(t) = 0.$$
경계조건은 $y(0) = 0$, $\dfrac{dy}{dt}(1) = y'(e)e = 0$ 이므로

문제 5번에서 $L = 1$인 경우와 같다.
eigenvalue은 $\lambda = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^2$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$,
$y_n(x) = \sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\ln|x|\right)$

8. $y = e^{-x}u,\ y' = e^{-x}(u' - u)$.
$(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda+1)y = (e^{x}(u' - u))' + e^{x}(\lambda+1)u = e^{x}(u' - u + u'' - u') + e^{x}(\lambda+1)u = e^{x}u'' + e^{x}\lambda u$ 으로부터 $u'' + \lambda u = 0, u(0) = u(\pi) = 0$ 이므로 문제 4에서 $L = 1$인 경우와 같다.
$\lambda = n^2 (n = 1, 2, 3, \cdots), y_n(x) = e^{-x}\sin nx$

9. $(x^{-1}y')' + (\lambda+1)x^{-3}y = 0$
$x^{-1}y'' - x^{-2}y' + (\lambda+1)x^{-3}y = 0$
$x^2y'' - xy' + (\lambda+1)y = 0$ (Euler-Cauchy Eq.)
보조 방정식은 $m^2 - 2m + (\lambda+1) = 0,\ m = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$.
$\lambda = -\nu^2 (\nu > 0)$일 때, 일반해는 $y = c_1x^{1+\nu} + c_2x^{1-\nu}$,
$y(1) = c_1 + c_2 = 0, y(e) = c_1e^{1+\nu} + c_2e^{1-\nu} = 0$ 으로부터 $c_1 = c_2 = 0$이므로 음수의 eigenvalue은 없다.
$\lambda = 0$일 때, 일반해는 $y = (c_1 + c_2\ln x)x$,
$y(1) = c_1 = 0, y(e) = c_2e = 0$이므로 eigenvalue가 아니다.
$\lambda = \nu^2$ $(\nu > 0)$일 때, $m = 1 \pm \nu i$
일반해는 $y = x[A\cos(\nu\ln x) + B\sin(\nu\ln x)]$,
$y(1) = A = 0, y(e) = B\sin\nu = 0$ 으로부터
$\nu = n\pi(n = 1, 2, 3, \cdots)$
$\lambda = (n\pi)^2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, $y_n(x) = x\sin(n\pi\ln x)$

10. y'들이 example 1의 eigenfunction들이다.
$y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0$

11. y들이 문제 6번의 eigenfunction들과 유사하다.
$y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(2L), y'(0) = y'(2L)$

12. $\lambda = -k^2$ $(k > 0)$일 경우; 일반해는 $y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}$.
$y(0) = c_1 + c_2 = 0$,
$y(1) + y'(1) = c_1e^k(1+k) + c_2e^{-k}(1-k) = 0$.
$c_1 \neq 0$이라면 $e^{2k} = \frac{1-k}{1+k}$인데 $k > 0$이므로 좌변은 1보다 크고 우변은 1보다 작아서 이것을 만족하는k는 존재하지 않는다. 그러므로 음수의 eigenvalue은 없고 마찬가지로 0도 eigenvalue가 아니다.
$\lambda = k^2$ $(k > 0)$일 경우;
일반해는 $y = A\cos kx + B\sin kx$
$y(0) = A = 0$,
$y(1) + y'(1) = B\sin k + Bk\cos k = 0$ 으로부터
$k = -\sin k/\cos k = -\tan k$.
tan그래프를 그려보면 $\tan k = -k$ 의 m번째 양수해 k_m은 $\frac{\pi}{2} + m\pi + \delta_m$ $(\delta_m \to 0)$임을 알 수 있다.

13. $\displaystyle\int_{\frac{a-k}{c}}^{\frac{b-k}{c}} y_n(ct+k)y_m(ct+k)dt = \frac{1}{c}\int_a^b y_n(x)y_m(x)dx$
$= 0$ $(ct + k = x$ 치환 $)$

14. 문제 13에서 $a = -\pi, b = \pi, k = 0, c = \pi$인 경우

15. $\displaystyle\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx$
$= 0$ $(\cos\theta = x$ 치환 $)$

16. (a) $\arccos x = y$ 라 하면, $\cos y = x, (0 \le y \le \pi)$
$T_0 = \cos 0 = 1,\ T_1 = \cos(\arccos x) = x$,
$T_2 = \cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = 2x^2 - 1$,
$T_3 = \cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y = 4x^3 - 3x$.
$U_0 = \frac{\sin y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\sqrt{1-x^2}} = 1$,
$U_1 = \frac{\sin 2y}{\sqrt{1-x^2}} = 2\frac{\sin y\cos y}{\sqrt{1-x^2}} = 2U_0x = 2x$,
$U_2 = \frac{\sin 3y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin 2y\cos y + \cos 2y\sin y}{\sqrt{1-x^2}}$
$= U_1T_1 + T_2U_0 = 4x^2 - 1$,
$U_3 = \frac{\sin 4y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin 3y\cos y + \cos 3y\sin y}{\sqrt{1-x^2}}$
$= U_2T_1 + T_3U_0 = 8x^3 - 4x$.

$\arccos x = y, -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dy$ 치환에 의해
$\int_{-1}^{1}\cos(n\arccos x)\cdot\cos(m\arccos x)/\sqrt{1-x^2}dx$
$= \int_0^{\pi}\cos ny\cdot\cos my dy = 0$ $(n \neq m$일 때 $)$

(b) $L_1 = e^x(xe^{-x})' = e^x(1-x)e^{-x} = 1 - x$,
$L_2 = \frac{e^x}{2}(x^2e^{-x})'' = \frac{e^x}{2}(2 - 4x + x^2)e^{-x}$
$= 1 - 2x + x^2/2$,
$L_3 = \frac{e^x}{6}(x^3e^{-x})''' = \frac{e^x}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)e^{-x}$
$= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$.

$m < n$이면,
$\displaystyle\frac{d^m}{dx^m}(x^ne^{-x}) = \sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(x^n)^{(m)}(e^{-x})^{(m-r)}$
$\displaystyle = e^{-x}\sum_{r=0}^{m}a_mx^{n-m} = e^{-x}\cdot$(상수항이 0인 n차 함수)
이므로 $\frac{d^m}{dx^m}(x^ne^{-x})|_{x=0} = 0$.
또, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\text{정함수})}{e^x} = 0$ 이므로 $\left[\frac{d^m}{dx^m}(x^ne^{-x})\right]_0^{\infty} = 0$.
이제 Hint에 따라 부분적분하면, $(k < n$일 때 $)$
$\int_0^{\infty}e^{-x}x^kL_ndx = \frac{1}{n!}\int_0^{\infty}x^k\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})dx$
$= -\frac{k}{n!}\int_0^{\infty}x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^ne^{-x})dx$
$= \cdots = (-1)^k\frac{k!}{n!}\int_0^{\infty}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^ne^{-x})dx$
$= (-1)^k\frac{k!}{n!}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(x^ne^{-x})\right]_0^{\infty} = 0$

4.8. Orthogonal Eigenfunction Expansions

1. $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n \subset \{n$차 polynomial$\}$이고 P_n들은 orthogonal 로서 linear independent이므로 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n$은 $\{n$차 polynomial$\}$의 basis이다. 그러므로 $70x^4 - 84x^2 + 30$의 Fourier-Legendre Series는 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4로 이루어 진다.
$70x^4 - 84x^2 + 30 = \sum_{n=0}^{4}a_nP_n(x)$,

$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}(70x^4 - 84x^2 + 30)P_n(x)dx.$
$a_1 = a_3 = 0$ (왜냐하면 기함수의 적분이므로)
$a_0 = 16, a_2 = -16, a_4 = 16.$

2. $f(x) = -4P_0(x) + 2P_1(x) - 4P_2(x) + 8P_3(x)$

3. $f(x) = \frac{4}{5}P_0(x) - \frac{4}{7}P_2(x) - \frac{8}{35}P_4(x)$

4. $1 = P_0,\ x = P_1,\ x^2 = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2,$
$x^3 = \frac{3}{5}P_1 + \frac{2}{5}P_3,\ x^4 = \frac{1}{5}P_0 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{8}{35}P_4$

5. $\cos\frac{\pi}{2}x$가 우함수, P_{2k+1}은 기함수이므로 $a_{2k+1} = 0$.
$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x dx \approx 0.6366,$
$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx \approx -0.6871,$
$a_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)dx \approx 0.0518,$
$a_6 = \frac{13}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi}{2}x \cdot \frac{1}{48}(693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 15)dx \approx -0.0013,$

⋮

6. $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}e^x dx = \sinh 1 = 1.1752,$
$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}e^x \cdot x dx = \frac{3}{2}(x-1)e^x\big|_{-1}^{1} = 1.1036,$
$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}e^x \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx$
$= \frac{5}{4}\left[(3x^2-1)e^x\big|_{-1}^{1} - 6\int_{-1}^{1}xe^x dx\right]$
$= \frac{5}{4}\left[2(e - e^{-1}) - 6(x-1)e^x\big|_{-1}^{1}\right]$
$= 5\sinh 1 - 15e^{-1} = 0.3578,$

⋮

7. $a_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 x dx = \frac{1}{4},\ a_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 x \cdot x = \frac{1}{2},$
$a_2 = \frac{5}{2}\int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)dx = \frac{5}{16}$
$a_3 = \frac{7}{2}\int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)dx = \frac{7}{4}(1-1) = 0$
$a_4 = \frac{9}{2}\int_0^1 x \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)dx = -\frac{3}{32}$
$a_5 = \frac{11}{2}\int_0^1 x \cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)dx = 0$
$a_6 = \frac{13}{2}\int_0^1 x \cdot \frac{1}{48}(693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 15)dx$
$= \frac{13}{256}$

⋮

8. f가 우함수, P_{2k+1}은 기함수이므로 $a_{2k+1} = 0$.
$f(x) = 0.5P_0(x) - 0.9375P_2(x) + 0.5273P_4(x) + 0.1333P_6(x) - 0.4910P_8(x) + \cdots$

9. (c) $a_m = \frac{2}{J_1^2(\alpha_{m0})}\int_0^1 xJ_0(\alpha_{m0}x)dx$
$= \frac{2}{J_1^2(\alpha_{m0})}\frac{1}{\alpha_{m0}^2}\int_0^{\alpha_{m0}} tJ_0(t)dt$
$= \frac{2}{J_1^2(\alpha_{m0})}\frac{1}{\alpha_{m0}^2}[tJ_1(t)]_0^{\alpha_{m0}} = \frac{2}{\alpha_{m0}J_1(\alpha_{m0})}$

10. (a) 점화식 $He_{n+1} = xHe_n - He_n'$을 증명하자.
$He_n' = [(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}}]'$
$= (-1)^n(xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{-\frac{x^2}{2}})$
$= xHe_n - He_{n+1}.$
그러므로 $He_1 = x,\ He_2 = x^2 - 1,$
$He_3 = x(x^2-1) - 2x = x^3 - 3x,$
$He_4 = x(x^3 - 3x) - 3x^2 + 3 = x^4 - 6x^2 + 3$

(b) $e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)t^n$ 이면,
$a_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(e^{tx-\frac{t^2}{2}})\big|_{t=0}$
$= \frac{1}{n!}e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2})\big|_{t=0}.$
$x - t = z$으로 두면 ,
$n!a_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}}(-1)^n\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}}\big|_{z=x} = He_n(x)$

(c) $\frac{d}{dx}(e^{tx-\frac{t^2}{2}}) = te^{tx-\frac{t^2}{2}}$
$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n'(x)t^n.$
그러므로 $a_n' = a_{n-1},\ He_n' = nHe_{n-1}$

(d) (a)의 점화식에 의해 He_n은 n차 다항식이므로 $p(x)$는 다항식들이 증가하는 속도보다 더 빨리 0으로 가야 $\int_{-\infty}^{\infty}pHe_nHe_m dx$의 값이 유한하다.

$p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$이고 $n > m$이면,
$\int_{-\infty}^{\infty}pHe_nHe_m dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}He_m\frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})dx$
$= (-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}He_m'\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-\frac{x^2}{2}})dx$
$= (-1)^{n+1}m\int_{-\infty}^{\infty}He_{m-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-\frac{x^2}{2}})dx$
$= \cdots = (-1)^{n+m}m!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-\frac{x^2}{2}})dx = 0$

(e) 점화식은 (a) 참조.
$He_n'' = (xHe_n - He_{n+1})' = He_n + xHe_n' - He_{n+1}'$
$= He_n + xHe_n' - (n+1)He_n$
그러므로 $He_n'' - xHe_n' + nHe_n = 0.$

$w' = -\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}y + e^{-\frac{x^2}{4}}y' = -\frac{x}{2}w + e^{-\frac{x^2}{4}}y'.$
$w'' = -\frac{1}{2}w - \frac{x}{2}w' + (-\frac{x}{2}y' + y'')e^{-\frac{x^2}{4}}$
$= -\frac{1}{2}w - \frac{x}{2}(-\frac{x}{2}w + e^{-\frac{x^2}{4}}y') + (-\frac{x}{2}y' + y'')e^{-\frac{x^2}{4}}$
$= -\frac{1}{2}w + \frac{x^2}{4}w + (-xy' + y'')e^{-\frac{x^2}{4}}$
$= -\frac{1}{2}w + \frac{x^2}{4} - nw.$
그러므로 $w'' + (n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)w = 0$

11. 사실 4장7절 Theorem 1의 조건을 만족하는 eigen-function들은 orthogonal할 뿐만 아니라 complete하기도 하다. complete orthogonal set $\{f_n\}$을 얻으면, 임의의 함수f를 Series $f = \sum a_nf_n$으로 전개할 수 있는데, Series로 전개되면 f를 포함한 작업(예를 들어 f의 근사값이나 f를 우변으로 가진 미분방정식) 을 할 때 basis 함수 f_n들에대한 작업으로 분해하여 작업할 수 있다.

Chapter4. Review

1. 무한차 다항식을 power series라 한다. 형식적으로는 수열로 볼 수도 있고, 수렴반경이 있으면 함수가 된다. 다항식이므로 분수나 음수의 power는 가질 수 없지만,분수나 음수의 power를 series에 곱할 수는 있다.

2. Power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 는 수렴하게 되는 x들을 정의구역으로 하는 함수로 생각할 수 있다. 열린 집합의 정의 구역을 갖지 않으면 Power series 는 형식적인 수열에 지나지 않는다.

3. 찾는 함수를 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$로 두고 방정식을 만족하는 계수 a_n들을 구해 방정식을 푸는 방법을 Power series method라 한다. 미분방정식의 계수들이 해석적이면 일반적으로 적용할 수 있는 방법이므로 중요하고, 또 power series는 기초함수 외의 함수에 대한 표현수단이기 때문에 본질적으로 필요할 수 밖에 없다. power series 표현에서 그 함수의 성질을 바로 아는 것은 간단한 것을 제외하고는 일반적으로 어렵다. (예를 들어 zero라든가 주기성 등등)

4. Bessel 방정식이 Frobenius method를 적용하는 대표적이고 중요한 예이다.

5. 최고차 항의 계수를 1로 했을 때, 방정식의 계수가 해석적이면 해도 해석적이므로 power series method를 사용할 수 있는데, 계수가 해석적이진 않지만 정함수를 곱했을 때 해석적이 되는 정도라면, 음수의 power를 가진 power series를 사용하는 Frobenius method를 적용할 수 있다.

6. ν가 정수이면 $J_\nu, J_{-\nu}$만으로는 basis를 만들 수 없다.

7. 정함수도 당연히 power series이다. Legendre polynomial 이 power series method 로 찾은 정함수이다.

8. 일반적으로 $(x^2 + ax + b)y'' + (cx + b)y' + ky = 0$에서 y''의 계수가 서로 다른 두 근을 가질 때, 이 방정식의 해는 hypergeometric function으로 표현 할 수 있다.

9. indicial equation 이 정수차이가 아닌 두근을 가질 때 (예를 들어 ν가 정수가 아닌 Bessel 방정식), 정수차이인 두근을 가질 때 (ν가 정수인 Bessel 방정식), 그리고 중근을 가질 때 (ν가 0인 Bessel 방정식)

10. $S=\{f_0, f_2, \cdots, f_n\}$의 함수들이 orthogonal 하다면 $y = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$의 계수들은 $a_k = \int_a^b y f_k dx$로 구해진다. 즉 f_k와의 적분값으로 함수가 결정된다.

11. $(ry')' + (q + \lambda p)y = 0$과 경계조건 $k_1 y(a) + k_2 y(a) = 0, l_1 y(b) + l_2 y(b) = 0$를 만족하는 ($y \equiv 0$이 아닌) 해가 존재하는 λ와 그 해를 구하는 문제를 Sturm-Liouville problem 이라 한다. 이 problem 해들은 p에 대해 orthogonal하다.

12. Legendre equation $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$을 만족하고 서로 orthogonal하다. P_n에서 n이 짝수면 n차의 우함수, n이 홀수면 n차의 기함수이고, $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 은 n차 이하의 정함수들 집합의 basis이다. 또, complete 하기 때문에 Fourier-Legendre series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k$로 모든연속함수들을 표현할 수 있다.

13. J_n의 zero들을 $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \alpha_{3n}, \cdots$이라 하면; $J_n(\alpha_{1n}x), J_n(\alpha_{2n}x), J_n(\alpha_{3n}x), \cdots$들은 구간 $0 \le x \le 1$에서 $p = x$함수에 대해 orthogonal하다.

14. orthogonal set이 complete하다면 모든 연속함수들을 이 집합의 Fourier series로 표현할 수 있다.

15. Frobenius method 에서 $y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$으로 두고 미분방정식의 좌변에 대입해서 얻어지는 Series에서 '최저차항의 계수 =0' 인 방정식을 indicial equation 이라 한다. indicial equation은 복소수의 해를 가질 수도 있다. (예를 들어 Euler-Cauchy 방정식)

16. Euler-Cauchy eq. indicial eq : $m^2 + m - 6 = 0$
$m = 2, -3 \quad y_1 = (x-2)^2, y_2 = (x-2)^{-3}$

17. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$
$$y'' + \frac{1}{4}y = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+2} + \frac{1}{4}a_n\right)x^n$$
$$a_{n+2} = -\frac{1}{4(n+2)(n+1)}a_n \ (n \ge 0)$$
$n = 2k$ 경우는
$a_n = \frac{-1}{4n(n-1)}a_{n-2} = \frac{-1}{4n(n-1)}\frac{-1}{4(n-2)(n-3)}a_{n-4}$
$= \cdots = \frac{(-1)^k}{4^k n!}a_0$ 이므로 짝수차항을 보면,
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = a_0 \cos\frac{x}{2}$$
마찬가지로 $n = 2k+1$인 경우는 $a_n = \frac{(-1)^k}{4^k n!}a_1$이므로 홀수차항을 보면,
$$2a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = 2a_1 \sin\frac{x}{2}$$
그러므로 $y_1 = \cos\frac{x}{2}, \ y_2 = \sin\frac{x}{2}$

18. $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$
$$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y$$
$$= 2a_2 + 6a_3 x + 4a_1 x + 2(a_0 + a_1 x)$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)(n+2)a_{n+2} + 4na_n + 4a_{n-2} + 2a_n\right)x^n.$$
$y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$이므로
$a_0 = -a_2, a_1 = -a_3,$
$$a_{n+2} = -\frac{(4n+2)a_n + 4a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \ (n \ge 2).$$
짝수항; $a_{2k} = b_k$로 두면,
$$b_0 = -b_1, \ b_{k+1} = -\frac{(8k+2)b_k + 4b_{k-1}}{(2k+1)(2k+2)}(k \ge 1)$$
로부터 $b_2 = \frac{1}{2}b_0, \ b_3 = -\frac{1}{3!}b_0, \cdots$를 얻는다.

실제로 $b_k = (-1)^k \frac{b_0}{k!}$수열이 점화식을 만족한다.

그러므로 $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!}x^{2k} = e^{-x^2}$

홀수항; 마찬가지로 $a_{2k+1} = c_k$로 두면,

$c_0 = -c_1, c_{k+1} = -\frac{(8k+6)c_k + 4c_{k-1}}{(2k+2)(2k+3)} (k \geq 1)$

로부터 $c_2 = \frac{1}{2}c_0, b_3 = -\frac{1}{3!}c_0, \cdots$를 얻는다.

그러므로 $y_2 = xe^{-x^2}$

19. Euler-Cauchy eq. indicial eq : $m^2 - m + \frac{3}{16} = 0$
$m = \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \quad y_1 = (x+1)^{\frac{3}{4}}, y_2 = (x+1)^{\frac{1}{4}}$

20. 4.4절 문제 15번과 동일.

21. $\nu = \sqrt{3}$인 Bessel eq. $y_1 = J_{\sqrt{3}}(x), y_2 = J_{-\sqrt{3}}(x)$

22. 4.4절 문제 7번과 동일.

23. 4.4절 문제 6번과 동일.

24. $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$ 으로두면
$(x+1)x^2y'' - (2x+1)xy' + (2x+1)y$
$= \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r+1}$
$+ \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r+1}$
$- 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r+1}$
$- \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)a_{m+1}x^{m+r+1}$
$+ 2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r+1} + \sum_{m=-1}^{\infty}a_{m+1}x^{m+r+1}.$
$m = -1$일 때, $[r(r-1) - r + 1]a_0 = 0,\ r = 1$
첫번째 해 (r=1일 때) ;
$(m+1)ma_m + (m+2)(m+1)a_{m+1} - 2(m+1)a_m - (m+2)a_{m+1} + 2a_m + a_{m+1} = 0 \ (m \geq 0).$
$(m^2 - m)a_m + (m+1)^2 a_{m+1} = 0 \ (m \geq 0)$ 이므로
$0 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$ 이어서 $y_1 = x$
두번째 해;
$p = -\frac{2x+1}{(x+1)x} = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$
$U = \frac{1}{x^2}e^{-\int p dx} = \frac{1}{x^2}e^{\ln(x+1)+\ln x} = 1 + \frac{1}{x}$
$y_2 = y_1 \int U dx = x \int 1 + \frac{1}{x} dx = x^2 + x\ln x$

25. $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$ 으로두면
$(x^2+2x)y'' + (x^2-2)y' - (2x+2)y$
$= \sum_{m=-1}^{\infty}(m+r+1)(m+r)a_{m+1}x^{m+r+1}$
$+ 2\sum_{m=-2}^{\infty}(m+r+2)(m+r+1)a_{m+2}x^{m+r+1}$
$\sum_{m=0}^{\infty}a_m(m+r)x^{m+r+1}$
$- 2\sum_{m=-2}^{\infty}(m+r+2)a_{m+2}x^{m+r+1}$
$- 2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r+1} - 2\sum_{m=-1}^{\infty}a_{m+1}x^{m+r+1}.$
$m = -2$일 때, $[2r(r-1) - 2r]a_0 = 0,\ r = 0, 2$
첫번째 해 (r=2 일 때) ;
$m = -1$일 때, $2a_0 + 12a_1 - 6a_1 - 2a_0 = 0$이고,
$(m+3)(m+2)a_{m+1} + 2(m+4)(m+3)a_{m+2} + (m+2)a_m - 2(m+4)a_{m+2} - 2a_m - 2a_{m+1} = 0 \ (m \geq 0).$
정리하면, $a_1 = 0$이고,
$2(m+4)(m+2)a_{m+2} + (m+1)(m+4)a_{m+1} + ma_m = 0 \ (m \geq 0)$ 이므로
$0 = a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$ 이어서 $y_1 = x^2$
두번째 해 ;
$p = \frac{x^2-2}{x^2+2x} = 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x}$
$U = \frac{1}{x^4}\exp(\int \frac{2x+2}{x^2+2x} - 1dx) = \frac{1}{x^4}((x^2+2x)e^{-x})$
$= (x^{-2} + 2x^{-3})e^{-x} = -(x^{-2}e^{-x})'$
$y_2 = y_1 \int U dx = -e^{-x}$

26. $\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx dx$
$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x dx$
$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0 \ (n \neq m)$
Orthonormal set은 $\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ (n=1, 2 $\cdots$)

27. $\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sin n\omega x \sin m\omega x dx = \frac{1}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt$
$= \frac{-1}{2\omega}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)t - \cos(n-m)t dt = 0 \ (n \neq m)$
Orthonormal set은 $\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\sin n\omega x$ (n=1, 2 $\cdots$).

28. Legendre polynomial의 상수배로서 orthogonal.
Orthonormal set은
$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1), \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3-3x)$

29. $y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(\frac{\pi}{2}), y'(0) = y'(\frac{\pi}{2})$ 의 eigenfunction들로서 orthogonal 하다. Orthonormal set은
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cos 4nx, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin 4nx \quad (n=1, 2, 3\cdots)$

30. 4.7절 example 1 (page 234)과 동일.

31. 음수의 eigenvalue은 없다.
$\lambda = 0$일 경우 일반해는 $y = c_1 + c_2 x$이고 경계조건을 만족하는 해는 $y = 1$이 존재한다.
$\lambda = \nu^2$ ($\nu > 0$)일 경우;
일반해는 $y = A\cos\nu x + B\sin\nu x$
$y(0) = y(2L)$로부터 $A = A\cos 2L\nu + B\sin 2L\nu$
$y'(0) = y'(2L)$로부터 $B\nu = -A\nu\sin 2L\nu + B\nu\cos 2L\nu$
첫번째에 A를 곱하고 두번째에 B를 곱해 변변 더하면, $A^2 + B^2\nu = A^2\cos 2L\nu + B^2\nu\cos 2L\nu$ 이므로
$\cos 2L\nu = 1,\ 2L\nu = 2n\pi\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$
그러므로 eigenvalue은 $(\frac{n\pi}{L})^2$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 이고, eigenfunction 는 $n = 0$일 때 $y_0 = 1$, $n \neq 0$일 때 $y_{n1} = \cos\frac{n\pi}{L}x,\ y_{n2} = \sin\frac{n\pi}{L}x$ 두가지씩이다.

32. $\lambda = 0$일 때 Euler-Cauchy eq.이고 경계조건을 만족하는 해는 없다. $\lambda x = z$ $(\lambda > 0)$으로 치환하면,
$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - 1)y$
$= z^2\dfrac{d^2y}{dz^2} + z\dfrac{dy}{dz} + (z^2-1)y = 0.$
$\nu = 1$인 Bessel eq. 이고 $y(0) = 0$으로서 $x = 0$에서 연속이므로 $y(x) = J_1(\lambda x)$
$y(1) = 0$ 이므로 λ는 J_1의 양수 zero들.
그러므로 $\lambda = \alpha_{n1}$ (J_1의 n번째 양수 zero)이고 $y_n(x) = J_1(\alpha_{n1}x)$ $(n = 1, 2\cdots)$

33. $z = x + \frac{\pi}{2}$ 치환에 의해,
$\dfrac{d^2y}{dz^2} + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$
4.7절 example 1 (page 234)과 같은 형태이므로
$\lambda = \nu^2$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$, $y_\nu(z) = \sin \nu z$
그러므로 ν가 홀수일 때 $y_\nu(x) = \cos \nu x$, ν가 짝수일 때 $y_\nu(x) = \sin \nu x$

34. n차의 정식$f(x)$은 $\sum_{m=0}^{n} a_m P_m(x)$으로 표현된다. (여기서 $a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx$)
$x^5 = \frac{3}{7}P_1 + \frac{4}{9}P_3 + \frac{8}{63}P_5,$
$x^6 = \frac{1}{7}P_0 + \frac{10}{21}P_2 + \frac{24}{77}P_4 + \frac{16}{231}P_6$

35. 우함수이고 4차정식이므로 P_0, P_2, P_4의 계수만 구하면 된다. *Answer* : $8(P_0 - P_2 + P_4)$

36. 우함수이고 6차정식이므로 P_0, P_2, P_4, P_6의 계수만 구하면 된다. *Answer* : $-16P_6$

37. 4.6절 문제 6번에서 $k = 2$인 경우.
Answer : $y = \sqrt{x}\,[AJ_{\frac{1}{3}}(\frac{4}{3}x^{3/2}) + BJ_{-\frac{1}{3}}(\frac{4}{3}x^{3/2})]$

38. $2x = z, y' = 2\dfrac{dy}{dz}, y'' = 2^2\dfrac{d^2y}{dz^2}$
$z^2\dfrac{d^2y}{dz^2} + z\dfrac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2)y = 0$
$y = AJ_\nu(z) + BY_\nu(z) = AJ_\nu(2x) + BY_\nu(2x)$

39. 4.6절 문제 10번에서 $\nu = 2$인 경우.
Answer : $y = x^2\big(AJ_2(x^2) + BY_2(x^2)\big)$

40. $\nu = \frac{1}{4}$, $y = AJ_{\frac{1}{4}}(x) + BJ_{-\frac{1}{4}}(x)$

CHAPTER 5

Laplace Transforms

The Laplace transform method solves differential equations and corresponding initial and boundary value problems. The process of solution consists of three main steps:

1st step. The given "hard" problem is transformed into a "simple" equation **(subsidiary equation).**

2nd step. The subsidiary equation is solved by purely algebraic manipulations.

3rd step. The solution of the subsidiary equation is transformed back to obtain the solution of the given problem.

In this way Laplace transforms reduce the problem of solving a differential equation to an algebraic problem. This process is made easier by tables of functions and their transforms, whose role is similar to that of integral tables in calculus. Such a table is included at the end of the chapter.

This switching from operations of calculus to *algebraic* operations on transforms is called **operational calculus,** a very important area of applied mathematics, and for the engineer, the Laplace transform method is practically the most important operational method. It is particularly useful in problems where the mechanical or electrical driving force has discontinuities, is impulsive or is a complicated periodic function, not merely a sine or cosine. (For another operational method, the Fourier transform, see Sec. 10.10.)

The Laplace transform also has the advantage that it solves problems directly, initial value problems without first determining a general solution, and nonhomogeneous differential equations without first solving the corresponding homogeneous equation.

In this chapter we consider Laplace transforms from a practical point of view and illustrate their use by important engineering problems, many of them related to *ordinary* differential equations.

Partial differential equations can also be treated by Laplace transforms, as we show in Sec. 11.12.

Section 5.8 contains a list of general formulas and Sec. 5.9 a list of transforms $F(s)$ and corresponding functions $f(t)$.

Prerequisite for this chapter: Chap. 2.
Sections that may be omitted in a very short course: 5.4–5.6.
References: Appendix 1, Part A.
Answers to problems: Appendix 2.

5.1. Laplace Transform. Inverse Transform. Linerity. Shifting

1. $\mathcal{L}(2t+6) = 2\frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s}$

2. $\mathcal{L}(a+bt+ct^2) = a\frac{1}{s} + b\frac{1}{s^2} + c\frac{2}{s^3}$

3. $\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$

4. $\cos^2\omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$
$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos^2\omega t) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4\omega^2}$

5. $\mathcal{L}(e^{a-bt}) = e^a\frac{1}{s+b}$

6. $\mathcal{L}(e^t\cosh 3t) = \mathcal{L}(e^t\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{2})$
$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{4t}+e^{-2t}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+2})$

7. $\mathcal{L}(\sin(\omega t+\delta)) = \mathcal{L}(\sin\omega t\cos\delta + \cos\omega t\sin\delta)$
$= \cos\delta\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \sin\delta\frac{s}{s^2+\omega^2}$

8. $\mathcal{L}(\sin 2t + \cos 2t) = \mathcal{L}(\frac{\sin 4t}{2} = \frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

9. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
$= \int_0^1 e^{-st}(-t+1)dt$
$= \int_0^1 e^{-st}dt - \int_0^1 te^{st}dt$
$= -\frac{1}{s}(e^{-s}-1) - (-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s^2})$
$= \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{1}{s^2}$

10. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_1^4 ke^{-st}dt$
$= k(-\frac{1}{s}e^{-st}|_1^4) = k(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s})$

11. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^c ke^{-st}dt$
$= k(-\frac{1}{s}e^{-st}|_0^c)$
$= k(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sc}}{s})$

12. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^1 e^{-st}tdt + \int_1^2 e^{-st}(-t+2)dt$
$= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s}$

13. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^k e^{-st}ktdt$

14. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^1 e^{-st}tdt + \int_1^2 e^{-st}dt$

15. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^1 e^{-st}(-\frac{1}{2}+1)dt$

16. $\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^a e^{-st}\frac{b}{a}tdt$

17. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{0.1s+0.9}{s^2+3.24})$
$= \mathcal{L}^{-1}(\frac{0.1s}{s^2+3.4}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{0.9}{s^2+3.24})$
$= 0.1\cos(\sqrt{3.24}t) + \frac{0.9}{\sqrt{3.24}}\sin(\sqrt{3.24}t)$

18. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{5s}{s^2-25}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{5}{2}}{s+5} - \frac{\frac{5}{2}}{s-5})$
$= \frac{5}{2}(e^{-5t} - e^{5t})$

19. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{-s-2}{s^2-s-2}) = \mathcal{L}^{-1}(-\frac{4}{s-2} + \frac{3}{s+1})$
$= -4e^{2t} + 3^{-t}$

20. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s-4}{s^2-4}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{3}{2}}{s+2} - \frac{\frac{1}{2}}{s-2})$
$= \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

21. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{24}{s^4} - \frac{228}{s^6}) = \frac{24}{6}t^3 - \frac{228}{51}t^5$

22. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{60+6s^2+s^4}{s^7}) = \frac{60}{6!}t^6 + \frac{6}{4!}t^4 + \frac{1}{2}t^2$

23. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{L^2s^2+n^2\pi^2}) = \frac{1}{L^2}\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+(\frac{n\pi}{L})^2})$
$= \frac{1}{L^2}\cos(\frac{n\pi}{L}t)$

24. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1-7s}{(s-3)(s-1)(s+2)})$
$= \mathcal{L}^{-1}(-\frac{2}{s-3} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2})$
$= -2e^{3t} + e^t + e^{-2t}$

25. $\mathcal{L}^{-1}(\sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{s+k^2}) = \sum_{k=1}^5 a_k e^{-k^2t}$

26. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s^4+6s-18}{s^5-3s^4})$
$= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s-3} + \frac{6}{s^4-3s^3} - \frac{18}{s^5-3s^4})$
$= e^{3t} + \mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{2}{9}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4} - \frac{\frac{2}{9}}{s-3})$
$= e^{3t} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3}t - t^2 - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3}t + t^2 + t^3 - \frac{2}{9}e^{3t}$
$= \frac{2}{3}e^{3t} + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}t + t^3$

27. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{3})})$
$= \mathcal{L}^{-1}(-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{s+\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}{s-\sqrt{3}})$
$= -\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t}$

28. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1})$
$= \sin t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$

29. $\mathcal{L}(t^2e^{-3t}) = \frac{2}{(s+3)^3}$

30. $\mathcal{L}(e^{\alpha t}\cos\beta t) = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}\cos\beta tdt$
$= \int_0^\infty e^{(s+\alpha)t}\cos\beta tdt$

31. $\mathcal{L}(5e^{2t}\sinh 2t) = \mathcal{L}(5e^{2t}\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2})$
$= \mathcal{L}(\frac{5}{2}e^{4t} - \frac{5}{2})$
$= \frac{5}{3}\frac{1}{s-4} - \frac{5}{2}\frac{1}{s}$

32. $\mathcal{L}(2e^{-t}\cos^2\frac{1}{2}t) = \mathcal{L}(e^{-4}(1+\cos t))$
$= \frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$

33. $\mathcal{L}(\sinh t\cos t) = \mathcal{L}(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cos t)$
$= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^t\cos t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t}\cos t)$
$= \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$

34. $\mathcal{L}((t+1)^2e^t) = \mathcal{L}((t^2+2t+1)e^t)$
$= \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$

35. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)^2}) = e^{-t}t$

36. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{12}{(s-3)^4}) = e^{3t}t^3$

37. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{s^2+6s+18}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{3}{(s+3)^2+9})$

38. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{4}{s^2-2s-3}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{4}{(s-1)^2-4})$
$= e^t(e^{2t}-e^{-2t})$

39. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2+1}) = e^{-\frac{1}{2}t}\cos t$

40. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s^2+s+\frac{1}{2}}) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}})$
$= 4e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}t$

41. a) $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ 인데 $e^{-t} < e^t, t > 0$
$\Rightarrow \cosh t < e^t$

b)귀류법을 쓰면
$n = 0$일때 $1 < e^t, t > 0$이므로 성립
$n-1$ 때까지 가정하고 즉, $t^{n-1} < (n-1)!e^t$
$f(t) = n!e^t - t^n \Rightarrow f'(t) = n!e^t - nt^{n-1}$
$n((n-1)!e^t - t^{n-1}) > 0$이고 $f(0) = n! > 0$ 이면서 기울기가 양수이므로 $f(t)$는 항상 0보다 크다.

42. $\mathcal{L}^{-1}(F(s)+G(s))$,
where$\mathcal{L}(f(t)) = F(s), \mathcal{L}(g(t)) = G(s)$
$\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)))$
$= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f(t)+g(t)))$
$= f(t)+g(t)$
$= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \mathcal{L}^{-1}(G(s))$
$\mathcal{L}^{-1}(cF(s)) = \mathcal{L}^{-1}(x\mathcal{L}(f(t)))$
$= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(cf(t))) = ct(t) = c\mathcal{L}^{-1}(F(s))$

43. $\frac{1}{s} \Rightarrow 1$
$\frac{1}{s-a} \Rightarrow e^{at}$
$\frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow t^n$
$\frac{s}{s^2+\omega^2} \Rightarrow \cos\omega t$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow \sin\omega t$

44. $\mathcal{L}(f(ct)) = \int_0^\infty e^{-st}dt$
$t' = ct \Rightarrow \mathcal{L}(f(ct)) = \int_0^\infty e^{-\frac{s}{c}t'}f(t')\frac{1}{c}dt'$
$= \mathcal{L}(F(\frac{s}{c}))/c$
$\mathcal{L}(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$
$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{\frac{s}{\omega}}{(\frac{s}{\omega})^2+1}/\omega = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

45. $|f(t)| \le Me^{-kt}$를 만족하지 않는 함수, 즉, $f(t) = e^{t^2}$이면 적분이 발산하게 되어 Laplace 값이 ∞가 된다.

5.2. Transforms of Derivatives and Integrals. Differential Equations

1. $sY + 2Y = \frac{10}{s^2+1}$
$\Rightarrow Y = \frac{10}{(s+3)(s^2+1)}$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{-s+3}{s^2+1} + \frac{1}{s+3})$
$= -\cos t + 3\sin t + e^{-3t}$

2. $sY - 1 - 5Y = \frac{3}{2s+4}$
$Y = \frac{3}{(s-5)(2s+4)} + \frac{1}{s-5}$
$\Rightarrow y(t) = \frac{7}{6}e^{5t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$

3. $sY + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}Y = \frac{1}{100}\frac{1}{s}$
$100sY + 25 + 20Y = \frac{1}{s}$
$Y = \frac{1}{(100s+20)s} - \frac{25}{(100s+20)}$
$\Rightarrow y(t) - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{5}t} + \frac{1}{20} - \frac{1}{20}e^{-\frac{1}{5}t}$

4. $s^2Y - sy(0) - y'(0) - sY + y(0) - 2Y$
$= s^2Y - 8s - 7 - sY + 8 - 2Y$
$= (s^2 - s - 2)Y - 8s + 1$
$\Rightarrow Y = \frac{8s-1}{s^2-s-2}$
$\mathcal{L}^{-1}(Y) = y(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}$

5. $s^2Y - sy(0) - y'(0) + asY - ay(0) - 2a^2Y$
$= s^2Y - 6sasY - 6a - 2a^2Y$
$= (s^2 + as - 2a^2)Y - 6s - 6a$
$\Rightarrow Y = \frac{6s+6a}{(s+2a)(s-a)}$

$\mathcal{L}^{-1}(\frac{2}{s+2a}+\frac{4}{s-a}) = 2e^{-2at}+4e^{at}$

6. $s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y$
$= s^2Y - 3s - 4 + Y$
$= (s^2+1)Y - 3s - 4 = \frac{2s}{s^2+1}$
$Y = \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{3s+4}{s^2+1}$
$\Rightarrow y(t) = 3\cos t + (4+t)\sin t$

7. $s^2Y - sy(0) - y'(0) - 4sY + 3Y$
$= (s^2-4s+3)Y = \frac{6}{s^2} - \frac{8}{5}$
$Y = \frac{6}{(s-3)(s-1)s^2} - \frac{8}{(s-3)(s-1)s}$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{8}{3}}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{\frac{26}{9}}{s-1} + \frac{\frac{2}{9}}{s-3})$
$-\mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{4}{3}}{s-3} - \frac{4}{s-1} + \frac{\frac{8}{3}}{s})$
$\Rightarrow y(t) = \frac{8}{3} + 2t - \frac{26}{9}e^t + \frac{2}{9}e^{3t} - \frac{4}{3}e^{3t} + 4e^t + 4e^t - \frac{8}{3}$
$= 2t + \frac{10}{9}e^t + \frac{10}{9}e^{3t}$

8. $s^2Y - sy(0) + \frac{1}{25}Y$
$= s^2Y + 25s + \frac{1}{25}Y = \frac{1}{2}25s^3$
$(s^2+\frac{1}{25})Y = \frac{1}{25s^3} - 25s$
$Y = \frac{1}{25s^3(s^2+\frac{1}{25})} - \frac{25s}{s^2+\frac{1}{25}}$
$y(t) = -25 + \frac{1}{2}t^2$

9. $s^2Y - sy(0) - y'(0) + 25Y - 2y(0) - 3Y$
$= (s^2+2s-3)Y - 2s + 10 = \frac{6}{s+2}$
$Y = \frac{6}{(s+3)(s-1)(s+2)} + \frac{2s-10}{(s+3)(s-1)}$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{\frac{3}{2}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1} - \frac{2}{s+2}) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{4}{s+3} - \frac{2}{s-1})$
$\Rightarrow y(t) = \frac{11}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^t - 2e^{-2t}$

10. a) Laplace transform 은 미분방정식이 대수적인 방정식으로 바뀐다.
b) 정리 1,2 는 미분방정식이 대수식으로 바꾸는 역할을하고 정리 3은 Laplace 변환이나 역변환할때 도움을 준다.
c)
$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{st}f'(t)dt$
$= \int_0^a e^{-st}f'(t)dt + \int_a^\infty e^{-st}f'(t)dt$
$= fe^{-st}|_0^a + s\int_0^a e^{-st}f(t)dt + f^{-st}|_a^\infty + s\int_a^\infty e^{-st}f(t)dt$
$= s\mathcal{L}(f) + f(a-0)e^{-sa} - f(0) - f(a+0)e^{-sa}$
$= s\mathcal{L}(f) - f(0) - e^{-as}(f(a+0) - f(a-0))$
d)
$f(2+0) - f(2-0) = -1, f(0) = 0$
$\Rightarrow \mathcal{L}(f') = \frac{1-e^{-s}}{s}$
$\Rightarrow \mathcal{L}(f) = (1-e^{-s}-se^{-2s})/s^2$

11. a)
$\mathcal{L}(\cos^2 t) = \mathcal{L}(1-\sin^2 t) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s(s^2+4)}$
b)
$f(t) = \cos^2 t, f(0) = 1,$
$f'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin 2t$
$\mathcal{L}(f') = -\mathcal{L}(\sin 2t) = -\frac{2}{s^2+4}$
$= s\mathcal{L}(f) - f(0) = s\mathcal{L}(f) - 1$
$s\mathcal{L}(f) = 1 - \frac{2}{s^2+4}$
$\mathcal{L}(f) = -\frac{2}{s(s^2+4)} + \frac{1}{s}$
c)
$\mathcal{L}(\cos^2 t) = \mathcal{L}(\frac{1+\cos 2t}{2})$
$= \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}(\frac{s}{s^2+4}) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s(s^2+4)}$

12. a)
$f(t) = t\cos\omega t, f(0) = 0$
$f'(t) = \cos\omega t - \omega t\sin\omega t \Rightarrow f'(0) = 1$
$f''(t) = -\omega\sin\omega t - \omega\sin\omega t - \omega^2 t\cos\omega t$
$= -2\omega\sin\omega t - \omega^2 f(t)$
$\Rightarrow \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - 1$
$= -2\omega\frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \omega^2\mathcal{L}(f)$
$(s^2+\omega^2)\mathcal{L}(f) = 1 - \frac{2\omega^2}{s^2+\omega^2} = \frac{s^2-\omega^2}{s^2+\omega^2}$
$\mathcal{L}(f) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
b)
$\mathcal{L}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \omega\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$= \frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}) = \frac{1}{2\omega^2}(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t)$
c)
$\mathcal{L}(f') = \mathcal{L}(\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) = s\mathcal{L}(f)$
$\frac{s}{s^2+\omega^2} - \omega\mathcal{L}(ts\sin]\omega t) = \frac{s(s^2-\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\Rightarrow \omega\mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{s^3-s\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$= \frac{\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\Rightarrow \mathcal{L}(t\sin\omega t) = \frac{s\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}) = \frac{1}{2\omega}t\sin\omega t$
d)
$\mathcal{L}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$
$= \frac{\omega}{w^2+\omega^2} + \omega\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$= \frac{2s^2\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$

e)

$f(t) = t\cosh at, f(0) = 0$

$f'(t) = \cosh at + at\sinh at, f'(0) = 1$

$f''(t) = a\sinh at + a\sinh at + a^2 t\cosh at$

$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - 1$

$= a(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}) + a^2\mathcal{L}(f)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{2a^2}{(s^2-\omega^2)^2} + \frac{1}{(s^2-a^2)}$

$= \frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$

f)

$\mathcal{L}(f') = \mathcal{L}(\cosh at) + \mathcal{L}(at\sinh at)$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}) + a\mathcal{L}(t\sinh at)$

$= s\mathcal{L}(f) = \frac{s(s^2+a^2)}{(s^2-a^2)}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(t\sinh at) = \frac{1}{a}(\frac{s(s^2+a^2)}{(s^2-a^2)^2} - \frac{1}{2}(\frac{2s}{s^2-a^2}))$

$= \frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$

13. $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+4s})$

$= \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s+4)})$

$= \int_0^t e^{-4\tau}d\tau$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t}$

14. $\frac{1}{s-2} \Rightarrow e^{2t}$

$\frac{1}{s(s-2)} \Rightarrow \int_0^t e^{2\tau}d\tau = \frac{1}{2}(e^{2t}-1)$

$\frac{1}{s^2(s-2)} \Rightarrow \int_0^t \frac{1}{2}(e^{2\tau}-1)d\tau = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{4}$

$y(t) = -1 - 2t + e^{2t}$

15. $\frac{1}{\omega}\sin\omega t \Rightarrow \frac{1}{s^2+\omega^2}$

$\frac{1}{s(s^2\omega^2)} \Rightarrow \int_0^\tau \frac{1}{\omega}\sin\omega\tau d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$

$\to \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}) = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$

16. $\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \sin t$

$\frac{1}{s(s^2+1)} \Rightarrow \int_0^t \sin\tau d\tau = 1-\cos t$

$\frac{1}{s^2(s^2+1)} \Rightarrow \int_0^t 1-\cos\tau d\tau = t - \sin t$

$\frac{1}{s^2(s^2+1)} \Rightarrow \int_0^t \tau - \sin\tau d\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$

$\to \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^5+s^3}) = -1 + \frac{1}{2}t^2 + \cos t$

17. $\frac{1}{s^2-1} \Rightarrow -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$

$\frac{1}{s(s^2-1)} \Rightarrow \int_0^t(-\frac{1}{2}e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^\tau)d\tau = -1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$

$\to \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2-1)}) = -1 + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$

18. $\frac{1}{s^2}\frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{s^2(s+1)}$

$\frac{1}{s+1} \Rightarrow e^{-t}$

$\frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow \int_0^t e^{-\tau}d\tau = 1 - e^{-t}$

$\frac{1}{s^2(s+1)} \Rightarrow \int_0^t 1 - e^{-\tau}d\tau = t + e^{-t} - 1$

$\to \mathcal{L}^{-1}(\frac{s-1}{s^2(s+1)}) = 2 - t - 2e^{-t}$

19. $\frac{9}{s^2}\frac{s+1}{s^2+9} = \frac{9}{s(s^2+9)} + \frac{9}{s^2(s^2+9)}$

$\frac{9}{s^2+9} \Rightarrow 3\sin 3t$

$\frac{9}{s(s^2+9)} \Rightarrow \int_0^t 3\sin 3\tau d\tau = 1 - \cos 3t$

$\frac{9}{s^2(s^2+9)} \Rightarrow \int_0^t 1 - \cos 3\tau d\tau = t - \frac{1}{3}\sin 3t$

$\to \mathcal{L}^{-1}(\frac{9}{s^2}\frac{s+1}{s^2+9}) = 1 - \cos 3t + t - \frac{1}{3}\sin 3t$.

20. $\frac{\pi^5}{s^2\pi^2} \Rightarrow \pi^4\sin\pi t$

$\frac{\pi^5}{s(s^2+\pi^2)} \Rightarrow \int_0^t \pi^4\sin\pi\tau d\tau = \pi^3(1-\cos\pi t)$

$\frac{\pi^5}{s^2(s^2+\pi^2)} \Rightarrow \int_0^t \pi^3(1-\cos\pi\tau)d\tau = \pi^3 - \pi^2\sin\pi t$

$\frac{\pi^5}{s^3(s^2+\pi^2)} \Rightarrow \int_0^t \pi^3 - \pi^2\sin\pi\tau d\tau \frac{\pi^3}{2}t^2 + \pi\cos\pi t - \pi$

$\frac{\pi^5}{s^4(s^2+\pi^2)} \Rightarrow \int_0^t \frac{\pi^3}{2}\tau^2 + \pi\cos\pi\tau - \pi d\tau = -\pi t + \frac{\pi^3}{6}t^3 + \sin\pi t$

5.3. Unit Step Function,Second Shifting Theorem,Dirac's Delta Function

2. Second shifting Theorem 을 쓰기위해 변형해보면
$tu(t-1) = (t-1)u(t-1) + u(t-1)$
그러므로 라플라스 변환은
$e^{-s}(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s})$
3. $\frac{2e^{-s}}{s^2}$
4. $\frac{2e^{-s}}{s^3}$
5. $e^{-s}(2s^{-3} + 2s^{-2} + s^{-1})$
6. $e^{-2t}u(t-3) = e^{-2(t-3)}e^{-6}u(t-3)$
을 이용하면
$\frac{e^{-3s-6}}{s+2}$
7. $\frac{-4e^{-\pi s}s}{s^2+1}$
8. $t^2(1-u(t-1)) = t^2 - [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1]u(t-1)$
를 이용하면
$2s^{-3} - e^{-s}(2s^{-3} + 2s^{-2} + s^{-1})$
9. $\frac{\omega(1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}{s^2+\omega^2}$
10. $(1-e^{-t})[1-u(t-2)]$
$= 1 - e^{-t} - (1 - e^{(t-2)}e^{-2})u(t-2)$ 를 이용하면
$\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - e^{-2s}(\frac{1}{s} - \frac{e^{-2}}{s+1})$
11. $\frac{(1-e^{1-s})}{s-1}$
12. 주어진 함수는 $[u(t-2\pi) - u(t-4\pi)]\sin t$
$= u(t-2\pi)\sin(t-2\pi) - u(t-4\pi)\sin(t-4\pi)$ 이다.
그러므로 답은 $\frac{1}{s^2+1}(e^{-2\pi s} - e^{-4\pi s})$이다.
13. $-10s\frac{(e^{-s}+e^{-2s})}{(s^2+\pi^2)}$
14. $4u(t-2) - 8u(t-5)$
15. $\frac{1}{2}(t-3)^2u(t-3)$
16. s^{-3}의 역변환은 $\frac{t^2}{2}$이다.그러므로 $(s-1)^{-3}$의 역변환은 $e^t\,\frac{t^2}{2}$이고 $\frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}$의 역변환은
$\frac{1}{2}e^{t-3}(t-3)^2u(t-3)$이다.
17. $[1 + u(t-\pi)]\sin 3t$
18. $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$이므로, 이것의 역수의 역변환은 $e^{-t}\sin t$이다. second shifting 정리를 쓰면
$e^{-(t-2\pi)}\sin t\, u(t-2\pi)$
19. $\cos(\pi t)u(t-2)$
20. $y = 3e^{\frac{t}{2}}(\cos 3t + \sin 3t)$
21. $\frac{1}{3}(e^t - 1)^3e^{-5t}$
22. 우변을 함수 u 로 나타내면
$r(t) = 4t[1 - u(t-1)] + 8u(t-1)$
$= 4t - [4(t-1) - 4]u(t-1)$ 그러므로
$y =$
$$\begin{cases} 4e^{-t} - e^{-2t} + 2t - 3 & if\ \ 0 < t < 1 \\ (4-8e)e^{-t} + (3e^2 - 1)e^{-2t} + 4 & if\ \ t > 1 \end{cases}$$
23. $\begin{cases} \sin 3t + \sin t & if\ \ 0 < t < \pi \\ \frac{4}{3}\sin 3t & if\ \ t > \pi \end{cases}$
24. $r(t) = 4e^t[1 - u(t-2)] = 4e^t - 4e^2e^{t-2}u(t-2)$
$y =$
$$\begin{cases} 2e^t + e^{2t} - 2e^{3t} & if\ \ 0 < t < 2 \\ (1 + 4e^{-2})e^{2t} + (-2 - 2e^{-4})e^{3t} & if\ \ t > 2 \end{cases}$$
25. $y = \begin{cases} e^t - \sin t & if\ \ 0 < t < 2\pi \\ e^t - \frac{1}{2}\sin 2t & if\ \ t > 2\pi \end{cases}$
26. $y = 2\cos 4t + u(t-\pi)\sin 4(t-\pi)$
27. $y = \begin{cases} \sin t & if\ \ 0 < t < \pi \\ 0 & if\ \ \pi < t < 2\pi \\ -\sin t & if\ \ t > 2\pi \end{cases}$
28. $y = \begin{cases} 3e^{-2t}\sin t & if\ \ 0 < t < 1 \\ e^{-2t}(3\sin t + e^2\sin(t-1)) & if\ \ t > 1 \end{cases}$
29. $y =$
$$\begin{cases} 3e^{-3t} - 2e^t + 2e^t & if\ \ 0 < t < \frac{1}{2} \\ 3e^{-3t} - 2e^{-t} + 2e^t & \\ +\frac{1}{4}(-e^{-3t+\frac{3}{2}} + e^{t-\frac{1}{2}}) & if\ \ t > \frac{1}{2} \end{cases}$$
30. $y =$
$$\begin{cases} e^{-2t} - e^{-3t} & if\ \ 0 < t < 1 \\ \frac{1}{6} + (1 - \frac{1}{2}e^2)e^{-2t} & \\ -(1 - \frac{1}{3}e^3)e^{-3t} & if\ \ 1 < t < 2 \\ \frac{1}{6} + (1 - \frac{1}{2}e^2 + e^4)e^{-2t} & \\ -(1 - \frac{1}{3}e^3 + e^6)e^{-3t} & if\ \ t > 2 \end{cases}$$
31. $\begin{cases} L\frac{(e^{-\frac{Rt}{L}}-1)}{R^2} + \frac{t}{R} & if\ \ 0 < t < 4\pi \\ L\frac{e^{-\frac{Rt}{L}}}{R^2} + (\frac{4\pi}{R} - \frac{L}{R^2})e^{-\frac{(t-4\pi)R}{L}} & if\ \ t > 4\pi \end{cases}$
32. $y = \begin{cases} \frac{-L\cos t + R\sin t + e^{-\frac{Rt}{L}}}{L^2+R^2} & if\ \ 0 < t < 2\pi \\ Le^{\frac{-Rt}{L}}\frac{1-e^{\frac{2\pi R}{L}}}{L^2+R^2} & if\ \ t > 2\pi \end{cases}$
33. $sI + \frac{I}{s} = \frac{(1-e^{-s})}{s^2}$ 이므로
$y = \begin{cases} 1 - \cos t & if\ \ 0 < t < 1 \\ \cos(t-1) - \cos t & if\ \ t > 1 \end{cases}$
34. $v = 1 - u(t-a)$이므로 주어진 식은
$sI + \frac{I}{s} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-as}}{s}$이다.그러므로 정답은
$i = \begin{cases} \sin t & if\ \ 0 < t < a \\ \sin t - \sin(t-a) & if\ \ t > a \end{cases}$
35. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t) & if\ \ 0 < t < \pi \\ \frac{1}{2}[-(1 + e^{-\pi})\cos t & \\ +(3 - e^{-\pi})\sin t] & if\ \ t > \pi \end{cases}$
36. $I = 100\frac{e^{-t} - e^{-1.01s}}{s+0.1}$ 이므로
$i =$
$$\begin{cases} 0 & if\ \ t < 1 \\ 100e^{-0.1(t-1)} & if\ \ 0 < t < 1.01 \\ 100[e^{-0.1(t-1)} - e^{-0.1(t-1.01)}] & \\ = -0.1106e^{-0.1t} & if\ \ t > 1.01 \end{cases}$$
37. $\begin{cases} 0 & if\ \ t < 1 \\ e^{-0.1(t-1)} & if\ \ 1 < t < 2 \\ e^{-0.1(t-1)} - e^{-0.1(t-2)} & if\ \ t > 2 \end{cases}$
38. $i = \begin{cases} 0 & if\ \ t < 3 \\ 5 - 5e^{-0.1(t-3)} & \\ = 5(1 - 1.3499e^{-0.1t}) & if\ \ t > 3 \end{cases}$
39. $\begin{cases} 0 & if\ \ t < 2 \\ \frac{(10e^{(t-2)} - e^{-0.1(t-2)})}{900e^2} & if\ \ t > 2 \end{cases}$

5.4. Differentiation and Integration of Transforms

1. $\frac{1}{(s-1)^2}$
2. $-(\frac{12}{s^2-16})' = \frac{24s}{(s^2-16)^2}$
3. $\frac{2s^3+6\pi^2 s}{(s^2-\pi^2)^3}$
4. $-(\frac{s+1}{(s+1)^2+1})' = -\frac{s^2+2s+2-(s+1)(2s+2)}{(s^2+2s+2)^2}$
   $= \frac{s^2+2s}{(s^2+2s+2)^2}$
5. $\frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$
6. $\frac{d^2}{ds^2}(\frac{2}{s^2+4}) = \frac{d}{ds}(\frac{-4s}{(s^2+4)^2})$
   $= \frac{-4(s^2+4)^2+16s^2(s^2+4)}{(s^2+4)4} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$
7. $\frac{2s+2}{(s^2+2s+2)^2}$
8. $\frac{d^2}{ds^2}(\frac{s}{s^2+\omega^2}) = \frac{d}{ds}\frac{-s^2+\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{2s^3-6\omega^2 s}{(s^2+\omega^2)^3}$
9. $\frac{1}{2}t^2e^{3t}$
10. $(\frac{3}{s^2-9})' = -\frac{6s}{(s^2-9)^2}$ 이므로
    $\frac{1}{6}t\sinh 3t$
11. $t\cos\pi t$
12. (6)에 의해
    $\int_s^\infty \frac{2\tilde{s}+6}{(\tilde{s}^2+6\tilde{s}+10)^2}d\tilde{s} = \frac{1}{s^2+6s+10} = \mathcal{L}(\frac{f}{t})$
    이다.이 적분의 역변환은 $e^{-3t}\sin t$이므로, $te^{-3t}\sin t$
13. $2t^{-1}(e^t - \cos t)$
14. $[ln(s+a) - ln(s+b)]' = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$ 의 역변환은
    $e^{-at} - e^{-bt}$이다.그러므로 (1)에 의해
    $\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$
15. $\frac{1}{4}t\sin 2t$
16. $arccot\frac{s}{\pi} = \int_s^\infty \frac{\pi}{\tilde{s}^2+\pi^2}d\tilde{s}$
    이므로,적분기호안의 함수의 역변환은 $\sin\pi t$ 이다. 그러므로 (6)으로부터
    $\frac{\sin\pi t}{t}$
18. $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
20. (b)
    $l_2 = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2$
    $l_3 = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3$
    $l_4 = 1 - 4t + 3t^2 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{24}t^4$
    $l_5 = 1 - 5t + 5t^2 - \frac{5}{3}t^3 + \frac{5}{24}t^4 - \frac{1}{120}t^5$

5.5. Convolution. Integral Equations

1. t
2. $1 * \sin\omega t = \int_0^t \sin\omega\tau d\tau = -\frac{\cos\omega\tau}{\omega}|_0^t = \frac{1-\cos\omega t}{\omega}$
3. $\sinh t$
4. 예제(Example)1과 비슷하다.
   $\int_0^t \cos\omega\tau\sin(\omega t - \omega\tau)d\tau$
   $= \frac{1}{2}\int_0^t[\cos\omega t + \cos(2\omega\tau - \omega t)]d\omega$
   $= \frac{1}{2}[t\cos\omega t + \frac{\sin\omega t - \sin(-\omega t)}{2\omega}]_0^t$
   $= \frac{1}{2}t\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega t$
5. $\frac{1}{2}t\sin wt$
6. $e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{a\tau}e^{b(t-\tau)}d\tau = e^{bt}\int_0^t e^{(a-b)\tau}d\tau$
   $= \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
7. $e^t - t - 1$
8. $\int_0^t (t-\tau)^2 u(\tau-1)d\tau = \int_1^t (t-\tau)^2 d\tau$
   $= -\frac{1}{3}(t-\tau)^3|_1^t = \frac{1}{3}(t-1)^3 \ \ if \ \ t > 1$
   $0 \ \ if \ \ t < 1$
9. $\frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-3)})u(t-3)$
10. $6 * e^{-3t} = \int_0^t 6e^{-3\tau}d\tau = -2e^{-3t} + 2$
11. $e^t - t - 1$
12. $e^{at} * e^{at} = \int_0^t e^{a\tau}e^{a(t-\tau)}d\tau = e^{at}\int_0^t d\tau = te^{at}$
13. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t$
14. $\cos\omega t * \cos\omega t$를 문제 4와 같이 전개하면
    $\frac{1}{2}t\cos\omega t + \frac{1}{2\omega}\sin\omega t$
15. $\frac{t\sin\pi t}{2\pi}$
16. $u(t-a) * e^{2t} = \int_a^t e^{2(t-\tau)}d\tau = e^{2t}\int_a^t e^{-2\tau}d\tau$
    $= \frac{1}{2}(e^{2(t-a)} - 1) \ \ if \ \ t > a$
    $0 \ \ if \ \ t < a$
17. $\frac{wt - \sin wt}{w^2}$
18. $e^{-3t} * e^{2t} = \int_0^t e^{-3\tau}e^{2(t-\tau)}d\tau = e^{2t}\int_0^t e^{-5\tau}d\tau$
    $= \frac{1}{5}(e^{2t} - e^{-3t})$
19. $y = \cos t - \cos 2t$
20. 주어진 식이
    $s^Y + Y = s^{-2}$ 이므로
    $y = t - \sin t$
21. $y = \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2t) + \frac{1}{4}[\cos(2t-2) - 1]u(t-1)$
22. 주어진 식이
    $(s^2+3s+2)Y = 1 + \frac{1-e^{-s}}{s}$ 이므로
    $Y = \frac{s+1-e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}$ 이다.
    $y = \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) + \frac{1}{2}(2e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} - 1)u(t-1)$
23. $y = e^{-t}(\cos t + \sin t) + [-2\cos t + \sin t + e^{-(t-2\pi)}(2\cos t + \sin t)]u(t-2\pi)$
24. $q = e^{3t} - e^{2t}$,
    $\mathcal{L}^{-1}\{[(s+a)y(0) + y'(0)]Q\} = -4e^{3t} + 5e^{2t}$ 이므로
    $$\begin{cases} r * q = 2e^{3t} - 4e^{2t} + 2e^t & if \ \ 0 < t < 2 \\ y = -2e^{3t} + 2^{2t} + 2e^t & if \ \ 0 < t < 2 \\ r * q = 2(1 - e^{-4})e^{3t} & \\ +4(e^{-2} - 1)e^{2t} & if \ \ t > 2 \\ y = -(2 + 2e^{-4})e^{3t} & \\ +(1 + 4e^{-2})e^{2t} & if \ \ t > 2 \end{cases}$$
25. $y = [t - \cos(t-1) - \sin(t-1)]u(t-1) + [-t + 2\cos(t-2) + \sin(t-2)]u(t-2\pi)$
26. $q = e^{-t} - e^{-2t}$,
    $r * q =$
    $$\begin{cases} 4e^{-t} - e^{-2t} + 2t - 3 & if \ \ 0 < t < 1 \\ \int_0^1 \tau q(t-\tau)d\tau + \int_1^t 8q(t-\tau)d\tau & \\ = (4 - 8e)e^{-t} + (3e^2 - 1)e^{-2t} + 4 & if \ \ t > 1 \end{cases}$$
27. e^t
28. $Y = 2s^{-2} - 4s^{-2}Y, Y = \frac{2}{s^2+4}, y = \sin 2t$
29. $\cos t$
30. $Y = \frac{2}{s^2+4} + \frac{2Y}{s^2+4}, Y = \frac{2}{s^2+2}, y = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$
31. $\sinh t$

32. $Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{Y}{s^2+1}, Y = \frac{1}{s^2}, y = t$
33. $\cosh t$
34. (a)
$t - \tau = p$로 놓으면, $d\tau = -dp$이다.τ를 p로 치환하면
$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
$= \int_t^0 g(p)f(t-p)(-dp) = \int_0^t g(p)f(t-p)dp = g * f$
(b)
(a)를 이용하면
$(f * g) * v = v * (f * g)$
$= \int_0^t v(p) \int_0^{t-p} f(\tau)g(t-p-\tau)d\tau dp$
$= \int_0^t f(\tau) \int_0^{t-\tau} g(t-\tau-p)v(p)dpd\tau = f * (g * v)$
(c)
적분의 덧셈에 관한 결과이다.
(d)
5.3절의 (8)에 의해 $\mathcal{L}(\delta) = 1$이므로
$\mathcal{L}(\delta * f) = \mathcal{L}(\delta)\mathcal{L}(f) = 1 \cdot \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f)$
(e)
$t > k$라 하자. 0과 k사이에 다음 식을 만족하는 $\tilde{t}$가 존재한다.
$(f_k * f)(t) = \int_0^k \frac{1}{k} f(t-\tau)d\tau = f(t-\tilde{t})$
이제 $k \to 0$이라 하면,
$\tilde{t} \to 0, f_k(t-\tilde{t}) \to \delta(t)$
이므로 주어진 식이 성립한다.
(f)
$s^2Y - sy(0) - y'(0) + \omega^2 Y = \mathcal{L}(r)$의 해는
$Y = \frac{1}{\omega}(\frac{\omega}{s^2+\omega^2})\mathcal{L}(r) + y(0)\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{y'(0)}{\omega}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

5.6. Partial Fractions. Differential Equations

1. $\frac{6}{(s+2)(s-4)} = -\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-4}$
$\Rightarrow f(t) = -e^{-2t} + e^{4t}$

2. $\frac{s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)} = \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+1} \to 2t + \cos t$
$\frac{s^3+2s^2+2}{s^3(s^2+1)} \to \int_0^t 2\tau + \cos\tau d\tau$
$\to t^2 + \sin t$

3. $\frac{s^2+9s-9}{s^3-9s} = \frac{s^2+9s-9}{s(s+3)(s-3)}$
$= \frac{1}{s} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-3}$
$f(t) = 1 - \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{3t} = 1 + 3\sinh 3t$

4. $\frac{s}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$
$f(t) = e^{-t} - e^{-t}t$

5. $\frac{2s^3}{s^4-81} = \frac{2s^3}{(s^2+9)(s+3)(s-3)}$
$= \frac{1}{2}\frac{1}{s+3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2+9}$
$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{3t} + \cos 3t$

6. $\frac{s^3-3s^2+6s-4}{(s^2-2s+2)^2}$
$= \frac{s}{s^2-2s+2} - \frac{1}{s^2-2s+2} + \frac{2s-2}{(s^2-2s+2)^2}$
$= \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$
$\frac{s}{s^2+1} \to \cos t$
$\frac{1}{s^2+1} \to \sin t$
$\frac{2s}{(s^2+1)^2} \to t\sin t$
$\Rightarrow f(t) = e^t\cos t + e^t t\sin t$

7. $\frac{s^4+3(s+1)^3}{s^4(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{3}{s^4}$
$\Rightarrow f(t) = e^{-t}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t^3$

8. 조립제법을 이용해 분자를 $s-2$의 내림차순으로 정리하면,
$s^3 - 7s^2 + 14s - 9 = (s-2)^3 - (s-2)^2 - 2(s-2) - 1$
$= (s-2)^3 - (s-2+1)^2$
$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-2)^3} \Rightarrow f(t) = te^t - \frac{1}{2}t^2e^{2t}$

9. $\frac{s^3+6s^2+14s}{(s+2)^4}$
$= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{12}{(s+2)^4}$
$\Rightarrow f(t) = e^{-2t} + e^{-2t}t^2 - 2e^{-2t}t^3$
$= e^{-2t}(1 + t^2 - 2t^3)$

10. $\frac{1}{s^4+4a^4}$
$= \frac{1}{s^4+2a^2s^2+4a^2-4a^2s^2}$
$= \frac{1}{(s^2+2as+2a^2)(s^2-2as+2a^2)}$
$= \frac{\frac{1}{8a^3}s + \frac{1}{4a^2}}{(s^2+2as+2a^2)} + \frac{-\frac{s}{8a^3} + \frac{1}{4a^2}}{s^2-2as+2a^2}$
$= \frac{1}{8a^3}\left[\frac{s+2a}{(s+a)^2+a^2} + \frac{-s+2a}{(s-a)^2+a^2}\right]$
$\Rightarrow f(t) =$
$\frac{1}{8a^3}(e^{-at}(\cos at + \sin at) - e^{at}(\cos at - \sin at))$
$\frac{1}{4a^3}(\cos at\frac{e^{-at}-e^{at}}{2} + \sin at\frac{e^{-at}+e^{at}}{2})$
$\frac{1}{4a^3}(\cosh at\sin at - \sinh at\cos at)$

11. $\frac{s}{s^4+4a^4}$
$= -\frac{1}{4a}\frac{1}{s^2+2as+2a^2} + \frac{1}{4a}\frac{1}{s^2-2as+2a^2}$
$= \frac{1}{4a}(-\frac{1}{(s+a)^2+a^2} + \frac{1}{(s-a)^2+a^2})$
$\Rightarrow$
$f(t) = \frac{1}{4a}(-e^{-at}\frac{\sin at}{a} + e^{at}\frac{\sin at}{a})$

$$= \frac{1}{2a^2}\sin at(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2})$$
$$= \frac{1}{2a^2}\sin at \sinh at$$

12. $\frac{s^2}{s^4+4a^4}$
$$= -\frac{s}{4a}\frac{1}{s^2+2as+2a^2} + \frac{s}{4a}\frac{1}{s^2-2as+2a^2}$$
$$= \frac{1}{4a}(-\frac{s}{(s+a)^2+a^2} + \frac{s}{(s-a)^2+a^2})$$
$\Rightarrow$
$f(t) = \frac{1}{4a}(-e^{-at}(\cos at - \sin at) + e^{at}(\cos at + \sin at))$
$$= \frac{1}{2a}(\cos at\frac{e^{at}-e^{-at}}{2} + \sin at\frac{e^{at}+e^{-at}}{2})$$
$$= \frac{1}{2a}(\cos at \sinh at + \sin at \cosh at)$$

13. $\frac{s^3}{s^4+a^4}$
$$= \frac{1}{2}\frac{s+a}{s^2+2as+2a^2} + \frac{1}{2}\frac{s-a}{s^2-2as+2a^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{s+a}{(s+a)^2+a^2} + \frac{1}{2}\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2}$$
$\Rightarrow$
$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-at}\cos at + \frac{1}{2}e^{at}\cos at$$
$$= \cos at \cosh at$$

14. $s^2Y + \omega_0^2 Y = \frac{Kp}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+p^2)}$
$$= Kp\frac{1}{p^2-\omega_0^2}(\frac{1}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{s^2+p^2})$$
$\Rightarrow$
$$y(t) = \frac{Kp}{p^2-\omega_0^2}(\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0} - \frac{\sin pt}{p})$$

15. a) $\frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A}{s-a}$ + further fractions($K(s)$) 인데 simple root 이기 때문에 $K(a) \neq 0$이다. 양변에 $s-a$를 곱하고 $s \to a$로 보내면
$$(s-a)\frac{F(s)}{G(s)} = A + (s-a)K(s)$$
$$\Rightarrow A = \lim_{s\to a}\frac{(s-a)F(s)}{G(s)}$$
b)
$$\frac{F(s)}{G(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{s-a} + K(s)$$
$$\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)} = A_m + (s-a)A_{m-1} + \cdots + (s-a)^{m-1}A_1 + (s-a)^m K(s)$$
$$\Rightarrow A_m = \lim_{s\to a}\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}$$
$$A_{m-1} = \lim_{s\to a}\frac{d}{ds}(\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)})$$
마찬가지로 계산하면
$$A_k = \frac{1}{(m-k)!}\lim_{s\to a}\frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}}\left[\frac{(s-a)^m F(s)}{G(s)}\right]$$

16. a)
$\mathcal{L}(f)$
$$= \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$
$$= \int_0^p e^{-st}f(t)dt + \int_p^{2p} e^{-st}f(t)dt + \cdots$$
$$= \int_0^p e^{-st}f(t)dt + \int_0^p e^{-s(t+p)}f(t)dt + \cdots$$
$$= \int_0^p e^{-st}f(t)dt + e^{-sp}\int_0^p e^{-st}f(t)dt + e^{-2sp}\int_0^p e^{-st}f(t)dt + \cdots$$
$$= \int_0^p e^{-st}f(t)dt(1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \cdots)$$
$$= \int_0^p e^{-st}f(t)dt(\frac{1}{1-e^{-sp}})$$
b)
$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s/\omega}}\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\sin\omega t dt$$
$$\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\sin\omega t dt = \text{Im}\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}e^{i\omega t}dt$$
$$= \text{Im}(\frac{-s-i\omega}{s^2+\omega^2}(-e^{-s\pi/\omega}-1))$$
$\Rightarrow$
$$\mathcal{L}(f) = \frac{\omega(e^{-s\pi/\omega}+1)}{s^2+\omega^2}$$
c)
$\sin\omega t$를 0 에서 π/ω 까지 $-\sin\omega t$를 π/ω에서 $2\pi/\omega$까지 잡고 주기가 $2\pi/\omega$인 변환은
$$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{1+e^{\pi s/\omega}}{e^{\pi s/\omega}-1} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{2^{-\pi s/2\omega}+e^{\pi s/2\omega}}{e^{\pi s/2\omega}-e^{-\pi s/2\omega}}$$
$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\frac{\cosh(\pi s/2\omega)}{\sinh(\pi s/2\omega)}$$
d)
$$f(t) = \frac{k}{p}t \text{ if } 0<t<p, f(t+p) = f(t)$$
$$\int_0^p e^{-st}tdt = -\frac{t}{s}e^{-st}|_0^p + \frac{1}{s}\int_0^p e^{-st}dt$$
$$= -\frac{p}{s}e^{-sp} - \frac{1}{s^2}(e^{-sp}-1)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{k}{ps^2} - \frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})}$$
e)
$\mathcal{L}(\frac{kt}{p}) = \frac{k}{ps^2}$이므로 $\mathcal{L}(f) = \frac{ke^{-ps}}{s(1-e^{-ps})}$

5.7. Systems of Differential Equations

1. $sY_1 = -Y_1 + Y_2$
$sY_2 = -Y_1 - Y_2$
$\Rightarrow Y_2 = -\frac{1}{(s+1)^2+1}$
$Y_1 = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$
$\Rightarrow y_1(t) = e^{-t}\cos t,\ y_2(t) = -e^{-t}\sin t$

2. $sY_1 + 3 = 6Y_1 + 9Y_2$
$sY_2 + 3 = Y_1 + 6Y_2$
$\Rightarrow$
$(s-6)Y_1 = 9Y_2 - 3$
$(s-6)Y_2 = Y_1 - 3$
$\Rightarrow$
$(s-6)((s-6)Y_2+3) = (s-6)^2Y_2+3(s-6) = 9Y_2-3$
$\Rightarrow$
$Y_2 = \frac{-3s+15}{(s-6)^2-9} = -\frac{2}{s-9} + \frac{3}{s-3}$
$Y_1 = -\frac{6}{s-9} + \frac{3}{s-3}$
$\Rightarrow$
$y_2(t) = -2e^{9t} - e^{3t},\ y_1(t) = -6e^{9t} + 3e^{3t}$

3. $sY_1 - 3 = -Y_1 + 4Y_2$
$sY_2 - 4 = 3Y_1 - 2Y_2$
$\Rightarrow$
$(s+1)Y_1 - 4Y_2 = 3$
$-3Y_1 + (s+2)Y_2 = 4$
$\Rightarrow$
$Y_2 = \frac{4s+13}{s^2+3s-10} = \frac{4s+13}{(s-2)(s+5)}$
$= \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s+5}$
$Y_1 = \frac{1}{3}(\frac{(s+2)(4s+13)}{s^2+3s-10} - 4)$
$= \frac{3s+22}{s^2+3s-10} = \frac{4}{s-2} - \frac{1}{s+5}$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = 4e^{2t} - e^{-5t},\ y_2(t) = 3e^{2t} + e^{-5t}$

4. $sY_1 + 3 = 5Y_1 + Y_2$
$sY_2 - 7 = Y_1 + 5Y_2$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = 2e^{6t} - 5e^{4t},\ y_2(t) = 2e^{6t} + 5e^{4t}$

5. $sY_1 + Y_2 = \frac{2s}{s^2+1}$
$Y_1 + sY_2 = 1$
$\Rightarrow$
$Y_2 = \frac{s}{s^2-1} - \frac{2s}{(s^2-1)(s^2+1)}$
$= \frac{s^3-s}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}$
$Y_1 = 1 - sY_2 = \frac{1}{s^2+1}$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = \sin t,\ y_2(t) = \cos t$

6. $s^2Y_1 - s - 1 + Y_2 = \frac{-5s}{s^2+4}$
$s^2Y_2 + s - 1 + Y_1 = \frac{5s}{s^2+4}$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = \sin t + \cos 2t,\ y_2(t) = \sin t - \cos 2t$

7. $s^2Y_1 - 2s - 3 = Y_1 + 3Y_2$
$s^2Y_2 - s - 2 = 4Y_1 - \frac{4}{s-1}$
$(s^2-1)Y_1 - 3Y_2 = 2s+3$
$-4Y_1 + s^2Y_2 = s + 2 - \frac{4}{s-1}$
$\Rightarrow$
$Y_2 = \frac{(s^2-1)(s+2-\frac{4}{s-1})}{s^2(s^2-1)-12} + \frac{8s+12}{s^2(s^2-1)-12}$
$= \frac{1}{s-2}$
$Y_1 = -\frac{1}{4}(-\frac{s^2}{s-2} + s + 2 - \frac{4}{s-1})$
$= -\frac{1}{4}(-\frac{4}{s-2} - \frac{4}{s-1})$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = e^{2t} + e^t,\ y_2(t) = e^{2t}$

8. $s^2Y_1 - 3s = -5Y_1 2Y_2$
$s^2Y_2 - s = 2Y_1 - 2Y_2$
$\Rightarrow$
$(s^2+5)Y_1 - 2Y_2 = 3s$
$-2Y_1 + (s^2+2)Y_2 = s$
$\Rightarrow$
$Y_1 = \frac{3s^3+8s}{(s^2+1)(s^2+6)} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+6}$
$Y_2 = \frac{s^3+11s}{(s^2+1)(s^2+6)} = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+6}$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = \cos t + 2\cos\sqrt{6}t$
$y_2(t) = 2\cos t - \cos\sqrt{6}t$

9. $sY_1 - 2 + sY_2 = \frac{2}{s^2-1}$
$sY_2 - 1 + sY_3 = \frac{1}{s-1}$
$sY_3 + sY_1 - 1 = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1}$
$\Rightarrow$
$Y_3 = \frac{3}{2}\frac{1}{s(s-1)} + \frac{1}{2s(s+1)} - \frac{1}{s(s^2-1)}$
$= \frac{2s}{s(s^2-1)} = \frac{2}{s^2-1}$
$Y_2 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s(s-1)} - \frac{2}{s^2-1} = \frac{1}{s+1}$
$Y_1 = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s-1}$
$\Rightarrow$
$y_3(t) = 2\sinh t,\ y_2(t) = e^{-t},\ y_1(t) = e^t$

10. $2sY_1 - sY_2 - sY_3 = 0$
$sY_1 + sY_2 = \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}$
$sY_2 + Y_3 = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}$

$\Rightarrow$
$y_1(t) = t^2,\ y_2(t) = t^2 + 2t,\ y_3(t) = t^2 - 2t$

11. $sY_1 = -Y_2 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$
$sY_2 = Y_1 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$
$\Rightarrow$
$Y_1 = \frac{1}{1+s^2}(1 - e^{-s} - \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s})$
$= (1-e^{-s})\frac{1}{1+s^2}(1-\frac{1}{s})$
$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}(1-\frac{1}{s})\right] = \sin t - \int_0^t \sin t dt$
$= \sin t + \cos t - 1$ 이므로
$y_1 = \sin t + \cos t - 1 - u(t-1)[\sin(t-1) + \cos(t-1) - 1]$

$Y_2 = \frac{1}{s}(1-e^{-s}) - sY_1 = (1-e^{-s})(\frac{1}{s} - \frac{s-1}{1+s^2})$
$y_2 = 1 - \cos t + \sin t - u(t-1)[1 - \cos(t-1) + \sin(t-1)]$

12. $sY_1 + Y_2 = \frac{2s}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{2s}{s^2+1}$
$= \frac{2s}{s^2+1}(1 - e^{-2\pi s})$
$Y_1 + sY_2 = 1$
$\Rightarrow$
$Y_1 = \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s^2 e^{-2\pi s}}{s^4-1}$
$= \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}[\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2-1}]$
$Y_2 = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2se^{-2\pi s}}{s^4-1}$
$= \frac{s}{s^2+1} + e^{-2\pi s}[\frac{s}{s^2-1} - \frac{s}{s^2+1}]$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = \sin t - u(t-2\pi)[\sin t + \sinh(t-2\pi)]$
$= \begin{cases} \sin t & \text{if } 0 \le t \le 2\pi \\ -\sinh(t-2\pi) & \text{if } t > 2\pi \end{cases}$
$y_2(t) = \cos t + u(t-2\pi)[\cosh(t-2\pi) - \cos t]$
$= \begin{cases} \cos t & \text{if } 0 \le t \le 2\pi \\ \cosh(t-2\pi) & \text{if } t > 2\pi \end{cases}$

13. $sY_1 - 3 = 2Y_1 - 4Y_2 + e^{-s+1}\frac{1}{s-1}$
$sY_2 = Y_1 - 3Y_2 + e^{-s+1}\frac{1}{s-1}$
변변 빼면,
$s(Y_1 - Y_2) - 3 = Y_1 - Y_2$
$Y_1 = Y_2 + \frac{3}{s-1}$
이것을 두번째 식에 대입하면,
$Y_2 = \frac{3}{(s+2)(s-1)} + \frac{e^{-s+1}}{(s+2)(s-1)}$
$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} + e^{-s}(\frac{e/3}{s-1} - \frac{e/3}{s+2})$
$y_2(t) = e^t - e^{-2t} + \frac{1}{3}u(t-1)[e^t - e^{-2t+3}]$
$Y_1 = Y_2 + \frac{3}{s-1}$ 이므로 $y_1 = y_2 + 3e^t$

14. $sY_1 + 4 = 2Y_1 + 4Y_2 + 64(\frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s})$
$sY_2 + 4 = Y_1 + 2Y_2$
$\Rightarrow$
$Y_1 = \frac{-4s-8}{s(s-4)} - \frac{64(2+s-s^2)e^{-s}}{s^3(s-4)}$
$Y_2 = \frac{-4s+4}{s(s-4)} + \frac{64(1+s)e^{-s}}{s^3(s-4)}$
$\Rightarrow$
$y_1(t) = -6e^{4t} + 2 + u(t-1)(-18 + 10e^{4t-4} - 8t + 16t^2)$
$y_2(t) = -3e^{4t} - 1 + u(t-1)(7 + 5e^{4t-4} - 4t - 8t^2)$

15. (a) example 1;
$sY_1 = -0.02Y_1 + 0.02Y_2$
$sY_2 = 0.02Y_1 - 0.02Y_2 + 150$
두번째 식에서 $Y_2 = \frac{1}{s+0.02}(0.02Y_1 + 150)$
첫번째 식에 대입하면, $Y_1 = \frac{0.02 \cdot 150}{(s+0.02)^2 - 0.02^2}$
$y_1(t) = 0.02 \cdot 150e^{-0.02t}\frac{1}{0.02}\sinh 0.02t$
$= 150\frac{1 - e^{-0.04t}}{2}$
$Y_2 = \frac{150(s+0.02)}{(s+0.02)^2 - 0.02^2}$
$y_2(t) = 150e^{-0.02t}\cosh 0.02t = 150\frac{1+e^{-0.04t}}{2}$

example 2;
$sY_1 = -4Y_1 + 4Y_2 + \frac{12}{s}$
$sY_2 = -1.6Y_1 + 1.2Y_2 + \frac{4.8}{s}$
상수항을 소거하면,
$4.8sY_1 - 12sY_2$
$= 4.8(-4Y_1 + 4Y_2) - 12(-1.6Y_1 + 1.2Y_2) = 4.8Y_2$
$Y_2 = \frac{4.8s}{12s+4.8}Y_1$
첫번째 식에 대입하면,
$sY_1 = -4Y_1 + \frac{4.8s}{3s+1.2}Y_1 + \frac{12}{s}$
$Y_1 = \frac{12(3s+1.2)}{s(3s+2.4)(s+2)} = \frac{3}{s} + \frac{15}{3s+2.4} - \frac{8}{s+2}$
$\Rightarrow$
$I_1(t) = 3 + 5e^{-0.8t} - 8e^{-2t}$

$Y_2 = \frac{4.8 \cdot 12}{4(3s+2.4)(s+2)} = \frac{12}{3s+2.4} - \frac{4}{s+2}$
$\Rightarrow$
$I_2(t) = 4e^{-0.8t} - 4e^{-2t}$
3.1절의 방법은 행렬의 eigenvector을 구해야 하고 Laplace 변환을 이용하는 방법은 행렬의 역행렬을 구해야 한다.

(b) 3.3절 (8);
$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, y_1(0)=a, y_2(0)=b$
$\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+3)^2 - 1}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
$= \frac{1}{(s+3)^2 - 1}\begin{bmatrix} a(s+3) + b \\ b(s+3) + a \end{bmatrix}$
$\Rightarrow$
$y_1 = ae^{-3t}\cosh t + be^{-3t}\sinh t$

$y_2 = be^{-3t}\cosh t + ae^{-3t}\sinh t$

(c) 3.6절 (3);

$$\begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{s^3}+\frac{10}{s^2}+a \\ \frac{2}{s^3}+\frac{9}{s^2}+\frac{3}{s}+b \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+s-2}\begin{bmatrix} s+3 & -4 \\ 1 & s-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (as^3+10s+4)/s^3 \\ (bs^3+3s^2+9s+2)/s^3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{s^3(s^2+s-2)}\begin{bmatrix} as^4+(3a-4b)s^3-2s^2-2s+4 \\ bs^4+(3+a-2b)s^3+3s^2-6s \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+s-2}\right] = \frac{1}{3}(e^t+2e^{-2t})$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+s-2}\right] = \frac{1}{3}(e^t-e^{-2t})$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+s-2)}\right] = \frac{1}{3}\int_0^t e^t - e^{-2t}dt = \frac{1}{3}(e^t+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2})$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+s-2)}\right] = \frac{1}{3}\int_0^t e^t+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}dt = \frac{1}{3}(e^t-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4})$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s^2+s-2)}\right] = \frac{1}{3}\int_0^t e^t-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}dt = \frac{1}{3}(e^t+\frac{1}{8}e^{-2t}-\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}t-\frac{9}{8})$$

$\Rightarrow$

$$y_1(t) = \frac{a}{3}(e^t+2e^{-2t}) + \frac{3a-4b}{3}(e^t-e^{-2t}) - \frac{2}{3}(e^t+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}) - \frac{2}{3}(e^t-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}) + \frac{4}{3}(e^t+\frac{1}{8}e^{-2t}-\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}t-\frac{9}{8})$$
$$y_2(t) = \frac{b}{3}(e^t+2e^{-2t}) + \frac{3+a-2b}{3}(e^t-e^{-2t}) + (e^t+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{3}{2}) - 2(e^t-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4})$$

16. 시간이 두배 빨리 지나가는 효과이다.

$$y_1' = -\frac{16}{100}y_1 + \frac{4}{100}y_2 + 12$$
$$y_2' = \frac{16}{100}y_1 - \frac{16}{100}y_2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} s+0.16 & -0.04 \\ -0.16 & s+0.16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/s \\ 150 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+0.16)^2-0.08^2}\begin{bmatrix} s+0.16 & 0.04 \\ 0.16 & s+0.16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12/s \\ 150 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+0.16)^2-0.08^2}\begin{bmatrix} 18+1.92/s \\ 1.92/s+150s+6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$y_1 = 18(e^{-0.16t}\frac{1}{0.08}\sinh 0.08t) + 1.92\int_0^t e^{-0.16t}\frac{1}{0.08}\sinh 0.08t\,dt$$
$$= \frac{18}{0.16}(e^{-0.08t}-e^{-0.24t}) + \frac{1.92}{0.16}\int_0^t e^{-0.08t}-e^{-0.24t}dt$$
$$= 100 - 37.5e^{-0.08t} - 62.5e^{-0.24t}$$

마찬가지로 하면,

$$y_2 = 100 - 75e^{-0.08t} + 125e^{-0.24t}$$

17.
$$y_1' = -\frac{8}{100}y_1 + \frac{2}{100}y_2 + 6\sin^2 t$$
$$y_2' = \frac{8}{100}y_1 - \frac{8}{100}y_2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} s+0.08 & -0.02 \\ -0.08 & s+0.08 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}) \\ 150 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+0.08)^2-0.04^2}\begin{bmatrix} s+0.08 & 0.02 \\ 0.08 & s+0.08 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{12}{s(s^2+4)} \\ 150 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s+0.08)^2-0.04^2}\begin{bmatrix} \frac{12}{s^2+4}+\frac{0.96}{s(s^2+4)}+3 \\ \frac{0.96}{s(s^2+4)}+150(s+0.08) \end{bmatrix}$$
$$T_1 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s+0.08)^2-0.04^2](s^2+4)}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3.1138}{s+0.12}+\frac{3.1237}{s+0.04}-\frac{0.0099s+0.2487}{s^2+4}\right]$$
$$= -3.1138e^{-0.12t} + 3.1237e^{-0.04t} - 0.0099\cos 2t - 0.1244\sin 2t,$$
$$T_2 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s+0.08)^2-0.04^2]s(s^2+4)}\right] = \int_0^t T_1\,dt$$
$$= 25.9483e^{-0.12t} - 78.0925e^{-0.04t} - 0.0049\sin 2t + 0.0622\cos 2t + 52.083,$$
$$T_3 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+0.08)^2-0.04^2}\right] = 25e^{-0.08t}\sinh 0.04t,$$
$$T_4 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+0.08}{(s+0.08)^2-0.04^2}\right] = e^{-0.08t}\cosh 0.04t.$$

$\Rightarrow$

$$y_1(t) = 12T_1 + 0.96T_2 + 3T_3 = 50 - 49.9553e^{-0.12t} + 0.015e^{-0.04t} - 0.060\cos 2t - 1.497\sin 2t,$$
$$y_2(t) = 0.96T_2 + 150T_4 = 50 + 99.910e^{-0.12t} + 0.030e^{-0.04t} + 0.060\cos 2t - 0.005\sin 2t.$$

18.
$$y_1'' = -3y_1 + 3(y_2-y_1) + 8\sin t$$
$$y_2'' = -3(y_2-y_1) - 3y_2 - 8\sin t$$

$\Rightarrow$

$$s^2Y_1 - s - 3 = -3Y_1 + 3(Y_2-Y_1) + \frac{8}{s^2+1}$$
$$s^2Y_2 - s + 3 = -3(Y_2-Y_1) - 3Y_2 - \frac{8}{s^2+1}$$

변변 더하면, $Y_1+Y_2 = \frac{2s}{s^2+3}$.

첫번째 식에 대입하면,

$$Y_1 = \frac{s+3}{s^2+9} + \frac{6s}{(s^2+9)(s^2+3)} + \frac{8}{(s^2+9)(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+3} + \frac{2}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+1}$$

$\Rightarrow$

$$y_1(t) = \cos\sqrt{3}t + \frac{2}{3}\sin 3t + \sin t$$

$Y_1+Y_2 = \frac{2s}{s^2+3}$ 이므로 $y_1+y_2 = 2\cos\sqrt{3}t$,

$$y_2(t) = \cos\sqrt{3}t - \frac{2}{3}\sin 3t - \sin t$$

19.
$$2i_1 + 4(i_1-i_2) + i_1' = 195\sin t$$
$$4(i_2-i_1) + 4i_2 + 2i_2' = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 6+s & -4 \\ -4 & 8+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{195}{s^2+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2(s^2+10s+16)} \begin{bmatrix} 8+2s & 4 \\ 4 & 6+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{195}{s^2+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{195}{2(s^2+10s+16)} \begin{bmatrix} \frac{8+2s}{s^2+1} \\ \frac{4}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+10s+16)(s^2+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{65}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+17}{s^2+10s+16} - \frac{2s-3}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{65}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s+5)+7}{(s+5)^2-3^2} - \frac{2s-3}{s^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{65}[e^{-5t}(2\cosh 3t + \frac{7}{3}\sinh 3t) - (2\cos t - 3\sin t)]$$

$$= \frac{1}{65}(\frac{13}{6}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-8t} - 2\cos t + 3\sin t)$$

$\Rightarrow$

$$i_2(t) = 2 \cdot 195 T_1 = 13e^{-2t} - e^{-8t} - 12\cos t + 18\sin t$$

$T_1(0) = 0$ 이므로

$$T_2 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+10s+16)(s^2+1)}\right] = T_1',$$

$$i_1(t) = 4 \cdot 195T_1 + 195T_2$$

$$= 13e^{-2t} + 2e^{-8t} - 15\cos t + 42\sin t$$

20. input source를 $195\sin t - 195u(t-2\pi)\sin t$ 로 생각할 수 있다.
문제 19번의 해를 각각 y_1, y_2라 하면, second shifting 정리에 의해,

$$i_1(t) = y_1(t) - u(t-2\pi)y_1(t-2\pi) = \begin{cases} 13e^{-2t} + 2e^{-8t} - 15\cos t + 42\sin t & \text{if } 0 \le t \le 2\pi \\ 13(1-e^{4\pi})e^{-2t} + 2(1-e^{16\pi})e^{-8t} & \text{if } t > 2\pi \end{cases}$$

$$i_2(t) = y_2(t) - u(t-2\pi)y_2(t-2\pi) = \begin{cases} 13e^{-2t} - e^{-8t} - 12\cos t + 18\sin t & \text{if } 0 \le t \le 2\pi \\ 13(1-e^{4\pi})e^{-2t} - (1-e^{16\pi})e^{-8t} & \text{if } t > 2\pi \end{cases}$$

Chapter5. Review

1. Laplace transform을 쓰면 미분방정식을 대수식으로 바꿀 수 있다.

2. 1번 외에 연속이 아니거나 주기적으로 주어진 함수가 Laplace transform 에 의해 미분성이 좋은 함수로 변한다.

3. $\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = \int_0^\infty e^{-st}(c_1 f + c_2 g)dt$
$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + c_2 \int_-^\infty e^{-st} g(t)dt$
$= c_1 \mathcal{L}(f) + c_2 \mathcal{L}(g)$

4. 2번에서처럼 비제차 미방의 함수가 비연속적일 때나 편비분방정식의 특수한 경우에 사용한다.

5. 주어진 미방을 Laplace 변환해서 얻는 대수방정식.

6. Laplace transform이 의미를 가지려면 $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$의 값을 정할수 있어야 한다. 따라서, $|f(t)| < Me^{ct}$ 정도의 경계가 필요하다. 만약 $f(t) = e^{t^2}$으로 잡으면 이때 $\int \infty 0 e^{-st} e^{t^2} dt$의 적분값은 존재하지 않는다.

7. 불연속 함수를 나타낼 때 단위 계단 함수는 매우 유용하다.

8. 한점에서만 1을 정의하는 함수로 convolution함수의 표현에 많이 쓴다.

9. $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a},$
$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}, \cdots$

10. $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$
$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1}\mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

11. Laplace변환은 적분으로 표현되기 때문에 불연속 함수라도 적분구간을 나눔으로서 잘 정의된다.

12. $\tan t$함수의 경우 piecewise 연속이긴 하지만 Laplace 변환이 성립하기 위한 유한조건 $|f(t)| < Me^{ct}$을 만족하는 c 을 $(0, \frac{\pi}{2})$사이 에서 잡을수 없다.

13. $F(s) \to f(t)$
$\frac{F(s)}{s} \to \int_0^t f(\tau)d\tau = g(t)$
$\frac{F(s)}{s^2} \to \int_0^t g(\tau)d\tau$을 만족한다.

14. $\mathcal{L}(f(t)g(t)) \neq \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t))$이고,
$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$이다.

15. $F(s)$의 Laplace 역변환을 알 때, first shifting 정리는 $F(s-a)$의 역변환을 구할 때 유용하고, second shifting 정리는 $e^{-as}F(s)$의 역변환을 구할 때 유용하다.

16. $\sin \pi t \to \frac{\pi}{s^2+\pi^2}$
$e^{-t}\sin \pi t \to \frac{\pi}{(s+1)^2+\pi^2}$

17. $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \to \frac{1}{2}(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4})$

18. $\sin^2(\frac{\pi t}{2}) = \frac{1-\cos \pi t}{2} \to \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\pi^2})$

19. $\mathcal{L}(e^t u(t-2)) = e^{-2s}\frac{e^2}{s-1}$

20. $\mathcal{L}(t^2 u(t-\frac{1}{4})) = e^{-\frac{s}{4}}\mathcal{L}((t+\frac{1}{4})^2)$
$= e^{-\frac{s}{4}}(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{16s})$
$= e^{-\frac{s}{4}}(\frac{32+8s+s^2}{16s^3})$

21. $\mathcal{L}(t * e^{-3t}) = \mathcal{L}(t)\mathcal{L}(e^{-3t})$
$= \frac{1}{s^2}\frac{1}{s+3}$

22. $\mathcal{L}(e^{2t} * \cos 4t) = \mathcal{L}(e^{2t})\mathcal{L}(\cos 4t)$
$= \frac{1}{s-2}\frac{s}{s^2+16}$

23. $\cosh \frac{1}{10}t \to \frac{s}{s^2-0.1^2}$

24. $\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$
$\Rightarrow \mathcal{L}(t\cos t) = -\mathcal{L}(\cos t)'$
$= -(\frac{s}{s^2+1})'$
$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$
$\mathcal{L}(t\cos t + \sin t) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{s^2+1}$

25. $\frac{s}{s^2+9} \to \cos 3t$
$\frac{3}{s^2+9} \to \sin 3t$
$\Rightarrow$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{s+3}{s^2+9}) = \cos 3t + \sin 3t$

26. $\frac{1}{s^2-2s-8} = -\frac{1}{6}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-4}$
$\Rightarrow$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2-2s-8}) = -\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{4t}$

27. $\frac{1}{s} \to 1$
$\frac{1}{s^2} \to t$
$\Rightarrow$
$\mathcal{L}^{-1}(e^{-s}\frac{s+1}{s^2}) = u(t-1)t$

28. $\frac{6(s+1)}{s^4} = \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^4}$
$\Rightarrow$
$\mathcal{L}^{-1}(\frac{6(s+1)}{s^4}) = 3t^2 + t^3$

29. $\dfrac{s^2-6s+4}{s^3-3s^2+2s}=\dfrac{s^2-6s+4}{s(s^2-3s+2)}$
$=\dfrac{s^2-6s+4}{s(s-2)(s-1)}$
$=\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s-2}$
$\Rightarrow$
$f(t)=2+e^t-2e^{2t}$

30. $\dfrac{2s^2-3s+4}{(s^2+4)(s-3)}=\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{s-3}$
$\Rightarrow$
$f(t)=e^{3t}+\cos 2t$

31. $\dfrac{s^3-s^2-s+4}{s^4-5s^2+4}=\dfrac{s^3-s^2-s+4}{(s+2)(s-2)(s+1)(s-1)}$
$=\dfrac{1}{2}(-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{1}{s+2})$
$\Rightarrow$
$f(t)=\dfrac{1}{2}(-e^t+e^{2t}+e^{-t}+e^{-2t})$

32. $f(t)=\cos\theta\sin\omega t+\sin\theta\cos\omega t=\sin(\omega t+\theta)$

33. $\dfrac{3s+4}{s^2+4s+5}=\dfrac{3(s+2)-2}{(s+2)^2+1}$
$\Rightarrow f(t)=3e^{-2t}\cos t-2e^{-2t}\sin t$

34. $s^2Y-2.5s+Y=e^{-2s}$
$Y=\dfrac{e^{-2s}+2.5s}{s^2+1}$
$\Rightarrow\ y=u(t-2)\sin(t-2)+2.5\cos t$

35. $s^2Y-s+4Y=\dfrac{e^{-3s}}{s}$
$Y=\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{e^{-3s}}{s(s^2+4)}$
$\dfrac{1}{s(s^2+4)}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{s}-\dfrac{s}{s^2+4})$
$\to\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)=\dfrac{1}{2}\sin^2 t$
$\Rightarrow\ y=\cos 2t+\dfrac{1}{2}u(t-3)\sin^2(t-3)$

36. $s^2Y-16s+16-2sY+32+2Y=8\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}$
$Y=\dfrac{16s-48}{s^2-2s+2}+\dfrac{8s+8}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}$
$=16\dfrac{s-1-2}{(s-1)^2+1}+\dfrac{-s+4}{s^2-2s+2}+\dfrac{s}{s^2+2s+2}$
$\Rightarrow$
$y(t)=16e^t(\cos t-2\sin t)-e^t(\cos t-3\sin t)$
$+e^{-t}(\cos t-\sin t)$
$=e^t(15\cos t-29\sin t)+e^{-t}(\cos t-\sin t)$

37. $y''+9y=6\sin t-6u(t-\pi)\sin t$
$s^2Y+9Y=\dfrac{6}{s^2+1}+\dfrac{6e^{-\pi s}}{s^2+1}$
$Y=6\dfrac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+9)(s^2+1)},$
$\dfrac{1}{(s^2+9)(s^2+1)}=\dfrac{1}{8}(\dfrac{1}{s^2+1}-\dfrac{1}{s^2+9})$
$\Rightarrow$
$y=\dfrac{3}{4}[\sin t-\dfrac{1}{3}\sin 3t-u(t-\pi)(\sin t-\dfrac{1}{3}\sin 3t)]$
$=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(\sin t-\dfrac{1}{3}\sin 3t)=\sin^3 t & \text{if } 0\le t\le\pi\\ 0 & \text{if } t>\pi\end{cases}$

38. $s^2Y+3sY+2Y=\dfrac{2e^{-2s}}{s}$
$Y=\dfrac{2e^{-2s}}{s(s^2+3s+2)}$
$\dfrac{2}{s(s^2+3s+2)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$
$\to 1-e^{-\frac{3}{2}t}(\cosh\frac{1}{2}t+3\sinh\frac{1}{2}t)=1-2e^{-t}+e^{-2t}$
$\Rightarrow\ y=u(t-2)(1-2e^{-t+2}+e^{-2t+4})$

39. $sY_1=-Y_2+1,\ sY_2=Y_1$
$Y_1=\dfrac{s}{s^2+1},\ Y_2=\dfrac{1}{s^2+1}$
$\Rightarrow\ y_1=\cos t,\ y_2=\sin t$

40. $\begin{bmatrix} s-2 & -4\\ -1 & s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ -4\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{(s-2)^2-4}\begin{bmatrix} s-2 & 4\\ 1 & s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ -4\end{bmatrix}$
$=\dfrac{-4}{(s-2)^2-4}\begin{bmatrix}s+2\\ s-1\end{bmatrix}$
$\Rightarrow$
$y_1=-4e^{2t}(\cosh 2t+2\sinh 2t)=2(1-3e^{4t})$
$y_2=-4e^{2t}(\cosh 2t+\frac{1}{2}\sinh 2t)=-3e^{4t}-1$

41. $\begin{bmatrix} s-2 & 4\\ -1 & s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{s^2+s-2}\begin{bmatrix} s+3 & -4\\ 1 & s-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$
$=\dfrac{3}{s^2+s-2}\begin{bmatrix}s+3\\ 1\end{bmatrix}$
$\Rightarrow$
$y_1=3e^{-\frac{1}{2}t}(\cosh\frac{3}{2}t+\frac{5}{3}\sinh\frac{3}{2}t)=4e^t-e^{-2t}$
$y_2=3e^{-\frac{1}{2}t}(\frac{2}{3}\sinh\frac{3}{2}t)=e^t-e^{-2t}$

42. $\begin{bmatrix} s+2 & -3\\ -4 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{s^2+3s-10}\begin{bmatrix} s+1 & 3\\ 4 & s+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}$
$=\dfrac{1}{s^2+3s-10}\begin{bmatrix}4s+13\\ 3s+22\end{bmatrix}$
$\Rightarrow\ y_1=3e^{2t}+e^{-5t},\ y_2=4e^{2t}-e^{-5t}$

43. 왼쪽에서 오른쪽 방향을 양의 방향으로 잡으면, m_1,m_2가 각각 평형위치에서 y_1,y_2의 위치에 있을 때, k_1,k_2,k_3 스프링이 늘어난 길이는 각각 $y_1,y_2-y_1,-y_2$ 이다.
m_1에는 Hooke 법칙에 의해, k_1스프링에 의한 힘 k_1y_1이 음의 방향으로, k_2스프링에 의한 힘 $k_2(y_2-y_1)$이 양의 방향으로 작용하므로, m_1에 작용하는 힘은 $-k_1y_1+k_2(y_2-y_1)$ 이다. 그러므로 뉴턴 제 2법칙에 의해 $m_1y_1''=-k_1y_1+k_2(y_2-y_1)$ 이 성립한다.
마찬가지로 m_2에는 k_2스프링에 의한 힘 $k_2(y_2-y_1)$이 음의 방향으로, k_3스프링에 의한 힘 $-k_3y_2$가 양의 방향으로 작용하므로 m_2에 작용하는 힘은 $-k_2(y_2-$

$y_1) - k_3y_2$이어서 $m_2y_2'' = -k_2(y_2 - y_1) - k_3y_2$가 성립한다.

44. $y_1'' = -6y_1 + 4y_2$
$y_2'' = 4y_1 - 6y_2$
$y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_1'(0) = 1,\ y_2'(0) = -1$
$\Rightarrow$
$s^2Y_1 - 1 = -6Y_1 + 4Y_2$
$s^2Y_2 + 1 = 4Y_1 - 6Y_2$
변변 더하면 $Y_1 + Y_2 = 0$
첫번째 식에 대입하면 $Y_1 = \dfrac{1}{s^2+10}$
$\Rightarrow\ y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\sin\sqrt{10}t,\ y_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\sin\sqrt{10}t$

45. $Q(0) = 0$ 이므로 방정식은 $10i + 10\int_0^t idt = v(t)$.
$t = 0$ 을 대입하면, $i(0) = \dfrac{e(0)}{10} = 0$,
미분하면,
$10i' + 10i = v' = 10 - 10u(t-4)$
위의 적분방정식을 보면 v가 연속이므로 i도 연속임을 알 수 있다. 따라서 i에 관한 일차미방은 Laplace 변환할 수 있다.
$\Rightarrow$
$sY + Y = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-4s}}{s}$
$Y = \dfrac{1}{(s+1)s} - e^{-4s}\dfrac{1}{(s+1)s}$
$\dfrac{1}{(s+1)s} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} \to 1 - e^{-t}$
$\Rightarrow$
$i = 1 - e^{-t} - u(t-4)(1 - e^{-t+4})$
$= \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{if } 0 \le t \le 4 \\ e^{-t}(e^4 - 1) & \text{if } t > 4 \end{cases}$

46. 방정식은 $i' + \int_0^t idt = v$
v가 연속이 아니므로 i'는 연속이 아니다. 따라서 i에 관한 2차미방은 Laplace 변환할 수 없으므로 q에 대한 미방으로 바꾸어 q를 먼저 구한다.
$q'' + q = v = 1 - e^{-t} - u(t-\pi)(1 - e^{-t})$,
$q(0) = 0, q'(0) = i(0) = 0$
$\Rightarrow$
$(s^2+1)Y = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} - e^{-\pi s}(\dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-\pi}}{s+1})$
$\dfrac{1}{(s^2+1)s} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2+1} \to 1 - \cos t$
$\dfrac{1}{(s^2+1)(s+1)} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{s+1} - \dfrac{s-1}{s^2+1})$
$\to \dfrac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$
$\Rightarrow$
$q(t) = 1 - \cos t - \dfrac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$
$-u(t-\pi)[1 + \cos t - \dfrac{1}{2}e^{-\pi}(e^{-t+\pi} + \cos t - \sin t)]$
$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}(e^{-t} + \cos t + \sin t) & \text{if } 0 \le t \le \pi \\ \dfrac{1}{2}[(e^{-\pi} - 3)\cos t - (e^{-\pi} + 1)\sin t] & \text{if } t > \pi \end{cases}$
$i(t) = q'(t)$
$= \dfrac{1}{2}\begin{cases} e^{-t} + \sin t - \cos t & \text{if } 0 < t < \pi \\ (3 - e^{-\pi})\sin t - (e^{-\pi} + 1)\cos t & \text{if } t > \pi \end{cases}$

47. $160i + 500\int_0^t idt + 20i' = 37\sin 10t$
$t = 0$일 때, $160i(0) + 20i'(0) = 0$ 으로부터 $i'(0) = 0$.
미분하면, $20i'' + 160i' + 500i = 370\cos 10t$
$\Rightarrow$
$2s^2Y + 16sY + 50Y = \dfrac{37s}{s^2+10^2}$
$Y = \dfrac{37s}{2(s^2+8s+25)(s^2+100)}$
$= \dfrac{1}{26}(\dfrac{3s-8}{s^2+8s+25} - \dfrac{3s-32}{s^2+100})$
$= \dfrac{1}{26}(\dfrac{3(s+4)-20}{(s+4)^2+9} - \dfrac{3s-32}{s^2+100})$
$\Rightarrow$
$i = \dfrac{1}{26}[e^{-4t}(3\cos 3t - \frac{20}{3}\sin 3t)$
$- (3\cos 10t - \frac{32}{10}\sin 10t)]$
$= e^{-4t}(\frac{3}{26}\cos 3t - \frac{10}{39}\sin 3t) - \frac{3}{26}\cos 10t + \frac{8}{65}\sin 10t$

48. Kirchhoff 법칙에 의해 매순간 각 폐회로에서의 전압강하의 합은 0이므로
$Li_1' + R(i_1 - i_2) - v = 0$,
$R(i_2 - i_1) + \dfrac{1}{C}\int_a^t i_2dt = 0$ 이 성립한다.
두번째 식을 미분하면 i_1, i_2에 관한 미분 방정식을 얻을 수 있다.

$20i_1' + 10(i_1 - i_2) = 20$
$10(i_2' - i_1') + 20i_2 = 0$
$\Rightarrow$
$\begin{bmatrix} 2s+1 & -1 \\ -s & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/s \\ 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ s & 2s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/s \\ 2 \end{bmatrix}$
$= \dfrac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 2 + \dfrac{2}{s} \\ 2s+2 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow$
$i_1 = 2e^{-t}t + 2\int_0^t e^{-t}tdt = 2(1 - e^{-t}),\ i_2 = 2e^{-t}$

49. $i_1' + 0.8(i_1 - i_2) = \dfrac{4}{5}t + \dfrac{21}{25}$
$0.8(i_2' - i_1') + 4i_2 = 0$
$\Rightarrow$
$\begin{bmatrix} s+0.8 & -0.8 \\ -0.8s & 0.8s+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5s^2} + \frac{21}{25s} + 1 \\ -96/25 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} =$
$\dfrac{1}{s^2+5s+4}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ s & \frac{5}{4}s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{5s^2} + \frac{21}{25s} + 1 \\ -96/25 \end{bmatrix}$
$= \dfrac{1}{s^2+5s+4}\begin{bmatrix} s + 2 + \frac{5}{s} + \frac{4}{s^2} \\ -\frac{19}{5}s - 3 + \frac{4}{5s} \end{bmatrix}$
$T_1 = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+5s+4}\right]$
$= e^{-\frac{5}{2}t}(\cosh\frac{3}{2}t - \frac{5}{3}\sinh\frac{3}{2}t) = \frac{4}{3}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t}$
$T_2 = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+5s+4}\right] = \int_0^t T_1dt$
$= -\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t}$

$T_3 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+5s+4)}\right] = \int_0^t T_2 dt$
$= \frac{1}{12}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}$
$T_4 = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+5s+4)}\right] = \int_0^t T_3 dt$
$= -\frac{1}{48}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}t - \frac{5}{16}$
$\Rightarrow$
$i_1 = T_1 + 2T_2 + 5T_3 + 4T_4 = e^{-4t} + t$
$i_2 = -\frac{19}{5}T_1 - 3T_2 + \frac{4}{5}T_3 = -4e^{-4t} + \frac{1}{5}$

50. $5i_1' + 20(i_1 - i_2) = 60$
$30i_2' + 20(i_2' - i_1') + 20i_2 = 0$
$$\begin{bmatrix} 5s+20 & -20 \\ -20s & 50s+20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60/s \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{50(5s^2+14s+8)}\begin{bmatrix} 50s+20 & 20 \\ 20s & 5s+20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{60}{s} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{(5s+4)(s+2)}\begin{bmatrix} 60+24/s \\ 24 \end{bmatrix}$$
$\frac{1}{(5s+4)(s+2)} = \frac{1}{6}(\frac{5}{5s+4} - \frac{1}{s+2})$
$\rightarrow \frac{1}{6}(e^{-0.8t} - e^{-2t})$
$\Rightarrow$
$i_1 = 10(e^{-0.8t} - e^{-2t}) + 4\int_0^t e^{-0.8t} - e^{-2t} dt$
$= 5e^{-0.8t} - 8e^{-2t} + 3$
$i_2 = 4(e^{-0.8t} - e^{-2t})$

(i) 해로부터 $\lim_{t\to\infty} i_1 = 3$, $\lim_{t\to\infty} i_2 = 0$임을 알 수 있다.
(ii) v가 상수로서 일정하므로 평형상태의 전류는 상수일 것이고 시간이 지남에 따라 평형상태에 가까워져 갈 것이다. 평형상태의 전류는 미분방정식을 만족하는 상수해를 구하면, $20(i_1 - i_2) = 60$, $20i_2 = 0$으로부터 $i_1 = 3$, $i_2 = 0$

CHAPTER 6

Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants Linear Systems of Equations

Linear algebra includes the theory and application of linear systems of equations (briefly called linear systems), linear transformations, and eigenvalue problems, as they arise, for instance, from electrical networks, frameworks in mechanics, curve fitting and other optimization problems, systems of differential equations, and processes in statistics.

Linear algebra makes systematic use of **vectors** and **matrices** (Sec. 6.1) and, to a lesser extent, **determinants** (Sec. 6.6). This requires the study of properties of matrices as a central task by itself.

A matrix is a rectangular array of numbers. Matrices occur in various problems, for instance, as arrays of coefficients of equations. Matrices (and vectors) are useful because they enable us to consider an array of many numbers as a single object, denote it by a single symbol, and perform calculations with these symbols in a very compact form. The "mathematical shorthand" thus obtained is very elegant and powerful and is suitable for various practical problems.

The definitions of matrices and vectors and related concepts are given in Sec. 6.1, together with a discussion of the two basic algebraic operations for matrices, addition and scalar multiplication. Matrix multiplication follows in Sec. 6.2, where we also define special matrices and the operation of transposition of a matrix or vector.

The remaining sections center around **linear systems of equations.** This includes the Gauss elimination (Sec. 6.3), the important role of rank (Secs. 6.4, 6.5, 6.7), special vector spaces (Sec. 6.4), the basic existence and uniqueness problem for solutions (Sec. 6.5), determinants and their use in linear systems (Cramer's rule, Sec. 6.6), and the inverse of a matrix and its calculation by the Gauss–Jordan method (Sec. 6.7).

The last section (6.8) on vector spaces, inner product spaces, and linear transformations is more abstract.

Applications to practical problems are shown throughout the chapter.

NUMERICAL METHODS in Secs. 18.1–18.5 can be studied immediately after the corresponding material in this chapter.

Eigenvalue problems for matrices follow in Chap. 7.

Prerequisite for this chapter: None.
Sections that may be omitted in a shorter course: 6.5, 6.8.
References: Appendix 1, Part B.
Answers to problems: Appendix 2.

6.1. Basic Concepts. Matrix Addition, Scalar Multiplication

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & 15\end{bmatrix}$;
$\mathbf{B}+\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 1 & 15\end{bmatrix}$;
$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ 정의 불능(열의 크기 다름).

2. $4\mathbf{A}-8\mathbf{B}=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 28\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-16 & 40\\ 0 & 64\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & -36\\ 4 & -36\end{bmatrix}$;
$4(2\mathbf{B}-\mathbf{A})=4\left(\begin{bmatrix}-4 & 10\\ 0 & 16\end{bmatrix}-\mathbf{A}\right)=4\begin{bmatrix}-6 & 9\\ -1 & 9\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}-24 & 36\\ -4 & 36\end{bmatrix}$;
$8\mathbf{B}-4\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-16 & 40\\ 0 & 64\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 4\\ 4 & 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24 & 36\\ -4 & 36\end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ 정의 불능(열의 크기 다름);
$(\mathbf{C}^T)^T=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 0 & 0\\ 3 & -5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}6 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -5\end{bmatrix}=\mathbf{C}$;
$\mathbf{C}+\mathbf{C}^T$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름).

4. $6\mathbf{C}-5\mathbf{C}=\begin{bmatrix}36 & 0 & 18\\ 6 & 0 & -30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}30 & 0 & 15\\ 5 & 0 & -25\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}6 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -5\end{bmatrix}$;
$3\mathbf{C}^T+2\mathbf{D}^T=\begin{bmatrix}18 & 3\\ 0 & 0\\ 9 & -15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & -6\\ 0 & 8\\ -8 & 18\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}26 & -3\\ 0 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}$;
$\mathbf{C}-2\mathbf{C}^T$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름).

5. $5\mathbf{D}-3\mathbf{C}=\begin{bmatrix}20 & 0 & -20\\ -15 & 20 & 45\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18 & 0 & 9\\ 3 & 0 & -15\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}2 & 0 & -29\\ -18 & 20 & 60\end{bmatrix}$;
$5\mathbf{D}^T-3\mathbf{C}^T=\begin{bmatrix}20 & -15\\ 0 & 20\\ -20 & 45\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18 & 3\\ 0 & 0\\ 9 & -15\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}2 & -18\\ 0 & 20\\ -29 & 60\end{bmatrix}$.

6. $\mathbf{A}-0\mathbf{C}$ 와 $\mathbf{C}-0\mathbf{A}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름);
$0\mathbf{B}=\mathbf{0}\ (2\times 2)$.

7. $(\mathbf{B}^T-\mathbf{A}^T)^T=\left(\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 5 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 7\end{bmatrix}\right)^T$
$=\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 4 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$;
$\mathbf{B}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$;
$\mathbf{A}-\mathbf{A}^T=\mathbf{0}\ (2\times 2)$.

8. $6(\mathbf{C}^T+3\mathbf{D}^T)^T=6\left(\mathbf{C}^T-\begin{bmatrix}12 & -9\\ 0 & 12\\ -12 & 27\end{bmatrix}\right)^T$
$=6\begin{bmatrix}18 & -8\\ 0 & 12\\ -9 & 22\end{bmatrix}^T=6\begin{bmatrix}18 & 0 & -9\\ -8 & 12 & 22\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}108 & 0 & -54\\ -48 & 72 & 132\end{bmatrix}$;
$6\mathbf{C}+18\mathbf{D}=6\mathbf{C}+\begin{bmatrix}72 & 0 & -72\\ -54 & 72 & 162\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}108 & 0 & -54\\ -48 & 72 & 132\end{bmatrix}$.

9. $7\mathbf{a}-5\mathbf{b}=\begin{bmatrix}21 & 0 & 28\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & 40 & 10\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}26 & -40 & 18\end{bmatrix}$;
$7\mathbf{a}^T-5\mathbf{b}^T=\begin{bmatrix}21\\ 0\\ 28\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5\\ 40\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26\\ -40\\ 18\end{bmatrix}$.

10. $\mathbf{a}-\mathbf{c}^T=\mathbf{a}-\begin{bmatrix}9 & 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -5 & -3\end{bmatrix}$;
$\mathbf{c}-\mathbf{a}^T=\mathbf{c}-\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 5\\ 3\end{bmatrix}$;
$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름).

11. $3(\mathbf{c}-4\mathbf{d})=3\left(\mathbf{c}-\begin{bmatrix}8\\ -8\\ 24\end{bmatrix}\right)=3\begin{bmatrix}1\\ 13\\ -17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 39\\ -51\end{bmatrix}$;
$3\mathbf{c}-12\mathbf{d}=\begin{bmatrix}27\\ 15\\ 21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}24\\ -24\\ 72\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 39\\ -51\end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}^T-\mathbf{d}^T$
$=\begin{bmatrix}13 & -3 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -2 & 6\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}11 & -1 & 3\end{bmatrix}$;
$12(\mathbf{b}-\mathbf{d}^T)=12\begin{bmatrix}-3 & 10 & -4\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}-36 & 120 & -48\end{bmatrix}$.

13. $5(\mathbf{c}-2\mathbf{d})=5\left(\mathbf{c}-\begin{bmatrix}4\\ -4\\ 12\end{bmatrix}\right)=5\begin{bmatrix}5\\ 9\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\ 45\\ -25\end{bmatrix}$;
$10\mathbf{d}-5\mathbf{c}=\begin{bmatrix}20\\ -20\\ 60\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}45\\ 25\\ 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-25\\ -45\\ 25\end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ 와 $\mathbf{c}+\mathbf{c}^T$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름);
$\mathbf{c}-\mathbf{a}^T=\mathbf{c}-\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 5\\ 3\end{bmatrix}$.

15. $6\mathbf{a}-5\mathbf{a}=\begin{bmatrix}18 & 0 & 24\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15 & 0 & 20\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}3 & 0 & 4\end{bmatrix}=\mathbf{a}$;
$(\mathbf{a}^T)^T-\mathbf{a}=\mathbf{0}\ (1\times 3)$;
$\mathbf{a}^T-\mathbf{a}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름).

16. $(3\mathbf{c})^T-3\mathbf{c}^T=\begin{bmatrix}27\\ 15\\ 21\end{bmatrix}^T-\begin{bmatrix}27 & 15 & 21\end{bmatrix}$
$=\mathbf{0}\ (1\times 3)$;
$4\mathbf{c}-4\mathbf{c}^T$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름);
$\mathbf{b}+4\mathbf{d}^T=\mathbf{b}+\begin{bmatrix}8 & -8 & 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0 & 26\end{bmatrix}$.

17. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$
$=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23}\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}+a_{23}\end{bmatrix}$
$=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.
$(\mathbf{U}+\mathbf{V})+\mathbf{W}$

$$= \begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} & (u_{13}+v_{13})+w_{13} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} & (u_{23}+v_{23})+w_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) & u_{13}+(v_{13}+w_{13}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) & u_{23}+(v_{23}+w_{23}) \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{U} + (\mathbf{V}+\mathbf{W}).$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 & a_{13}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & a_{23}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} a_{11}+(-a_{11}) & a_{12}+(-a_{12}) & a_{13}+(-a_{23}) \\ a_{21}+(-a_{21}) & a_{22}+(-a_{22}) & a_{23}+(-a_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

$$c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} c(a_{11}+b_{11}) & c(a_{12}+b_{12}) & c(a_{13}+b_{13}) \\ c(a_{21}+b_{21}) & c(a_{22}+b_{22}) & c(a_{23}+b_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11}+cb_{11} & ca_{12}+cb_{12} & ca_{13}+cb_{13} \\ ca_{21}+cb_{21} & ca_{22}+cb_{22} & ca_{23}+cb_{23} \end{bmatrix}$$

$$= c\mathbf{A}+c\mathbf{B}.$$

$$c(k\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} c(ka_{11}) & c(ka_{12}) & c(ka_{13}) \\ c(ka_{21}) & c(ka_{22}) & c(ka_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ck)a_{11} & (ck)a_{12} & (ck)a_{13} \\ (ck)a_{21} & (ck)a_{22} & (ck)a_{23} \end{bmatrix} = (ck)\mathbf{A}.$$

$$1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} & 1a_{13} \\ 1a_{21} & 1a_{22} & 1a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

18. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \\ a_{41}+b_{41} & a_{42}+b_{42} & a_{43}+b_{43} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} & a_{41}+b_{41} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} & a_{42}+b_{42} \\ a_{13}+b_{13} & a_{33}+b_{33} & a_{33}+b_{33} & a_{43}+b_{43} \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

$$(c\mathbf{A})^T = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \\ ca_{41} & ca_{42} & ca_{43} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{21} & ca_{31} & ca_{41} \\ ca_{12} & ca_{22} & ca_{32} & ca_{42} \\ ca_{13} & ca_{23} & ca_{33} & ca_{43} \end{bmatrix}$$

$$= c\mathbf{A}^T.$$

19. (a) $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ 라 하면 모든 j,k 에 대해 $b_{jk} = a_{kj}$ 이다. 따라서 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ 이면 모든 j,k 에 대해 $a_{jk} = b_{jk} = a_{kj}$ 임을 의미한다; 반면에 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ 이면 모든 j,k 에 대해 $a_{jk} = -b_{jk} = -a_{kj}$ 임을 의미한다.
(b) $\mathbf{A} = \mathbf{C}+\mathbf{C}^T$ 라 하면 모든 j,k 에 대해 $a_{jk} = c_{jk}+c_{kj}$ 이고, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ 로 두면 모든 j,k 에 대해 $b_{jk} = a_{kj} = c_{kj}+c_{jk} = a_{jk}$ 이다. 따라서 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ 가 되어 $\mathbf{C}+\mathbf{C}^T$는 대칭 (symmetric) 행렬이다; 이번에는 $\mathbf{A} = \mathbf{C}-\mathbf{C}^T$ 라 하자. 그러면 모든 j,k 에 대해 $a_{jk} = c_{jk}-c_{kj}$ 이고, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ 라고 할 때 모든 j,k 에 대해 $b_{jk} = a_{kj} = c_{kj}-c_{jk} = -a_{jk}$ 이다. 따라서 $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$이 되어 $\mathbf{C}-\mathbf{C}^T$ 는 왜대칭 (skew-symmetric) 행렬이다; 이제 $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}+\mathbf{C}^T)$, $\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathbf{C}^T)$ 라 하면 $\mathbf{C} = \mathbf{S}+\mathbf{T}$ 이 되는데 $\mathbf{S}$ 는 대칭 행렬이고 $\mathbf{T}$ 는 왜대칭 행렬이다; 문제 1-8 의 행렬 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 는 다음과 같이 쪼개진다.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}+\mathbf{0};\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2.5 \\ 2.5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2.5 \\ -2.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $\mathbf{N} = a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+c\mathbf{C}+\cdots+m\mathbf{M}$ 이라면 $\mathbf{N}^T = a\mathbf{A}^T+b\mathbf{B}^T+c\mathbf{C}^T+\cdots+m\mathbf{M}^T$ 이다. 따라서 모두 대칭 행렬이면 $\mathbf{N}^T = a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+c\mathbf{C}+\cdots+m\mathbf{M} = \mathbf{N}$ 이 되어 $\mathbf{N}$ 도 대칭 행렬이 된다; 반면에 모두 왜대칭 행렬이면 $\mathbf{N}^T = -a\mathbf{A}-b\mathbf{B}-c\mathbf{C}-\cdots-m\mathbf{M} = -\mathbf{N}$ 이 되어 $\mathbf{N}$ 도 왜대칭 행렬이 된다.

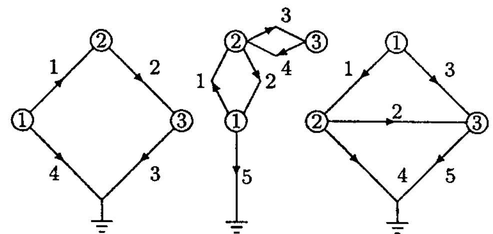
20. (a) 첫번째 점 (node) 에서 가지 (branch) 1이 나가고 가지 2,3이 들어 온다. 두번째 점에서 가지 2,4,5가 나간다. 세번째 점에서 가지 3이 나가고 가지 5,6은 들어 온다. 그러므로

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) $$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) 차례대로 그리면 다음과 같다.



(d) 첫번째 망 (mesh) 에 가지 1, 2, 4 가 있는데 가지 4 만 다른 향 (orientation) 을 가진다. 두번째 망에 가지 4, 5, 6 이 있는데 가지 5 만 다른 향을 가진다. 세번째 망에 가지 2, 3, 5 가 있는데 가지 2 만 다른 향을 가진다. 네번째 망에 가지 1, 3, 6 이 있는데 가지 6 만 다른 향을 가진다. 따라서,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 01 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}.$$

6.2. Matrix Multiplication

1. $\mathbf{Ba}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름);
$\mathbf{a}^T\mathbf{B} = [1 \quad 4 \quad 3]\,\mathbf{B} = [2 \quad 8]$;
$\mathbf{aB}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름).

2. $\mathbf{Ca} = \begin{bmatrix}34\\15\\11\end{bmatrix}$;
$\mathbf{C}^2\mathbf{a} = \mathbf{C}\begin{bmatrix}34\\15\\11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}248\\237\\102\end{bmatrix}$;
$\mathbf{C}^3\mathbf{a} = \mathbf{C}\begin{bmatrix}248\\237\\102\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2618\\1794\\1105\end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix}56 & 30 & 24\\30 & 45 & 9\\24 & 9 & 14\end{bmatrix}$;
$\mathbf{C}^T\mathbf{C} = \begin{bmatrix}4 & 6 & 2\\6 & 0 & 3\\2 & 3 & -1\end{bmatrix}\mathbf{C} = \begin{bmatrix}56 & 30 & 24\\30 & 45 & 9\\24 & 9 & 14\end{bmatrix} = \mathbf{C}^2$;
$\mathbf{CC}^T = \begin{bmatrix}56 & 30 & 24\\30 & 45 & 9\\24 & 9 & 14\end{bmatrix} = \mathbf{C}^2$.

4. $\mathbf{Ca} = \begin{bmatrix}34\\15\\11\end{bmatrix}$;
$\mathbf{Cd}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름);
$\mathbf{dC} = [34 \quad 24 \quad 17]$.

5. $\mathbf{a}^T\mathbf{d}$ 정의 불능(행과 열의 크기 다름);
$\mathbf{a}^T\mathbf{d}^T = 16$;
$\mathbf{da} = 16$;
$\mathbf{ad} = \begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\16 & 12 & 0\\12 & 9 & 0\end{bmatrix}$.

6. $5\mathbf{aa}^T = \begin{bmatrix}5 & 20 & 15\\20 & 80 & 60\\15 & 60 & 45\end{bmatrix}$;
$5\mathbf{a}^T\mathbf{a} = 130$;
$(\mathbf{a}^T - \mathbf{d})\mathbf{B} = [-3 \quad 1 \quad 3]\,\mathbf{B} = [-6 \quad 14]$.

7. $\mathbf{BB}^T = \mathbf{B}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\-3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & -6 & -3\\-6 & 4 & 2\\-3 & 2 & 1\end{bmatrix}$;
$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix}4 & -6\\-6 & 14\end{bmatrix}$;
$\mathbf{BB}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix}26 & -54\\-12 & 28\\-6 & 14\end{bmatrix}$.

8. $\mathbf{a}^T\mathbf{BB}^T\mathbf{d}^T = [-20 \quad 16 \quad 8]\,\mathbf{d}^T = -32$;
$\mathbf{dBB}^T\mathbf{a} = [34 \quad -12 \quad -6]\,\mathbf{a} = -32$;
$\mathbf{CB} = \begin{bmatrix}8 & 2\\12 & -15\\4 & -1\end{bmatrix}$;
$\mathbf{B}^T\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix}8 & 12 & 4\\2 & -15 & -1\end{bmatrix}$.

9. $\frac{1}{2}\mathbf{C}^2 - \mathbf{C} = \begin{bmatrix}28 & 15 & 12\\15 & 22.5 & 4.5\\12 & 4.5 & 7\end{bmatrix} - \mathbf{C}$
$= \begin{bmatrix}24 & 9 & 10\\9 & 22.5 & 1.5\\10 & 1.5 & 8\end{bmatrix}$;
$\mathbf{C}(\frac{1}{2}\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{C}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\3 & -1 & 1.5\\1 & 1.5 & -1.5\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}24 & 9 & 10\\9 & 22.5 & 1.5\\10 & 1.5 & 8\end{bmatrix}$;
$\mathbf{C} - \mathbf{C}^T = \mathbf{0}\ (3 \times 3)$.

10. (a) $\mathbf{A}$가 $m\times n$이면 $\mathbf{A}^T$는 $n\times m$이므로 $\mathbf{AA}^T$는 $m\times m$ 정방 (square) 행렬이다; $\mathbf{B} = \mathbf{AA}^T$라 두면 $\mathbf{B}^T = (\mathbf{AA}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T\mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T = \mathbf{B}$ 이므로 $\mathbf{B}$는 대칭행렬이다; 만약에 $\mathbf{AB}$가 대칭 행렬이면 $\mathbf{BA} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{AB}$ 가 되어 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$는 교환 가능 (commute) 하다; 반대로 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$가 교환 가능하면 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$ 가 되어 $\mathbf{AB}$가 대칭 행렬이다; $\mathbf{A}$가 대칭이면서 왜대칭인 행렬이면 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$와 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$가 성립하므로 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$가 되어 $2\mathbf{A} = \mathbf{0}$을 얻는다. 따라서 대칭이면서 왜대칭인 행렬은 영행렬 뿐이다.

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$;
$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$;
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

(c) $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1^2$는 상삼각 (upper triangular) 행렬이다; $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1^2$는 하삼각 (lower triangular) 행렬이다; 반면에 $\mathbf{U}_1 + \mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1$은 상삼각 행렬도 하삼각 행렬도 아니다;
$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$,
$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{bmatrix}$, $\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$,
$\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 3\end{bmatrix}$,
$\mathbf{U}_1^2 = \begin{bmatrix}1 & 8\\0 & 9\end{bmatrix}$,
$\mathbf{U}_1 + \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_1\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix}5 & 6\\6 & 9\end{bmatrix}$,
$\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 3\end{bmatrix}$,
$\mathbf{L}_1^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\8 & 9\end{bmatrix}$;
상삼각 행렬의 전치 (transpose) 행렬은 하삼각 행렬이므로 정확히 대칭적으로 나뉘는 것을 알 수 있다.

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$,
$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix}5 & 7\\6 & 8\end{bmatrix}$,
$(\mathbf{AB})^T = \begin{bmatrix}19 & 43\\22 & 50\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix}19 & 43\\22 & 50\end{bmatrix}$;

$m \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$와 $n \times m$ 행렬 $\mathbf{B}$에 대해 $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{D} = \mathbf{B}^T$, $\mathbf{E} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{F} = \mathbf{E}^T$, $\mathbf{G} = \mathbf{DC}$ 라 하면, 모든 j, k에 대해 $g_{jk} = \sum_{l=1}^{n} d_{jl}c_{lk} = \sum_{l=1}^{n} b_{lj}a_{kl}$, $e_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}b_{lk}$, $f_{jk} = e_{kj} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}b_{lj}$가 되어 $g_{jk} = f_{jk}$ 이므로, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{G} = \mathbf{F} = (\mathbf{AB})^T$이다.

(e) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 138 & 174 & 210 \\ 171 & 216 & 261 \\ 204 & 258 & 312 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 84 & 201 & 318 \\ 90 & 216 & 342 \\ 96 & 231 & 366 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 8 \\ 12 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 8 & 6 & 8 \\ 12 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

11. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 85 \\ 62 \\ 30 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \mathbf{Ap} = \begin{bmatrix} 44920 \\ 30940 \end{bmatrix}$.

12.
$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{N으로} \quad \text{T로} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{N에서} \\ \text{T에서} \end{array}$$

$\mathbf{x}_{j+1}^T = \mathbf{x}_j^T\mathbf{A}$, $j = 0, 1, \ldots$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.26 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.722 \\ 0.278 \end{bmatrix}$.

답. 2일 후 0.26, 3일 후 0.278.

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_{j+1}^T = \mathbf{x}_j^T\mathbf{A}$, $j = 0, 1, \ldots$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.7 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.49 \\ 0.91 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.427 \\ 0.973 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.4081 \\ 0.9919 \end{bmatrix}$.

14.
$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{구독으로} \quad \text{비구독으로} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.002 & 0.998 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{구독에서} \\ \text{비구독에서} \end{array}$$

$\mathbf{x}_{j+3}^T = \mathbf{x}_j^T\mathbf{A}^3$, $j = 0, 3, \ldots$; $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1200 \\ 98800 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1415 \\ 99585 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 1571 \\ 99429 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 1684 \\ 99316 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} 1766 \\ 99234 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{15} = \begin{bmatrix} 1825 \\ 99175 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{18} = \begin{bmatrix} 1868 \\ 99132 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_{21} = \begin{bmatrix} 1899 \\ 99101 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{24} = \begin{bmatrix} 1921 \\ 99079 \end{bmatrix}$, ...

답. 구독자 수는 증가한다.

15.
$$\begin{array}{l} \\ \text{I에서} \\ \text{II에서} \\ \text{III에서} \end{array} \begin{array}{c} \text{I로} \quad \text{II로} \quad \text{III로} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}^T$$

$\mathbf{x}_{j+5} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}_j$, $j = 1998, 2003, \ldots$; $\mathbf{x}_{1998} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 50 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_{2003} = \begin{bmatrix} 26 \\ 22 \\ 52 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{2008} = \begin{bmatrix} 23.0 \\ 23.2 \\ 53.8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_{2013} = \begin{bmatrix} 20.72 \\ 23.92 \\ 55.36 \end{bmatrix}$.

16. 10년 마다의 변화를 보게 된다.

17. $\mathbf{x}_{1998} = [30 \quad 20 \quad 50]^T$,
$\mathbf{x}_{2003} = [26 \quad 22 \quad 52]^T$,
$\mathbf{x}_{2008} = [23.0 \quad 23.2 \quad 53.8]^T$,
$\mathbf{x}_{2013} = [20.72 \quad 23.92 \quad 55.36]^T, \ldots,$
$\mathbf{x}_{2278} = [12.5001 \quad 25.0000 \quad 62.4999]^T$,
$\mathbf{x}_{2283} = [12.5 \quad 25.0 \quad 62.5]^T$;
$\mathbf{y} = [12.5 \quad 25 \quad 62.5]^T$,
$\mathbf{y}^T\mathbf{A} = [12.5 \quad 25 \quad 62.5]$;
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_0 = [1 \quad 1]^T$, $\mathbf{x}_1 = [1.3 \quad 0.7]^T$,
$\mathbf{x}_2 = [1.39 \quad 0.61]^T$, $\mathbf{x}_3 = [1.417 \quad 0.583]^T, \ldots,$
$\mathbf{x}_8 = [1.4285 \quad 0.5715]^T$,
$\mathbf{x}_9 = [1.4286 \quad 0.5714]^T$;
$\mathbf{y} = [\frac{10}{7} \quad \frac{4}{7}]^T$, $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = [\frac{10}{7} \quad \frac{4}{7}]^T$;
$\mathbf{x}_0 = [1 \quad 0]^T$, $\mathbf{x}_1 = [0.8 \quad 0.2]^T$,
$\mathbf{x}_2 = [0.74 \quad 0.26]^T$, $\mathbf{x}_3 = [0.722 \quad 0.278]^T, \ldots,$
$\mathbf{x}_6 = [0.7145 \quad 0.2855]^T$,
$\mathbf{x}_7 = [0.7143 \quad 0.2857]^T$;
$\mathbf{y} = [\frac{5}{7} \quad \frac{2}{7}]^T$, $\mathbf{y}^T\mathbf{A} = [\frac{5}{7} \quad \frac{2}{7}]^T$.

18. (a) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix}$ 이므로, $y_1 = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta$, $y_2 = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$ 을 얻는다. 따라서 주어진 선형 변환 (linear transformation) 은 원점으로 중심으로 θ 만큼 회전하는 변환을 나타낸다.

(b) 수학적 귀납법을 쓴다; 먼저 $k = 1$ 이면 당연하다. 이제 $k = n$ 일 때 성립한다고 하면, $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A}$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\mathbf{A}^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta & \cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta \\ -\cos n\theta\sin\theta - \sin n\theta\cos\theta & \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \end{bmatrix}.$$

여기서 삼각 함수의 합 공식을 적용하면 위 식은 다음과 같이된다.

$$\mathbf{A}^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{bmatrix}.$$

그러므로 $k = n + 1$ 일 때도 성립하므로 수학적 귀납법에 의해 다음이 모든 자연수 n 에 대해 성립한다.

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}.$$

따라서 삼각 함수의 합 공식을 다음과 같이 얻는다.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \mathbf{Dx}$ 에서

$y_1 = 3x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \frac{1}{2}x_3$ 을 얻는다; 상수 (scalar) 행렬은 모든 방향으로 같은 인수만큼 늘이거나 줄인다.

(e) 각각 x_1 축을 중심으로 θ 만큼, x_2 축을 중심으로 ϕ 만큼, x_3 축을 중심으로 ψ 만큼 회전시킨다.

6.3. Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -34 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 2 \\ 0 & -14 & -70 \end{array}\right]$,

답. $x = -3$, $y = 5$.

2. $\left[\begin{array}{cc|c} 0.4 & 1.2 & -2.0 \\ 1.7 & -3.2 & 8.1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.4 & 1.2 & -2.0 \\ 0 & -3.32 & 6.64 \end{array}\right]$,

답. $x = 1.0$, $y = -2.0$.

3. $\left[\begin{array}{cc|c} 3.0 & -0.5 & 0.6 \\ 1.5 & 4.5 & 6.0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0.4 & 1.2 & 0.6 \\ 0 & 9.5 & 11.4 \end{array}\right]$,

답. $x = 0.4$, $y = 1.2$.

4. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 3 & -12 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -9 & 26 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -12 \\ -5 & 2 & -9 & 26 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -12 \\ 0 & 44 & -13 & 52 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -223 & 892 \end{array}\right]$,

답. $x = 2$, $y = 0$, $z = -4$.

5. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ -2 & 4 & -6 & 40 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -8 & 58 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 8 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -50 & 250 \end{array}\right]$,

답. $x = 1$, $y = 3$, $z = -5$.

6. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \\ -9 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -17 & 4 & -12 \\ 0 & 17 & -4 & 56 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -17 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{array}\right]$,

답. 해가 없다.

7. $\left[\begin{array}{cc|c} 13 & 12 & -6 \\ -4 & 7 & -73 \\ 11 & -13 & 157 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 13 & 12 & -6 \\ 0 & 139 & -973 \\ 0 & 301 & -2107 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 13 & 12 & -6 \\ 0 & 139 & -973 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

답. $x = 6$, $y = -7$.

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & -5 & -21 \\ 3 & -6 & 1 & 7 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -17 & -68 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -8 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

답. 해가 무수히 많다 $(x = 2y + 1, z = 4)$.

9. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$,

답. 해가 없다.

10. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1.3 & -9.1 & 11.7 & 0 \\ -0.9 & 6.3 & -8.1 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

답. 해가 무수히 많다 $(x = 7y - 9z)$.

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -2 & -6 \\ 16 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 78 & 39 & 117 \end{array}\right]$

답. 해가 무수히 많다 $(x = 0, z = 3 - 2y)$.

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 12 & -26 & 34 & 18 \\ -30 & 65 & -85 & -46 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 12 & -26 & 34 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$

답. 해가 없다.

13. $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 5 & -10 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -14 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

답. 해가 무수히 많다 ($w = 1, x = -y + 2z$).

14. $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

답. 해가 무수히 많다 ($w = x - 2y, z = 3$).

15. $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & -34 & 16 & -10 & 4 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & -17 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ 8 & -34 & 16 & -10 & 4 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -14 & 4 & 2 & 20 \\ 0 & 10 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -42 & 8 & -10 & -44 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -14 & 4 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 48 & -4 & 72 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & -104 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -14 & 4 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 48 & -4 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & -196 & -1176 \end{array}\right]$

답. $w = 4, x = 0, y = 2, z = 6$.

16. $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 5 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -11 & 1 \\ 3 & 4 & -7 & 2 & -7 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -10 & 11 & -10 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & -16 & 11 & -16 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -10 & 11 & -10 \\ 0 & 7 & -16 & 11 & -16 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -9 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

답. 해가 무수히 많다 ($w = 0, x = 3z, y = 2z + 1$).

17. 동점: $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$,
상변 회로: $4I_1 + I_3 = 16$,
하변 회로: $4I_2 + I_3 = 32$,
답. $I_1 = 2$, $I_2 = 6$, $I_3 = 8$.

18. 남점: $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$
우변 회로: $12I_2 - 8I_3 = 24$
상변 회로: $4I_1 + 12I_2 = 36$
답. $I_1 = \dfrac{27}{11}$, $I_2 = \dfrac{24}{11}$, $I_3 = \dfrac{3}{11}$.

19. 동점: $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$
상변 회로: $-I_2R_1 + I_3R_2 = 0$
하변 회로: $I_2R_1 = E_0$
답. $I_1 = \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)E_0$, $I_2 = \dfrac{E_0}{R_1}$, $I_3 = \dfrac{E_0}{R_2}$.

20. (휘트스톤 브리지)
동점: $-I_0 + I_2 + I_3 = 0$
서점: $I_0 - I_1 - I_x = 0$
남점: $I + I_1 - I_2 = 0$
북점: $-I - I_3 + I_x = 0$
우상 회로: $-R_0I - R_2I_2 + R_3I_3 = 0$
좌상 회로: $R_0I - R_1I_1 + R_xI_4 = 0$
하변 회로: $R_1I_1 + R_2I_2 = E_0$
이제 $R_{12} = \frac{R_1}{R_2}$, $R_{x3} = \frac{R_x}{R_3}$ 이라 하고 위 연립 방정식을 I 에 대해 풀면 I_0, I_1, I_2, I_3, I_x 를 다음과 같이 얻는다.

$$I_0 = \frac{\left(\frac{R_{x3}}{R_2} + \frac{R_{12}}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)E_0 + (R_{12} - R_{x3})I}{(1 + R_{12})(1 + R_{x3})},$$

$$I_1 = \frac{\frac{E_0}{R_2} - I}{1 + R_{12}},\ I_2 = \frac{\frac{E_0}{R_2} + R_{12}I}{1 + R_{12}},$$

$$I_3 = \frac{\frac{E_0}{R_3} - R_{x3}I}{1 + R_{x3}},\ I_4 = \frac{\frac{E_0}{R_3} + I}{1 + R_{x3}}.$$

이제 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3}$, 즉 $R_{12} = R_{x3}$ 이면 다음과 같다.

$$I_0 = \frac{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{1 + R_{12}}E_0,$$

$$I_1 = \frac{\frac{E_0}{R_2} - I}{1 + R_{12}},\ I_2 = \frac{\frac{E_0}{R_2} + R_{12}I}{1 + R_{12}},$$

$$I_3 = \frac{\frac{E_0}{R_3} - R_{12}I}{1 + R_{12}},\ I_4 = \frac{\frac{E_0}{R_3} + I}{1 + R_{12}}.$$

좌상 회로에서 유도된 식에 이를 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$\left(R_0 + \frac{R_1 + R_x}{1 + R_{12}}\right)I = 0 \Rightarrow I = 0;$$

반대로 $I = 0$ 이면 I_0, I_1, I_2, I_3, I_x 가 다음과 같이 된다.

$$I_0 = \frac{\frac{R_{x3}}{R_2} + \frac{R_{12}}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}{(1+R_{12})(1+R_{x3})} E_0,$$
$$I_1 = \frac{\frac{E_0}{R_2}}{1+R_{12}}, \; I_2 = \frac{\frac{E_0}{R_2}}{1+R_{12}},$$
$$I_3 = \frac{\frac{E_0}{R_3}}{1+R_{x3}}, \; I_4 = \frac{\frac{E_0}{R_3}}{1+R_{x3}}.$$

좌상 회로에서 유도된 식에 이를 대입하고 정리하면 다음을 얻는다.

$$\frac{R_{x3} - R_{12}}{(1+R_{12})(1+R_{x3})} E_0 = 0 \Rightarrow R_{12} = R_{x3}$$
$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3};$$
$$I = 0 \iff \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_x}{R_3}.$$

21. (교통 흐름)
차로의 모든 지점에서 진입 차량수의 합은 진출 차량수의 합과 같다.
좌상점: $600 + 400 - x_1 - x_4 = 0$,
우상점: $x_1 + x_2 - 800 - 800 = 0$,
좌하점: $x_3 + x_4 - 600 - 1000 = 0$,
우하점: $1000 + 1200 - x_2 - x_3 = 0$.
이를 풀면 $x_1 = 1000 - x_4$, $x_2 = 600 + x_4$, $x_3 = 1600 - x_4$ 를 얻으므로 답이 유일하지 않다.

22. (시장 모델)
$D_1 = S_1$ 에서 $40 - 2P_1 - P_2 = 4P_1 - P_2 + 4$ 가 나오고, 마찬가지로 $D_2 = S_2$ 에서 $5P_1 - 2P_2 + 16 = 3P_2 - 4$ 가 나온다. 즉, 연립 방정식 $6P_1 = 36$, $-5P_1 + 5P_2 = 20$ 을 얻는다. 이를 풀면, $P_1 = 6$, $P_2 = 10$ 을 얻고 $D_1 = S_1 = 18$, $D_2 = S_2 = 26$ 을 얻는다.

23. (동치 관계)
(a) 행 교환이 동치 관계를 만족한다.
교환한 두 행을 다시 교환하면 원래 행렬이 된다 : 동일률 (reflexivity);
A 의 행들을 교환하여 **B** 를 얻었으므로, 그 과정을 뒤집으면 **B** 에서 **A** 를 얻는다 : 대칭율 (symmetry);
A 의 행들을 교환하여 **B** 를 얻고 **B** 의 행들을 교환하여 **C** 를 얻었으므로, 그 과정을 모두 **A** 에 적용하면 **C** 를 얻는다 : 추이율 (transitivity).
(b) 한 행에 다른 행의 상수 배를 더하는 것이 동치 관계를 만족한다.
한 행에 다른 행의 0 배를 더하면 원래 행렬이 된다 : 동일률;
A 의 한 행 (i 번째) 에 다른 행 (j 번째) 의 상수 (c) 배를 더하여 **B** 를 얻었으므로, **B** 의 한 행 (i 번째) 에 다른 행 (j 번째) 의 상수 ($-c$) 배를 더하면 **A** 를 얻는다 : 대칭율;
A 의 한 행에 다른 행의 상수 배를 더하여 **B** 를 얻고 **B** 의 한 행에 다른 행의 상수 배를 더하여 **C** 를 얻었으므로, 그 과정을 모두 **A** 에 적용하면 **C** 를 얻는다 : 추이율.
(c) 한 행을 0 아닌 수로 상수 배를 하는 것이 동치 관계를 만족한다.
한 행에 1 배를 하면 원래 행렬이 된다 : 동일률;
A 의 한 행을 0 아닌 수 (c) 로 상수 배를 하여 **B** 를 얻었으므로, **B** 의 그 행을 ($\frac{1}{c}$) 배를 하면 **A** 를 얻는다 : 대칭율;
A 의 한 행을 0 아닌 수로 상수 배를 하여 **B** 를 얻고 **B** 의 한 행을 0 아닌 수로 상수 배를 하여 **C** 를 얻었으므로, 그 과정을 모두 **A** 에 적용하면 **C** 를 얻는다 : 추이율.
(d) 행에 관한 동치는 동치 관계이다.
행에 관한 동치는 기본 연산이 유한번 적용되어 얻어지는 것이고 각각의 기본 연산이 동치 관계이므로 자명하다.

24. (기본 행렬)
(a) **A** 가 $4 \times n$ 행렬이라 하고, 이 행렬의 행들을 차례대로 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ 라 하자. 즉,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

이고 $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ 는 $1 \times n$ 행렬이다. 그러면,

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ -5\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ 8\mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

가 되므로, 각각 두번째 행과 세번째 행을 교환하는 기본 연산, 세번째 행에 첫번째 행의 -5 배를 더하는 기본 연산, 네번째 행을 8 배 하는 기본 연산이다;

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{E}_1\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_3 & v_2 & v_4 \end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{E}_2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & -5v_1 + v_3 & v_4 \end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{E}_3\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 8v_4 \end{bmatrix}^T;$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{E}_2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -5a_{11} + a_{31} & -5a_{12} + a_{32} & -5a_{13} + a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 8a_{41} & 8a_{42} & 8a_{43} \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} : 4 \times 2, \; \mathbf{a}_i \; (i = 1, \ldots, 4) : 1 \times 2,$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{E}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ -5\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ -5\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \\ 8\mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ -5a_{11} + a_{21} & -5a_{12} + a_{22} \\ 8a_{41} & 8a_{42} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ 8\mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{E}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ -5\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \\ 8\mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ -5\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \\ 8\mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -5a_{11} + a_{31} & -5a_{12} + a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ 8a_{41} & 8a_{42} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$.

(b) $\mathbf{I}_4$ 의 두번째 행과 세번째 행을 교환하면 $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{I}_4$ 의 세번째 행에 첫번째 행의 -5 배를 더하면 $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{I}_4$ 의 네번째 행을 8 배 하면 $\mathbf{E}_3$ 이다;

$\mathbf{A}$ 에 기본 연산을 한 번 시행하여 $\mathbf{M}$ 을 얻었다고 하자. 이제 그 기본 연산을 $\mathbf{I}_n$ 에 적용하여 얻어지는 기본 행렬 $\mathbf{E}$ 를 $\mathbf{A}$ 에 곱하는 것은 이 행렬에 원래의 기본 연산을 적용하는 것이므로 $\mathbf{M} = \mathbf{EA}$ 를 얻는다.

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ (단 $a_{11} \neq 0$)

$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ (단 $a_{11} \neq 0$)

$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$, $m_{32} = \dfrac{a_{32} - m_{31}a_{12}}{a_{22} - m_{21}a_{12}}$

(단 $a_{22} - m_{21}a_{12} \neq 0$);

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ m_{32}m_{21} - m_{31} & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

25. (가우스 소거법)
pivoting 이 없으면 과정 중에 0 이 발생하는 경우 더 이상 진행할 수 없게 되어 풀 수 있는 문제도 못 풀게 된다.

6.4. Rank of a Matrix. Linear Independence. Vector Space

1. $\mathbf{u} = [1 \ \ 0 \ \ 0]$, $\mathbf{v} = [1 \ \ 1 \ \ 0]$, $\mathbf{w} = [1 \ \ 1 \ \ 1]$ 이라 두자. 만약 어떤 실수 a, b, c 가 있어서 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 이제 $\mathbf{e}_3 = [0 \ \ 0 \ \ 1]^T$ 라고 하면, $\mathbf{ue}_3 = 0$, $\mathbf{ve}_3 = 0$, $\mathbf{we}_3 = 1$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{0e}_3 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{u})\mathbf{e}_3 = c$ 를 얻는다. 또한 $\mathbf{e}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 0]^T$ 라고 하면 $\mathbf{ue}_2 = 0$, $\mathbf{ve}_2 = 1$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{0e}_2 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w})\mathbf{e}_2 = b$ 를 얻는다. 마찬가지로 $\mathbf{e}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0]^T$ 라고 하면 $\mathbf{ue}_1 = 1$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{0e}_1 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w})\mathbf{e}_1 = a$ 를 얻는다. 즉 $a = b = c = 0$ 만이 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 을 만족시키는 실수가 되므로 주어진 세 벡터는 일차 독립 (linearly independent) 이다.
2. $\mathbf{u} = [7 \ \ -3 \ \ 11 \ \ -6]$,$\mathbf{v} = [-56 \ \ 24 \ \ -88 \ \ 48]$ 이라 하면 $\mathbf{v} = -8\mathbf{u}$ 가 성립한다. 따라서 $a = 8, b = 1$ 이면 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 을 만족하므로 주어진 두 벡터는 일차 종속 (linearly dependent) 이다.
3. $\mathbf{u} = [-1 \ \ 5 \ \ 0]$, $\mathbf{v} = [16 \ \ 8 \ \ -3]$, $\mathbf{w} = [-64 \ \ 56 \ \ 9]$ 이라 하면 $16\mathbf{u} + \mathbf{v} = [0 \ \ 88 \ \ -3]$, $-64\mathbf{u} + \mathbf{w} = [0 \ \ -264 \ \ 9]$ 이다. 따라서 $a = -16$, $b = 3$, $c = 1$ 이면 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 을 만족하므로 주어진 세 벡터는 일차 종속이다.
4. $\mathbf{u} = [1 \ \ -1 \ \ 1]$, $\mathbf{v} = [1 \ \ 1 \ \ -1]$, $\mathbf{w} = [-1 \ \ 1 \ \ 1]$, $\mathbf{p} = [0 \ \ 1 \ \ 0]$ 이라 하면 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 2\mathbf{p}$ 이다. 따라서 $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -2$ 이면 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} + d\mathbf{p} = \mathbf{0}$ 을 만족하므로 주어진 네 벡터는 일차 종속이다.
5. $\mathbf{u} = [2 \ \ -4]$, $\mathbf{v} = [1 \ \ 9]$, $\mathbf{w} = [3 \ \ 5]$ 이라 하면 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$ 이다. 따라서 $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ 이면 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 을 만족하므로 주어진 세 벡터는 일차 종속이다.
6. $\mathbf{u} = [1 \ \ 2 \ \ 3]$, $\mathbf{v} = [0 \ \ 0 \ \ 0]$, $\mathbf{w} = [5 \ \ 5 \ \ 1]$ 이라 하자. 여기서 $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$ 일 때, $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 을 만족하므로 주어진 세 벡터는 일차 종속이다.
7. $\mathbf{u} = [1 \ \ 9 \ \ 9 \ \ 8]$, $\mathbf{v} = [2 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 3]$, $\mathbf{w} = [2 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 8]$ 이라 두자. 만약 어떤 실수 a, b, c 가 있어서 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 여기서 $\mathbf{e}_3 = [0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0]^T$ 라고 하면 $\mathbf{ue}_3 = 9$, $\mathbf{ve}_3 = 0$, $\mathbf{we}_3 = 0$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{0e}_3 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{u})\mathbf{e}_3 = a$ 를 얻는다. 또한 $\mathbf{e}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]^T$ 라고 하면 $\mathbf{ve}_1 = 2$, $\mathbf{we}_1 = 2$ 이므로 $0 = \mathbf{0e}_1 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w})\mathbf{e}_1 = 2b + 2c$ 를 얻는다. 마찬가지로 $\mathbf{e}_4 = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1]^T$ 라고 하면 $\mathbf{ve}_4 = 3$, $\mathbf{we}_4 = 8$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{0e}_4 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w})\mathbf{e}_4 = 3b + 8c$ 를 얻는다. 여기서 얻어지는 연립방정식 $2b + 2c = 0$, $3b + 8c = 0$ 의 해는 $b = c = 0$ 이다. 즉 $a = b = c = 0$ 만이 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 을 만족시키는 실수가 되므로 주어진 세 벡터는 일차 독립이다.
8. $\mathbf{u} = [\frac{1}{4} \ \ 0 \ \ -\frac{1}{4}]$, $\mathbf{v} = [0 \ \ \frac{1}{2} \ \ -\frac{1}{2}]$, $\mathbf{w} = [\frac{1}{3} \ \ -\frac{1}{3} \ \ 0]$ 이라 하면 $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} = 4\mathbf{u}$ 이다. 따라서 $a = 4$, $b = -2$, $c = -3$ 이면 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 을 만족하므로 주어진 세 벡터는 일차 종속이다.
9. $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
답. 계수(rank)는 1.
10. $m^2 \neq n^2$이므로 m, n중에서 하나는 0이 아니다. 만약 m이 0이 아니면
$\begin{bmatrix} m & n & p \\ n & m & p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} m & n & p \\ 0 & m^2 - n^2 & p(m-n) \end{bmatrix}$이고,

n이 0이 아니면

$\begin{bmatrix} m & n & p \\ n & m & p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n & m & p \\ 0 & n^2-m^2 & p(n-m) \end{bmatrix}$이다.

답. 계수는 2.

11. $\begin{bmatrix} 8 & -3 & 7 \\ -20 & -17 & -15 \\ 11 & 2 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 0 & -49 & 5 \\ 0 & 49 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & -3 & 7 \\ 0 & -49 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

답. 계수는 2.

12. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

답. 계수는 3.

13. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 \\ 10 & 0 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 8 \\ 0 & 10 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

답. 계수는 2.

14. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 28 & 2 & -36 \\ 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 28 & 2 & -36 \\ 0 & 0 & 120 & 108 \end{bmatrix}$

답. 계수는 3.

15. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ -3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

답. 계수는 2.

16. $\begin{bmatrix} 0 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

답. 계수는 3.

17. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -18 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \\ 0 & -6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & -27 \\ 0 & 0 & -3 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 12 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 153 \end{bmatrix}$

답. 계수는 4.

18. $k \neq 0$ 일 때, $\mathbf{v} = [0 \quad 0 \quad k]^T$ 는 조건 $4v_2 + v_3 = k$ 를 만족하지만 $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}$ 는 $4w_2 + w_3 = 2k \neq k$ 가 되어 조건을 만족하지 않는다; $k = 0$ 일 때, 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족한다면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1,2,3$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이므로, $4u_2 + u_3 = 4(\alpha v_2 + \beta w_2) + \alpha v_3 + \beta w_3 = \alpha(4v_2 + v_3) + \beta(4w_2 + w_3) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 이 되어 조건을 만족한다; $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\mathbf{v} = [0 \quad 1 \quad -4]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. $\mathbf{e}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]$ 라 하면, $\mathbf{e}_1\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{e}_1\mathbf{v} = 0$ 이 된다. 따라서 $a = 0$ 이 되고, $\mathbf{v}$ 가 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 $b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터에 대해 $\mathbf{x} = w_1\mathbf{u} + w_2\mathbf{v}$ 라 두면, $x_1 = w_1$, $x_2 = w_2$, $x_3 = -4w_2 = w_3$ 가 된다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 의 일차 결합 (linear combination) 으로 나타낼 수 있다.
답. $k = 0$ 이면 차원 (dimension) 2 인 벡터 공간 (vector space) 이고 기저 (basis) 는 $[1 \quad 0 \quad 0]^T$, $[0 \quad 1 \quad -4]^T$ 이다. 그러지 않으면 벡터 공간이 아니다.

19. 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족한다면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1,2,3$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이므로, $2u_1 + 3u_3 = 2(\alpha v_1 + \beta w_1) + 3(\alpha v_3 + \beta w_3) = \alpha(2v_1 + 3v_3) + \beta(2w_1 + 3w_3) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 이 되어 조건을 만족한다; $\mathbf{u} = [0 \quad 1 \quad 0]^T$, $\mathbf{v} = [3 \quad 0 \quad -2]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. $\mathbf{e}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$ 라 하면, $\mathbf{e}_2\mathbf{u} = 1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{v} = 0$ 이 된다. 따라서 $a = 0$ 이 되고, $\mathbf{v}$ 가 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 $b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터에 대해 $\mathbf{x} = w_2\mathbf{u} + \frac{1}{3}w_1\mathbf{v}$ 라 두면, $x_1 = w_1$, $x_2 = w_2$, $x_3 = -\frac{3}{2}w_1 = w_3$ 가 된다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.
답. 2 차원 벡터 공간;
기저 $[0 \quad 1 \quad 0]^T$, $[3 \quad 0 \quad -2]^T$.

20. $\mathbf{v} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ 는 조건을 만족하지만 $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$ 는 $w_2 + w_4 = -1 < 0$ 이 되어 조건을 만족하지 않는다.
답. 벡터 공간이 아니다.

21. $\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ 는 조건을 만족하지만 $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$ 는 모든 성분이 음수이므로 조건을 만족하지 않는다.
답. 벡터 공간이 아니다.

22. 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족한다면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1, \ldots, n$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이고, 특히 $j = 1, \ldots, n-2$ 에 대해서 $v_j = w_j = 0$ 이므로 $u_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n-2)$ 를 얻는다; $\mathbf{u} = [0 \quad \cdots \quad 1 \quad 0]^T$, $\mathbf{v} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. $\mathbf{e} = [0 \quad \cdots \quad 1 \quad 0]$ 라 하면, $\mathbf{eu} = 1$, $\mathbf{ev} = 0$ 이 된다. 따라서 $a = 0$ 이 되고, $\mathbf{v}$ 가 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 $b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터에 대해 $\mathbf{x} = w_{n-1}\mathbf{u} + w_n\mathbf{v}$ 라 두면, $x_j = 0 = w_j$ $(j = 1, \ldots, n-2)$, $x_{n-1} = w_{n-1}$, $x_n = w_n$ 이 된다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 의 일차 결합으

로 나타낼 수 있다.
답. 2 차원 벡터 공간;
기저 $[0 \ \cdots \ 1 \ 0]^T$, $[0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T$.

23. 실수 집합에서 벡터는 실수이고 그 벡터에 실수 배를 해서 더한 것도 실수이다; $\mathbf{u} = 1$ 이라 하자. 이 벡터는 주어진 조건을 만족하고 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 홀로 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족할 때, $\mathbf{x} = w_1\mathbf{u}$ 라 두면, $x_1 = w_1$ 이 된다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.
답. 1 차원 벡터 공간; 기저 1.

24. 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족한다면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1,2,3$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이므로, $3u_1 - 2u_2 + u_3 = 3(\alpha v_1 + \beta w_1) - 2(\alpha v_2 + \beta w_2) + (\alpha v_3 + \beta w_3) = \alpha(3v_1 - 2v_2 + v_3) + \beta(3w_1 - 2w_2 + w_3) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$, $4u_1 + 5u_2 = 4(\alpha v_1 + \beta w_1) + 5(\alpha v_2 + \beta w_2) = \alpha(4v_1 + 5v_2) + \beta(4w_1 + 5w_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 이 되어 조건을 만족한다; $\mathbf{u} = [5 \ \ -4 \ \ -23]^T$ 이라 하자. 이 벡터는 주어진 조건을 만족하고 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 홀로 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족할 때, $\mathbf{x} = \frac{1}{5}w_1\mathbf{u}$ 라 두면, $x_1 = w_1$, $x_2 = -\frac{4}{5}w_1 = w_2$, $x_3 = -\frac{23}{5}w_1 = -3w_1 + 2\left(-\frac{4}{5}w_1\right) = w_3$ 이 된다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.
답. 1 차원 벡터 공간; 기저 $[5 \ \ -4 \ \ -23]^T$.

25. $\mathbf{v} = [1 \ \ 1]^T$ 는 조건을 만족하지만 $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}$ 는 모든 성분의 절대값이 2가 되어 조건을 만족하지 않는다.
답. 벡터 공간이 아니다.

26. (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$
$= [\mathbf{a}^1 \ \ \mathbf{a}^2 \ \ \mathbf{a}^3 \ \ \mathbf{a}^4]$.
실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. $\mathbf{e}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]^T$ 라 하면, $\mathbf{e}_1\mathbf{a}_1 = 1$, $\mathbf{e}_1\mathbf{a}_2 = 0$ 이 된다. 따라서 $a = 0$ 이 되고, $\mathbf{a}_2$ 가 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 $b = 0$ 을 얻는다. 두 벡터는 일차 독립이다. $0 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2 - 1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ 이므로 세 벡터는 일차 종속이다. 따라서 $\mathbf{A}$ 의 계수는 2 이다 (정의); 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{a}^1 + b\mathbf{a}^2 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. $\mathbf{e}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0]$ 라 하면, $\mathbf{e}_1\mathbf{a}^1 = 1$, $\mathbf{e}_1\mathbf{a}^2 = 0$ 이 된다. 따라서 $a = 0$ 이 되고, $\mathbf{a}^2$ 가 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 $b = 0$ 을 얻는다. 두 벡터는 일차 독립이다. $0 \cdot \mathbf{a}^1 + 0 \cdot \mathbf{a}^2 + 1 \cdot \mathbf{a}^3 = \mathbf{0}$ 이므로 세 벡터는 일차 종속이다. $0 \cdot \mathbf{a}^1 + 0 \cdot \mathbf{a}^2 + 1 \cdot \mathbf{a}^3 + 1 \cdot \mathbf{a}^4 = \mathbf{0}$ 이므로 네 벡터는 일차 종속이다. 따라서 $\mathbf{A}$ 의 계수는 2 이다 (정리 1).
(b) $\operatorname{rank}\mathbf{A} = \operatorname{rank}\mathbf{A}^T$ (정리 1), $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, $\operatorname{rank}\mathbf{AB} = \operatorname{rank}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$;
정방 행렬은 행과 열의 갯수가 같다. 행이 일차 독립이면 계수가 행의 수가 되는데 이는 열의 수와 같으므로 열도 일차독립이 된다. 역으로 열이 일차 독립이면 앞에서와 마찬가지로 행이 일차 독립이 된다;
정방 행렬이 아니면 행이 많거나 열이 많다. 행렬의 계수는 행과 열의 최소값보다 클 수 없고 행이나 열의 갯수가 이 값보다 크다. 따라서 행이 아니면 열이 일차 종속이 된다.
(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\operatorname{rank}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{rank}\mathbf{B} = 2$, $\operatorname{rank}\mathbf{AB} = 0$.
(d) (c) 의 행렬에 대해 적용하자.
$m = 2$, $n = 4$, $p = 3$,
$r_\mathbf{A} = 1$, $r_\mathbf{B} = 2$, $r = 0$,
$r_\mathbf{A} + r_\mathbf{B} - n = -1 < r = 0 < \min\{r_\mathbf{A}, r_\mathbf{B}\} = 1$;
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$m = 2$, $n = 3$, $p = 4$,
$r_\mathbf{A} = 2$, $r_\mathbf{B} = 3$, $r = 2$,
$r_\mathbf{A} + r_\mathbf{B} - n = 2 = r = \min\{r_\mathbf{A}, r_\mathbf{B}\}$.
(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\operatorname{rank}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{rank}\mathbf{B} = 1$,
$\operatorname{rank}\mathbf{A}^2 = 1$, $\operatorname{rank}\mathbf{B}^2 = 0$.

27. (행 공간)
기본 연산은 한 행에 다른 행의 상수 배를 더하거나 두 행을 서로 교환하거나 한 행에 0 아닌 상수를 곱하는 것이므로 원래 행들에 의해 생성된 공간과 같은 공간을 생성한다. 따라서 행에 관해 동치인 두 행렬의 행 공간은 같다.

28. (행과 열 공간)
계수가 1이므로 $\mathbf{0}$ 아닌 벡터 하나를 택하면 된다.
답. 행공간의 기저: $[2 \ \ -1]$,
열공간의 기저: $[4 \ \ -1 \ \ 3]^T$.

29. (행과 열 공간)
계수가 2이므로 일차 독립인 벡터 두개를 택하면 된다; $\mathbf{u} = [3 \ \ 1 \ \ 4]$, $\mathbf{v} = [0 \ \ 5 \ \ 8]$ 이라 두자. 만약 어떤 실수 a, b 가 있어서 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 여기서 $\mathbf{e}_1 = [1 \ \ 0 \ \ 0]^T$ 라고 하면 $\mathbf{ue}_1 = 3$, $\mathbf{ve}_1 = 0$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{0e}_1 = (a\mathbf{u} + b\mathbf{v})\mathbf{e}_1 = 3a$, 즉 $a = 0$ 을 얻는다. 벡터 $\mathbf{v}$ 는 $\mathbf{0}$ 가 아니므로 $b = 0$ 이 된다. 따라서 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{u} = [3 \ \ 0 \ \ -3 \ \ 1]^T$, $\mathbf{v} = [1 \ \ 5 \ \ 4 \ \ 2]^T$ 이라 두자. 만약 어떤 실수 a, b 가 있어서 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 여기서 $\mathbf{e}_2 = [0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0]$ 라고 하면 $\mathbf{e}_2\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{e}_2\mathbf{v} = 5$ 이 성립한다. 따라서 $0 = \mathbf{e}_2\mathbf{0} = \mathbf{e}_2(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = 5b$, 즉 $b = 0$ 을 얻는다. 벡터 $\mathbf{u}$ 는 $\mathbf{0}$ 가 아니므로 $a = 0$ 이 된다. 따라서 두 벡터는 일차 독립이다.
답. 행공간의 기저: $[3 \ \ 1 \ \ 4]$, $[0 \ \ 5 \ \ 8]$,
열공간의 기저: $[3 \ \ 0 \ \ -3 \ \ 1]^T$, $[1 \ \ 5 \ \ 4 \ \ 2]^T$.

30. (부분 공간)
$V = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$,
$W = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

6.6. Determinants. Cramer's Rule

1. (2차 행렬식)
첫번째 행에 대해 전개하면 $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 이고, 두번째 행에 대해 전개하면 $D = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ 이고, 첫번째 열에 대해 전개하면 $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 이고, 두번째 열에 대해 전개하면 $D = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ 이므로, 모두 같은 값을 가진다.

2. (3차 행렬식)
두번째 행에 대해 전개하면,
$$D = -2\begin{vmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1 & 3\\-1 & 0\end{vmatrix}$$
$$= -2(6+0) + 6(2+0) - 4(0+3) = -12;$$
세번째 행에 대해 전개하면,
$$D = -1\begin{vmatrix}3 & 0\\6 & 4\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 4\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{vmatrix}$$
$$= -1(12+0) - 0(4+0) + 2(6-6) = -12;$$
첫번째 열에 대해 전개하면,
$$D = 1\begin{vmatrix}6 & 4\\0 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 0\\6 & 4\end{vmatrix}$$
$$= 1(12+0) - 2(6+0) - 1(12+0) = -12;$$
두번째 열에 대해 전개하면,
$$D = -3\begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & 2\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 4\end{vmatrix}$$
$$= -3(4+4) + 6(2+0) - 0(4-0) = -12;$$
$$D = \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 6 & 4\\-1 & 0 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 0 & 4\\0 & 3 & 2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$$
$$= -12.$$

3. (소행렬, 여인자)
$$M_{11} = \begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ M_{12} = \begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},$$
$$M_{13} = \begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},\ M_{31} = \begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},$$
$$M_{32} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{21} & a_{23}\end{vmatrix},\ M_{33} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},$$
$C_{11} = M_{11}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{13} = M_{13}$,
$C_{31} = M_{31}$, $C_{32} = -M_{32}$, $C_{33} = M_{33}$.

4. $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix} = 4 - 6 = -2,$

$\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{vmatrix} = 6 - 4 = 2,$ 정리 1(a),

$\begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 6\end{vmatrix} = 6 - 8 = -2,$ 정리 1(b),

$\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 4\end{vmatrix} = 8 - 12 = -4,$ 정리 1(c),

$\begin{vmatrix}2 & 1\\4 & 3\end{vmatrix} = 6 - 4 = 2,$ 정리 2(a),

$\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 7\end{vmatrix} = 7 - 9 = -2,$ 정리 2(b),

$\begin{vmatrix}2 & 2\\6 & 4\end{vmatrix} = 8 - 12 = -4,$ 정리 2(c),

$\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{vmatrix} = 4 - 6 = -2,$ 정리 2(d),

$\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{vmatrix} = 0 - 0 = 0,$ 정리 2(e),

$\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 0\end{vmatrix} = 0 - 0 = 0,$ 정리 2(e),

$\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$ 정리 2(f),

$\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{vmatrix} = 6 - 6 = 0,$ 정리 2(f).

5. $\begin{vmatrix}3.8 & 0.6\\-1.4 & 9.3\end{vmatrix} = 3.8 \times 9.3 - 0.6 \times (-1.4) = 36.18.$

6. $\begin{vmatrix}\cos n\theta & \sin n\theta\\-\sin n\theta & \cos n\theta\end{vmatrix} = \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1.$

7. $\begin{vmatrix}104 & 624\\102 & 612\end{vmatrix} = 104 \times 612 + 624 \times 102 = 0.$

8. $\begin{vmatrix}205 & 16 & 81\\0 & -13 & 2\\0 & 0 & 16\end{vmatrix} = 205 \times (-13) \times 16 = -42640.$

9. $\begin{vmatrix}m & n & p\\p & m & n\\n & p & m\end{vmatrix}$
$$= m\begin{vmatrix}m & n\\p & m\end{vmatrix} - n\begin{vmatrix}p & n\\n & m\end{vmatrix} + p\begin{vmatrix}p & m\\n & p\end{vmatrix}$$
$$= m(m^2 - np) - n(pm - n^2) + p(p^2 - mn)$$
$$= m^3 - mnp - mnp + n^3 + p^3 - mnp$$
$$= m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp.$$

10. $\begin{vmatrix}7 & 14 & 21\\36 & 18 & 6\\87 & 12 & -45\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7 & 36 & 87\\14 & 18 & 12\\21 & 6 & -45\end{vmatrix}$
$$= \begin{vmatrix}7 & 36 & 87\\0 & -54 & -162\\0 & -102 & -306\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}7 & 36 & 87\\0 & -54 & -162\\0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0.$$

11. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 7\\4 & 2 & 0 & 1\\7 & 7 & 3 & 0\\5 & 0 & 6 & 8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 7\\0 & 2 & -12 & -2\\0 & 7 & -18 & -49\\0 & 0 & -9 & -2\end{vmatrix}$
$$= \begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 7\\0 & 2 & -12 & -2\\0 & 0 & 24 & 45.5\\0 & 0 & -9 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 7\\0 & 2 & -12 & -2\\0 & 0 & 24 & 45.5\\0 & 0 & 0 & -\frac{159}{16}\end{vmatrix}$$
$$= -477.$$

12. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\2 & 4 & 2 & 0\\0 & 2 & 9 & 2\\0 & 0 & 2 & 16\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 9 & 2\\0 & 0 & 2 & 16\end{vmatrix}$
$$= -\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 9 & 2\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2 & 16\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 9 & 2\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 16\end{vmatrix} = -64.$$

13. $\begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\6 & 8 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 7\\0 & 0 & 2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 7\\0 & 0 & 2 & 5\end{vmatrix}$
$$= \begin{vmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 7\\0 & 0 & 0 & 1.5\end{vmatrix} = 72.$$

14. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 16 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 16 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -6 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

즉 모든 2×2 부분 행렬의 행렬식은 0이고 1×1 부분 행렬의 하나인 [4] 의 행렬식이 0이 아니므로 원래 행렬의 계수는 1이다.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -8 & -6 \\ 16 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 7.5 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -60 \neq 0,$$

즉 원래 행렬의 계수는 3이다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 7.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

16. $\begin{vmatrix} 21 & -3 & 17 \\ 46 & 11 & 52 \\ 33 & 48 & 71 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -3 & 17 \\ 4 & 17 & 18 \\ 12 & 51 & 54 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} 21 & -3 & 13 \\ 46 & 11 & 14 \\ 33 & 48 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -3 & 13 \\ 4 & 17 & -12 \\ 12 & 51 & -36 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} 21 & 17 & 13 \\ 46 & 52 & 14 \\ 33 & 71 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 17 & 13 \\ 4 & 18 & -12 \\ 12 & 54 & -36 \end{vmatrix} = 0,$

$\begin{vmatrix} -3 & 17 & 13 \\ 11 & 52 & 14 \\ 48 & 71 & -23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 17 & 13 \\ -1 & 120 & 66 \\ 0 & 343 & 185 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -343 & -185 \\ -1 & 120 & 66 \\ 0 & 343 & 185 \end{vmatrix} = 0,$$

$\begin{vmatrix} 21 & -3 \\ 46 & 11 \end{vmatrix} = 369 \neq 0,$

즉 모든 3×3 부분 행렬의 행렬식은 0이고 2×2 부분 행렬의 하나가 행렬식이 0이 아니므로 원래 행렬의 계수는 2이다.

$$\begin{bmatrix} 21 & -3 & 17 & 13 \\ 46 & 11 & 52 & 14 \\ 33 & 48 & 71 & -23 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 21 & -3 & 17 & 13 \\ 0 & 369 & 310 & -304 \\ 0 & 369 & 310 & -304 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 21 & -3 & 17 & 13 \\ 0 & 369 & 310 & -304 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. $D = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 29,$

$D_1 = \begin{vmatrix} 37 & -3 \\ -38 & 7 \end{vmatrix} = 145,$

$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 37 \\ -2 & -38 \end{vmatrix} = 116,$

답. $x = \frac{D_1}{D} = 5,\ y = \frac{D_2}{D} = -4;$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 37 \\ -2 & 7 & -38 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 37 \\ 0 & 29 & -116 \end{array}\right],$$

답. $x = 5,\ y = -4.$

18. $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & -20 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 91,$

$D_1 = \begin{vmatrix} 20 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 13 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 34 & -19 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 34 & -19 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 182,$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 \\ 7 & 13 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 \\ 0 & -127 & -20 \\ 0 & -20 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 20 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -20 & -1 \end{vmatrix} = -273,$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 7 & 3 & 13 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 20 \\ 0 & -11 & -127 \\ 0 & 4 & -20 \end{vmatrix} = 728,$

답. $x = \frac{D_1}{D} = 2,\ y = \frac{D_2}{D} = -3,\ z = \frac{D_3}{D} = 8;$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 7 & 3 & 1 & 13 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -11 & -20 & -127 \\ 0 & 4 & -1 & -20 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & -11 & -20 & -127 \\ 0 & 0 & -91 & -728 \end{array}\right],$$

답. $x = 2,\ y = -3\ z = 8.$

19. $D = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 2 & 0 & 9 \\ -4 & 1 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 101,$

$D_1 = \begin{vmatrix} -13 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 13 & -148 \\ -1 & 2 & -43 \\ 2 & 1 & -26 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 13 & -148 \\ 0 & -11 & 105 \\ 0 & 27 & -322 \end{vmatrix} = -707,$

$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -13 & 8 \\ 2 & -5 & 9 \\ -4 & 2 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 2 & -5 & 9 \\ 0 & -8 & -8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & -8 & -8 \end{vmatrix} = 0,$

$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 13 \\ 2 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 0 & -14 & 11 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 101,$

답. $x = \frac{D_1}{D} = -7,\ y = \frac{D_2}{D} = 0,\ z = \frac{D_3}{D} = 1;$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 8 & -13\\ 2 & 0 & 9 & -5\\ -4 & 1 & -26 & 2\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 8 & -13\\ 0 & -14 & 11 & 11\\ 0 & 31 & -46 & -46\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 8 & -13\\ 0 & -14 & 11 & -5\\ 0 & 0 & -303 & -303\end{array}\right],$$

답. $x = -7$, $y = 0$, $z = 1$.

20. (a) $D = \begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0\end{vmatrix}$
$= -(x-x_1)(y_2-y_1)+(x_2-x_1)(y-y_1) = 0,$

즉, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ 을 얻는다.

(b) 평면의 방정식이 $ax + by + cz + d \cdot 1 = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix} = 0;$$

주어진 점들을 지나는 평면은 $3x + 4y - 2z = 5$ 이다.

(c) 원의 방정식이 $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d \cdot 1 = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1\\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix} = 0;$$

주어진 점들을 지나는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$ 이다.

(d) 구의 방정식이 $a(x^2 + y^2 + z^2) + bx + cy + dz + e \cdot 1 = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1\\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix} = 0;$$

주어진 점들을 지나는 구는 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$ 이다.

(e) 일반 이차 곡선 (conic section) 의 방정식이 $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \cdot 1 = 0$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1\\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1\\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1\\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1\\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

6.7. Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

1. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 2\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & -2 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -30 & 12 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 2\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -15 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 2\end{array}\right],$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

답. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$.

2. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 11 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 11 & 0 & -5\\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 2 & -9\\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 2 & -9\\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right],$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & 2 & -9\\ -4 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

답. $\begin{bmatrix} 19 & 2 & -9\\ -4 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 2 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 20 & 2 & -5 & 0 & 3\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 2 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3\end{array}\right].$$

답. 역행렬이 존재하지 않는다.

4. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 13 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 13 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8\end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 0 & 40 & -104\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 8 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

답. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -13 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$.

5. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 55 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 21 & 61 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 55 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 220 & -84 & 76 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 55 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 276 & -105 & 95 \\ 0 & 19 & 0 & -3040 & 1159 & -1045 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 276 & -105 & 95 \\ 0 & 1 & 0 & -160 & 61 & -55 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 116 & -44 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -160 & 61 & -55 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -160 & 61 & -55 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 15 & 1 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 & -11 & 10 \\ -160 & 61 & -55 \\ 55 & -21 & 19 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

답. $\begin{bmatrix} 29 & -11 & 10 \\ -160 & 61 & -55 \\ 55 & -21 & 19 \end{bmatrix}$.

6. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & 0 \\ \frac{10}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

답. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & 0 \\ \frac{10}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -9 & 18 & 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -9 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

답. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$.

8. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

답. 역행렬이 존재하지 않는다.

9. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 8 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 & -8 & 31 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right],$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 31 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

답. $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 31 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. (제곱 행렬의 역행렬)
$\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$ 이라 하면, $\mathbf{B}(\mathbf{A}^{-1})^2 = \mathbf{AAA}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ 이 되므로 $(\mathbf{A}^2)^{-1} = \mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$ 가 된다.

11. (제곱 행렬의 역행렬)
$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 15 & 1 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ 이므로,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 55 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 21 & 61 & -5 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 55 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 220 & -84 & 76 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 55 & -15 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 276 & -105 & 95 \\ 0 & 19 & 0 & -3040 & 1159 & -1045 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & 276 & -105 & 95 \\ 0 & 1 & 0 & -160 & 61 & -55 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 116 & -44 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -160 & 61 & -55 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -160 & 61 & -55 \\ 0 & 0 & 1 & 55 & -21 & 19 \end{array}\right]$$ 에 의해,

$$(\mathbf{A}^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 29 & -11 & 10 \\ -160 & 61 & -55 \\ 55 & -21 & 19 \end{bmatrix}$$ 이 된다. 반면에,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$ 이므로,

$$(\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 29 & -11 & 10 \\ -160 & 61 & -55 \\ 55 & -21 & 19 \end{bmatrix}$$ 이다.

즉, $(\mathbf{A}^2)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^2$가 성립한다.

12. (전치 행렬의 역행렬)
$\mathbf{I} = \mathbf{I}^T = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T$ 이므로, $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ 가 된다.

13. (대칭 행렬의 역행렬)
행렬 $\mathbf{A}$ 가 대칭이면 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 이다. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ 이라면, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ 이고, $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}$ 를 얻는다. 따라서 $\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ 가 된다. 즉 대칭 행렬의 역행렬도 대칭이다.

14. (역행렬의 역행렬)
$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$ 이면, $\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{CA}$ 이므로, $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}$ 를 얻는다. 즉 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ 이다.

15. $\det \mathbf{A} = 1$,
$A_{11} = 3,\ A_{12} = -15,\ A_{13} = 5$,
$A_{21} = -1,\ A_{22} = 6,\ A_{23} = -2$,
$A_{31} = 1,\ A_{32} = -5,\ A_{33} = 2$,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2. \end{bmatrix}.$$

16. $\det \mathbf{A} = -40$,
$A_{11} = 2,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = -12$,
$A_{21} = 0,\ A_{22} = -20,\ A_{23} = 0$,
$A_{31} = -8,\ A_{32} = 0,\ A_{33} = 8$,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

17. $\det \mathbf{A} = -0.1$,
$A_{11} = -0.3,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = -0.1$,
$A_{21} = 0,\ A_{22} = -0.5,\ A_{23} = 0$,
$A_{31} = 0.1,\ A_{32} = -0.1,\ A_{33} = 0.1$,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

18. $\det \mathbf{A} = -8$,
$A_{11} = -4,\ A_{12} = -24,\ A_{13} = 23$,
$A_{21} = 0,\ A_{22} = 8,\ A_{23} = -6$,
$A_{31} = 0,\ A_{32} = 0,\ A_{33} = -2$,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2.875 & 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

19. $\det \mathbf{A} = -0.5$,
$A_{11} = -0.5,\ A_{12} = -0.5,\ A_{13} = -1$,
$A_{21} = -0.5,\ A_{22} = -1,\ A_{23} = -1.5$,
$A_{31} = -1,\ A_{32} = -1.5,\ A_{33} = -1.5$,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

20. $\det \mathbf{A} = -48$,
$A_{11} = -12,\ A_{12} = 12,\ A_{13} = -6$,
$A_{21} = 0,\ A_{22} = 0,\ A_{23} = -12$,
$A_{31} = -12,\ A_{32} = -4,\ A_{33} = 2$,
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}.$$

21. (a) $\det \mathbf{H}_2 = 2^{-2}3^{-1} = 0.0833$,
$$\mathbf{H}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix},$$
$\det \mathbf{H}_3 = 2^{-4}3^{-3}5^{-1} = 4.6296 \times 10^{-4}$,
$$\mathbf{H}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix},$$
$\det \mathbf{H}_4 = 2^{-8}3^{-3}5^{-3}7^{-1} = 1.6534 \times 10^{-7}$,
$$\mathbf{H}_4^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix},$$
$\det \mathbf{H}_5 = 2^{-10}3^{-5}5^{-5}7^{-3} = 3.7493 \times 10^{-12}$,
$$\mathbf{H}_5^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix},$$
$\det \mathbf{H}_6 = 2^{-14}3^{-9}5^{-5}7^{-5}11^{-1} = 5.3673 \times 10^{-18}$,
$$\mathbf{H}_6^{-1} = \begin{bmatrix} 36 & -630 & 3360 \\ -630 & 14700 & -88200 \\ 3360 & -88200 & 564480 \\ -7560 & 211680 & -1411200 \\ 7560 & -220500 & 1512000 \\ -2772 & 83160 & -582120 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -7560 & 7560 & -2772 \\ 211680 & -220500 & 83160 \\ -1411200 & 1512000 & -582120 \\ 3628800 & -396900 & 1552320 \\ -396900 & 4410000 & -1746360 \\ 1552320 & -1746360 & 698544 \end{matrix}\right],$$

$$\det \mathbf{H}_7 = 2^{-18}3^{-11}5^{-5}7^{-7}11^{-3}13^{-1}$$
$$= 4.8358 \times 10^{-25},$$

$$\mathbf{H}_7^{-1} = \left[\begin{matrix} 49 & -1176 & 8820 \\ -1176 & 37632 & -3175220 \\ 8820 & -317520 & 2857680 \\ -29400 & 1128960 & -10584000 \\ 48510 & -1940400 & 18711000 \\ -38808 & 1596672 & -15717240 \\ 12012 & -504504 & 5045040 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} -29400 & 48510 & -38808 \\ 1128960 & -1940400 & 1596672 \\ -10584000 & 18711000 & -15717240 \\ 40320000 & -72765000 & 62092800 \\ -72765000 & 133402500 & -1152597660 \\ 62092800 & -115259760 & 100590336 \\ -20180160 & 37837800 & -33297264 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 12012 \\ -504504 \\ 5045040 \\ -20180160 \\ 37837800 \\ -33297264 \\ 11099088 \end{matrix}\right],$$

$$\det \mathbf{H}_8 = 2^{-24}3^{-14}5^{-6}7^{-7}11^{-5}13^{-3}$$
$$= 2.7371 \times 10^{-33},$$

$$\mathbf{H}_8^{-1} = \left[\begin{matrix} 64 & -2016 & 20160 \\ -2016 & 84672 & -952560 \\ 20160 & -952560 & 11430720 \\ -92400 & 4656960 & -58212000 \\ 221760 & -11642400 & 149688000 \\ -288288 & 15567552 & -204324120 \\ 192192 & -10594584 & 141261120 \\ -51480 & 2882880 & -38918880 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} -92400 & 221760 & -288288 \\ 4656960 & -11642400 & 15567552 \\ -58212000 & 149688000 & -204324120 \\ 304920000 & -800415000 & 1109908800 \\ -800415000 & 2134440000 & -2996753760 \\ 1109908800 & -2996753760 & 4.2499 \times 10^9 \\ -776936160 & 2118916800 & -3.0301 \times 10^9 \\ 216216000 & -594594000 & 856215360 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 192192 & -51480 \\ -10594584 & 2882880 \\ 141261120 & -38918880 \\ -776936160 & 216216000 \\ 2118916800 & -594594000 \\ -3.0301 \times 10^9 & 856215360 \\ 2.1754 \times 10^9 & -618377760 \\ -618377760 & 176679360 \end{matrix}\right];$$

행렬식은 줄어들고 역행렬의 성분의 절대값은 커진다.

(b) $\det \mathbf{H}_2 = \frac{4}{45} = 0.0889$,

$$\mathbf{H}_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ -\frac{15}{4} & \frac{45}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.25 & -3.75 \\ -3.75 & 11.25 \end{bmatrix},$$

$\det \mathbf{H}_3 = 5.16 \times 10^{-4}$,

$$\mathbf{H}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 3.5156 & -16.4062 & 14.7656 \\ -16.4062 & 137.8125 & -147.6562 \\ 14.7656 & -147.6562 & 172.2656 \end{bmatrix},$$

행렬식은 줄어들고 역행렬의 성분의 절대값은 커진다.

6.8. Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations. *Optional*

1. 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1, 2, 3$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이므로, $u_1 - 3u_2 + 2u_3 = \alpha v_1 + \beta w_1 - 3(\alpha v_2 + \beta w_2) + 2(\alpha v_3 + \beta w_3) = \alpha(v_1 - 3v_2 + 2v_3) + \beta(w_1 - 3w_2 + 2w_3) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 가 되어 조건을 만족한다; $\mathbf{u} = [2 \quad 0 \quad -1]^T$, $\mathbf{v} = [0 \quad 2 \quad 3]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. $\mathbf{e}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]$ 라 하면, $\mathbf{e}_1\mathbf{u} = 2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{v} = 0$ 이 된다. 따라서 $2a = 0$, 즉 $a = 0$ 이 되고, $\mathbf{v}$ 가 $\mathbf{0}$ 이 아니므로 $b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터에 대해 $\mathbf{x} = \frac{1}{2}w_1\mathbf{u} + \frac{1}{2}w_2\mathbf{v}$ 라 두면, $x_1 = w_1$, $x_2 = w_2$, $x_3 = \frac{1}{2}w_1 \cdot (-1) + \frac{1}{2}w_2 \cdot 3 = \frac{1}{2}(-w_1 + 3w_2) = \frac{1}{2}(2w_3) = w_3$ 가 된다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{v}$ 의 일차 결합 으로 나타낼 수 있다.
   답. 벡터 공간; 차원 2; 기저
   $[2 \quad 0 \quad -1]^T$, $[0 \quad 2 \quad 3]^T$.
2. $\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ 는 조건을 만족하지만 $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$ 는 모든 성분이 음수이므로 조건을 만족하지 않는다.
   답. 벡터 공간이 아니다.
3. 조건을 만족하는 벡터 $\mathbf{u}$ 는 적당한 실수 u_0, u_1, u_2, u_3 에 대해 $\mathbf{u} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3$ 같은 모양으로 나타난다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha(v_0 + v_1x + v_2x^2 + v_3x^3) + \beta(w_0 + w_1x + w_2x^2 + w_3x^3) = (\alpha v_0 + \beta w_0) + (\alpha v_1 + \beta w_1)x + (\alpha v_2 + \beta w_2)x^2 + (\alpha v_3 + \beta w_3)x^3$ 는 역시 3차 이하의 다항식이 되어 조건을 만족한다; $\mathbf{u}_0 = 1$, $\mathbf{u}_1 = x$, $\mathbf{u}_2 = x^2$, $\mathbf{u}_3 = x^3$ 이라 하자. 네 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b, c, d 에 대해 $a\mathbf{u}_0 + b\mathbf{u}_1 + c\mathbf{u}_2 + d\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 그러면 $a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$ 을 얻고, 계수 비교에 의해 $a = b = c = d = 0$ 을 얻는다. 그러므로 네 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터는 앞에서 정의한 네 벡터의 일차 결합인 $w_0\mathbf{u}_0 + w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ 와 같다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.
   답. 벡터 공간; 차원 4; 기저 $1, x, x^2, x^3$.
4. 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha(v_1 \cos x + v_2 \sin x) + \beta(w_1 \cos x + w_2 \sin x) = (\alpha v_1 + \beta w_1)\cos x + (\alpha v_2 + \beta w_2)\sin x$ 이므로 조건을 만족한다; $\mathbf{u} = \cos x$, $\mathbf{v} = \sin x$ 라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해

$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 그러면 $x = 0$ 에 대해 $b = 0$ 을 얻고, $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대해 $a = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터는 앞에서 정의한 두 벡터의 일차 결합인 $w_1\mathbf{u} + w_2\mathbf{v}$ 와 같다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.

답. 벡터 공간; 차원 2; 기저 $\cos x, \sin x$.

5. 조건을 만족하는 벡터 $\mathbf{u}$ 는 적당한 실수 u_1, u_2, u_3 에 대해 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ 같이 나타난다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ -v_2 & v_3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ -w_2 & w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 & \alpha v_2 + \beta w_2 \\ -\alpha v_2 - \beta w_2 & \alpha v_3 + \beta w_3 \end{bmatrix}$ 는 역시 왜대칭이므로 조건을 만족한다; $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하자. 세 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b, c 에 대해 $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 그러면 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 을 얻고, $a = b = c = 0$ 을 얻는다. 그러므로 세 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터는 앞에서 정의한 세 벡터의 일차 결합인 $w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ 와 같다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.

답. 벡터 공간; 차원 3;
기저 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. 조건을 만족하는 벡터 $\mathbf{u}$ 는 적당한 실수 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 에 대해 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_4 & u_5 \\ u_3 & u_5 & u_6 \end{bmatrix}$ 같이 나타난다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_2 & v_4 & v_5 \\ v_3 & v_5 & v_6 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_4 & w_5 \\ w_3 & w_5 & w_6 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 & \alpha v_2 + \beta w_2 & \alpha v_3 + \beta w_3 \\ \alpha v_2 + \beta w_2 & \alpha v_4 + \beta w_4 & \alpha v_5 + \beta w_5 \\ \alpha v_3 + \beta w_3 & \alpha v_5 + \beta w_5 & \alpha v_6 + \beta w_6 \end{bmatrix}$ 는 역시 대칭이므로 조건을 만족한다;
$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하자. 모두 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b, c, d, e, f 에 대해 $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 + d\mathbf{u}_4 + e\mathbf{u}_5 + f\mathbf{u}_6 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 그러면 $\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 을 얻고, $a = b = c = d = e = f = 0$ 을 얻는다. 그러므로 이 벡터들은 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터는 앞에서 정의한 세 벡터의 일차 결합인 $w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3 + w_4\mathbf{u}_4 + w_5\mathbf{u}_5 + w_6\mathbf{u}_6$ 와 같다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}_5$, $\mathbf{u}_6$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.

답. 벡터 공간; 차원 6;
기저 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

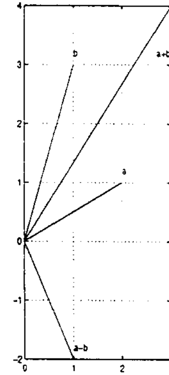
7. 조건을 만족하는 벡터 $\mathbf{u}$ 는 적당한 실수 u_1, u_2, u_3 에 대해 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{bmatrix}$ 같이 나타난다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & -w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 + \beta w_1 & \alpha v_2 + \beta w_2 \\ \alpha v_3 + \beta w_3 & -\alpha v_1 - \beta w_1 \end{bmatrix}$ 는 역시 조건을 만족한다; $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하자. 세 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b, c 에 대해 $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 그러면 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 을 얻고, $a = b = c = 0$ 을 얻는다. 그러므로 세 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터는 앞에서 정의한 세 벡터의 일차 결합인 $w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ 와 같다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.

답. 벡터 공간; 차원 3;
기저 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. 조건을 만족하는 벡터 $\mathbf{u}$ 는 적당한 실수 u_1, u_2, u_3, u_4 에 대해 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2u_1 & -u_1 & 3u_1 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ 같이 나타난다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} = \alpha \begin{bmatrix} 2v_1 & -v_1 & 3v_1 \\ v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2w_1 & -w_1 & 3w_1 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\alpha v_1 + \beta w_1) & -(\alpha v_1 + \beta w_1) & 3(\alpha v_1 + \beta w_1) \\ \alpha v_2 + \beta w_2 & \alpha v_3 + \beta w_3 & \alpha v_4 + \beta w_4 \end{bmatrix}$ 의 첫번째 행은 $[2 \quad -2 \quad 3]$ 의 $\alpha v_1 + \beta w_1$ 배 이므로, 조건을 만족한다; $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이라 하자. 네 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b, c, d 에 대해 $a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 + d\mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$ 가 된다고 하자. 그러면 $\begin{bmatrix} 2a & -a & 3a \\ b & c & d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 을 얻고, $a = b = c = d = 0$ 을 얻는다. 그러므로 네 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{w}$ 가 주어진 조건을 만족한다고 하자. 이 벡터는 앞에서 정의한 세 벡터의 일차 결합인 $w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3 + w_4\mathbf{u}_4$ 와 같다. 즉 조건을 만족하는 벡터는 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ 의 일차 결합으로 나타낼 수 있다.

답. 벡터 공간; 차원 4; 기저 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. 행렬의 모든 원소가 1 인 것을 $\mathbf{u}$ 라 하면 이 행렬은 조건을 만족하지만, $-\mathbf{u}$ 의 모든 원소는 -1 이므로 조건을 만족하지 않는다.
답. 벡터 공간이 아니다.
10. $\mathbf{u}$ 가 단위 행렬 (unit matrix) 이면, 대각 원소가 모두 1 이므로 조건을 만족하지만, $-\mathbf{u}$ 의 대각 원소는 모두 -1 이므로 조건을 만족하지 않는다.
답. 벡터 공간이 아니다.
11. $\mathbf{u} = [1 \quad 0]^T$, $\mathbf{v} = [0 \quad 1]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다면, $[a \quad b]^T = \mathbf{0}$ 이 되어 $a = b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{u} = [1 \quad 0]^T$, $\mathbf{v} = [1 \quad 1]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다면, $[a+b \quad b]^T = \mathbf{0}$ 이 되어 $a = b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다; $\mathbf{u} = [1 \quad 0]^T$, $\mathbf{v} = [-1 \quad 1]^T$ 이라 하자. 두 벡터는 주어진 조건을 만족한다. 이제 실수 a, b 에 대해 $a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 가 된다면, $[a-b \quad b]^T = \mathbf{0}$ 이 되어 $a = b = 0$ 을 얻는다. 그러므로 두 벡터는 일차 독립이다.
답. $\{[1 \quad 0]^T, [0 \quad 1]^T\}$, $\{[1 \quad 0]^T, [1 \quad 1]^T\}$,
$\{[1 \quad 0]^T, [-1 \quad 1]^T\}$
12. (유일성)
만약 또다른 실수 $c'_1, \dots, c'_n$ 에 대하여 주어진 벡터 $\mathbf{v}$ 를 쓸 수 있다면, $c_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{a}_{(n)} = c'_1\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + c'_n\mathbf{a}_{(n)}$ 을 얻는다. 즉 $(c_1 - c'_1)\mathbf{a}_{(1)} + \cdots + (c_n - c)n')\mathbf{a}_{(n)}$ 가 되고 기저가 일차 독립이므로 $c_1 - c'_1 = \cdots = c_n - c'_n = 0$ 이 된다. 따라서 주어진 벡터 $\mathbf{v}$ 의 표현은 유일하다.
13. $\mathbf{a} = [0.4 \quad 1.3 \quad -2.2]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = 6.69$, $\|\mathbf{a}\| = 2.5865$.
14. $\mathbf{a} = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 8]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = 77$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{77}$.
15. $\mathbf{a} = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3}]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = \frac{13}{18}$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\frac{13}{18}}$.
16. $\mathbf{a} = [2 \quad 3 \quad -5]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = 38$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{38}$.
17. $\mathbf{a} = [3 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \quad 0]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = 33$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{33}$.
18. $\mathbf{a} = [6 \quad 1 \quad 0 \quad 5]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} = 62$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{62}$.
19. $\mathbf{a} = [2 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 8]^T, \mathbf{b} = [3 \quad 2 \quad -2 \quad 4 \quad 0]^T$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = 0$, 두 벡터는 수직 (orthogonal).
20. $[3 \quad -4]$ 에 수직이므로 $3v_1 - 4v_2 = 0$ 이다. 따라서 $\mathbf{v} = k[4 \quad 3]^T$ 이고, 단위 (unit) 벡터이므로 $25k^2 = 1$ 이 되어 $k = \pm\frac{1}{5}$ 이다.
답. $\mathbf{v} = \pm[\frac{4}{5} \quad \frac{3}{5}]^T$.
21. $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$ 가 $\mathbf{a} = [1 \quad 2 \quad 0]^T$ 에 수직이면 $v_1 + 2v_2 = 0$ 이라는 조건을 얻는다. 즉 실수 a, b 에 대해 $[-2a \quad a \quad b]^T$ 인 벡터는 모두 $\mathbf{a}$ 에 수직이다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1, 2, 3$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이므로, $u_1 + 2u_2 = \alpha v_1 + \beta w_1 + 2(\alpha v_2 + \beta w_2) = \alpha(v_1 + 2v_2) + \beta(w_1 + 2w_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 가 되어 조건을 만족한다.
답. $[-2a \quad a \quad b]$; 벡터 공간이다.
22. $\mathbf{a} = [0.4 \quad 1.3 \quad -2.2]^T$, $\mathbf{b} = [2 \quad 3 \quad -5]^T$,
$\|\mathbf{a}\| = 2.5865$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{38}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = 15.7$,
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 15.7 < 15.944 < 2.5865\sqrt{38} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$.
23. $\mathbf{a} = [0.4 \quad 1.3 \quad -2.2]^T$, $\mathbf{b} = [2 \quad 3 \quad -5]^T$,
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [2.4 \quad 4.3 \quad -7.2]^T$, $\|\mathbf{a}\| = 2.5865$,
$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{38}$, $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{76.09} < 8.723$,
$\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| = 2.5865 + \sqrt{38} > 8.75$,
$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{76.09} < 2.5865 + \sqrt{38} = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$.
24. $\mathbf{a} = [2 \quad 1]^T$, $\mathbf{b} = [1 \quad 3]^T$,
$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [3 \quad 4]^T$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = [1 \quad -2]^T$,
$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{10}$, $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| = 5$, $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| = \sqrt{5}$,
$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 30$, $\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = 15$,
$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 30 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2)$.



25. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$,
답. $x_1 = -0.2y_1 + 0.4y_2$,
$x_2 = 0.8y_1 - 0.6y_2$.
26. $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 1.5 & -2.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,
답. $x_1 = 5y_1 - y_2$,
$x_2 = 3y_1 - y_2$.
27. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -11 & 16 & -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -35 & 55 & 5 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & -20 & 33 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 10 & -15 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 16 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & 1 \end{array}\right],$$

답. $x_1 = 2y_1 - 3y_2,$
$x_2 = -10y_1 + 16y_2 + y_3,$
$x_3 = -7y_1 + 11y_2 + y_3.$

28. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.2 \end{array}\right],$$

답. $x_1 = 0.25y_1 - 0.1y_3,$
$x_2 = y_2 - 0.8y_3,$
$x_3 = 0.2y_3.$

29. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 8 \end{array}\right]5$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & 0.4 & 0.8 & -0.8 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.2 & 0 & 0 & 0.8 & -0.4 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 8 \end{array}\right],$$

답. $x_1 = 4y_1 - 2y_2 + 2y_3,$
$x_2 = -2y_1 - 4y_2 + 4y_3,$
$x_3 = -4y_1 + 2y_2 + 8y_3.$

30. $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta\cos\theta & 1-\sin^2\theta \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right],$$

답. $x_1 = y_1,$
$x_2 = y_2\cos\theta - y_3\sin\theta,$
$x_3 = y_2\sin\theta + y_3\cos\theta.$

Chapter 6. Review

1. **A** 는 10×5 행렬이고, **B** 는 10×10 정방 행렬이므로, 5**A** 는 10×5 행렬, **A** + **B** 는 정의 불능 (열의 크기 다름), **AB** 는 정의 불능 (행과 열의 크기 다름), **BA** 는 10×5 행렬, $\mathbf{A}^2$ 는 정의 불능 (행과 열의 크기 다름), $\mathbf{B}^2$ 는 10×10 정방 행렬, $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ 는 5×10 행렬, $\mathbf{AB}^T$ 는 정의 불능 (행과 열의 크기 다름), $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 는 5×5 정방 행렬, $\mathbf{BB}^T$ 는 10×10 정방 행렬, $\mathbf{A}^T\mathbf{BA}$ 는 5×5 정방 행렬, $\mathbf{AA}^T - \mathbf{B}$ 는 10×10 정방 행렬이다.
2. 행렬 곱셈의 동기는 선형 변환에 있다. 즉 두 선형 변환의 합성에서 행렬의 곱셈이 튀어 나온다.
3. 행렬 곱셈과 보통 곱셈의 차이
가환이 아니다; 곱이 **0** 이어도 둘 다 **0** 이 아닐 수 있고 순서를 바꿔 곱한 것도 **0** 이 아닐 수 있다; 고정된 행렬에 대한 곱의 결과가 같아도 곱해지는 행렬이 다를 수 있다:
$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ -2 & 8 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}.$$
4. 역행렬은 원래 행렬과의 곱이 단위 행렬이 되는 행렬이다. 원래 행렬의 계수가 그 행렬의 행의 갯수와 같을 때 역행렬이 존재한다. 행렬식과 여인자를 써서 역행렬을 구할 수 있다.
5. 행렬의 계수는 일차 독립인 행의 갯수이다. 정방 행렬의 경우 계수가 정확히 행렬의 행의 갯수와 같으면 그 행렬은 역행렬을 가진다.
6. 일차 연립 방정식을 나타내는 행렬의 계수가 그 행렬의 행의 갯수와 같지 않으면, 원래 일차 연립방정식이 해를 가지지 않을 수 있다.
7. 가우스 소거법 (Gauss elimination) 은 일차 연립 방정식을 푸는 기본 방법이다. 가우스-조단 소거법 (Gauss-Jordan elimination) 은 역행렬을 구하는 것으로 가우스 소거법의 변형이다.
8. 비동차 (nonhomogeneous) 일차 연립 방정식의 해의 갯수는 정확히 하나인 경우, 아예 없는 경우, 무한히 많

은 경우가 있다. 동차 (homogeneous) 일 때는 정확히 **0** 하나인 경우, 무한히 많은 경우가 있다.

9. 크래머 해법은 행렬식을 이용해서 일차 연립 방정식을 푸는 방법이다.
10. 행렬의 계수는 그 행렬의 행의 갯수를 넘을 수 없는데, 그 행렬의 전치 행렬의 계수와 같은 값을 가지므로, 역시 그 행렬의 열의 갯수도 넘을 수 없다. 다라서 행렬의 계수는 그 행렬의 행과 열의 갯수중에서 가장 작은 값보다 클 수 없다. 그러므로 20×12 행렬의 계수는 12를 넘을 수 없다. 즉 20×12 행렬의 행벡터 모두가 일차 독립일 수는 없다.
11. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -18 & 8 & -7 \\ -13 & -2 & -7 \end{bmatrix}$.
12. $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 13 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$.
13. $\frac{1}{5}\mathbf{ABA} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$.
14. $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 19 & 1 & -22 \\ 1 & 21 & 15 \\ -22 & 15 & 38 \end{bmatrix}$,

    $\mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 19 & 1 & -22 \\ 1 & 21 & 15 \\ -22 & 15 & 38 \end{bmatrix}$.
15. $\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} -17 & 2 & -8 \\ 2 & -20 & -4 \\ -8 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.
16. $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -2 & -12 & -12 \\ -12 & 16 & -9 \\ -12 & -9 & -14 \end{bmatrix}$.
17. $\mathbf{BB}^T = \begin{bmatrix} 17 & -2 & 8 \\ -2 & 20 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$,

    $\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 17 & -2 & 8 \\ -2 & 20 & 4 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.
18. $\frac{1}{21}\mathbf{BB}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.
19. $\mathbf{Ac} = \begin{bmatrix} 21 \\ -8 \\ -31 \end{bmatrix}$.
20. $\mathbf{Bd} = \begin{bmatrix} -9 \\ -34 \\ -13 \end{bmatrix}$.
21. $\mathbf{c}^T\mathbf{d} = -1$.
22. $\det \mathbf{A} = -5$.
23. $0.1\mathbf{c}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.1 & -0.8 & -3.1 \end{bmatrix}$.
24. $\mathbf{d}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 34 & 13 \end{bmatrix}$.
25. $\mathbf{d}^T\mathbf{Bd} = 0$.
26. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 \\ 12 & -5 & -3 & 17 \\ -6 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 4 & 4 \\ 12 & -5 & -3 & 17 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & 25 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right]$,

    답. $x = 2$, $y = -1$, $z = 4$.
27. $\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & -6 & 30 \\ 2 & -4 & 8 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 8 & 2 \\ 9 & 3 & -6 & 30 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -14 & 7 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$,

    답. 해가 무수히 많다 ($x = 3, y = 2z + 1$).
28. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ -14 & -21 & 49 & -20 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -7 & 3 \\ -14 & -21 & 49 & -20 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & 3 \\ 0 & -77 & 63 & -20 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$,

    답. 해가 없다.
29. **답.** $x = 0.4$, $y = -1.3$, $z = 1.7$.
30. $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 7 & -27 \\ 10 & 0 & -9 & 27 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 7 & -27 \\ 10 & 0 & -9 & 27 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 27 & 27 & -27 \\ 0 & 60 & 31 & 27 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 60 & 31 & 27 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -29 & 87 \end{array}\right]$,

    답. $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$.
31. $\left[\begin{array}{ccc|c} 22 & -13 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & -11 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -11 & 0 \\ 22 & -13 & 1 & 0 \\ -13 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -11 & 0 \\ 0 & 75 & 243 & 0 \\ 0 & -52 & -147 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -11 & 0 \\ 0 & 75 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 1611 & 0 \end{array}\right]$,

    답. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
32. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & -3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -21 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

    답. 해가 무수히 많다 (x=1, z=3y+2).
33. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 9 & 36 \\ 2 & 0 & 17 & 35 \\ -1 & -1 & 34 & 34 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 34 & 34 \\ 0 & -3 & 9 & 36 \\ 2 & 0 & 17 & 35 \end{array}\right]$

    $\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 34 & 34 \\ 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & -2 & 85 & 103 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 34 & 34 \\ 0 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 79 & 79 \end{array}\right]$,

    답. $x = 9$, $y = -9$, $z = 1$.
34. $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -13 & 3 & 4 \\ -6 & 39 & -9 & -12 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -13 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

    답. 해가 무수히 많다 ($x = \frac{13}{2}y + \frac{3}{2}z$).

35. $\begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \end{bmatrix}$,

답. 원 행렬의 계수는 2이고, 중첩 (augmented) 행렬의 계수도 2이다. 따라서 해가 있다.

36. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & -4 & 1 \\ -14 & -21 & 49 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -7 \\ -14 & -21 & 49 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 11 & -9 \\ 0 & -77 & 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

답. 원 행렬의 계수는 2이고, 중첩 행렬의 계수는 3이다. 따라서 해가 없다.

37. **답.** 원 행렬의 계수는 3이고, 중첩 행렬의 계수도 3이다. 따라서 해가 있다.

38. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 10 & 0 & -9 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 7 \\ 10 & 0 & -9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 27 & 27 \\ 0 & 60 & 31 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 60 & 31 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -29 \end{bmatrix}$,

답. 원 행렬의 계수는 3이고, 중첩 행렬의 계수도 3이다. 따라서 해가 있다.

39. $\begin{bmatrix} 22 & -13 & 1 \\ -13 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 \\ 22 & -13 & 1 \\ -13 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 \\ 0 & 75 & 243 \\ 0 & -52 & -147 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 \\ 0 & 75 & 243 \\ 0 & 0 & 1611 \end{bmatrix}$,

답. 원 행렬의 계수는 3이고, 중첩 행렬의 계수도 3이다. 따라서 해가 있다.

40. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 8 & 9 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -21 & 7 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

답. 원 행렬의 계수는 2이고, 중첩 행렬의 계수는 2이다. 따라서 해가 있다.

41. $\frac{1}{5}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & -0.6 \\ 0.2 & 0.8 & 0.4 \\ -0.6 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}$,

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6 & 0.2 & -0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.4 & 0 & 1 & 0 \\ -0.6 & 0.4 & 1.0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6 & 0.2 & -0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 1.8 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6 & 0.2 & -0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2 & 1.8 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 9 & -11 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6 & 0.2 & 0 & -7.4 & 5.4 & -6.6 \\ 0 & 2.2 & 0 & 24.2 & -13.2 & 19.8 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 9 & -11 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6 & 0.2 & 0 & -7.4 & 5.4 & -6.6 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 9 & -11 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6 & 0 & 0 & -9.6 & 6.6 & -8.4 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 9 & -11 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -16 & 11 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 9 & -11 \end{array}\right]$,

답. $(\frac{1}{5}\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} -16 & 11 & -14 \\ 11 & -6 & 9 \\ -14 & 9 & -11 \end{bmatrix}$.

42. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 \\ -18 & 8 & -7 \\ -13 & -2 & -7 \end{bmatrix}$,

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -18 & 8 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -18 & 8 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & -25 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & -80 & -20 & -13 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & -25 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -4 & 5 \end{array}\right]$,

$\mathbf{BA} = -(\mathbf{AB})^T$이므로 $\mathbf{AB}$ 와 $\mathbf{BA}$ 는 같은 계수를 가진다.

답. $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$ 둘 다 계수가 3보다 작으므로 역행렬이 존재하지 않는다.

43. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$,

답. $\mathbf{B}$는 계수가 3보다 작으므로 역행렬이 존재하지 않는다.

44. $\frac{1}{11}(\mathbf{B}+\mathbf{I}) = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 11 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 & 11 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 2 & 44 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 11 & 0 & 11 \end{array}\right]$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 2 & 44 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & -77 & -66 & 187 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 2 & 44 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3.5 & -3 & 8.5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 14.5 & 3 & -8.5 \\ 0 & 17 & 0 & 51 & 17 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -3.5 & -3 & 8.5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 14.5 & 3 & -8.5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.5 & -3 & 8.5 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2.5 & -1 & -4.5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3.5 & -3 & 8.5 \end{array}\right],$$

답. $(\frac{1}{11}(\mathbf{B}+\mathbf{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & -4.5 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3.5 & -3 & 8.5 \end{bmatrix}$.

45. $\frac{1}{9}(\mathbf{A}-4\mathbf{I}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -3 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & -27 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 9 & 9 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

답. $(\frac{1}{9}(\mathbf{A}-4\mathbf{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 7 & 10 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

46. 동점: $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$,
상변 회로: $5I_1 + 10I_3 = 220$,
하변 회로: $20I_2 + 10I_3 = 240$,
답. $I_1 = 12$, $I_2 = 4$, $I_3 = 16$.

47. 동점: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$,
상변 회로: $10I_2 - 20I_3 = 0$,
하변 회로: $10I_2 = 110$,
답. $I_1 = 16.5$, $I_2 = 11$, $I_3 = 5.5$.

48. 동점: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$,
상변 회로: $10I_1 - 30I_3 = 10$,
하변 회로: $20I_2 + 30I_3 = 130$,
답. $I_1 = 4$, $I_2 = 5$, $I_3 = 1$.

49. 키르히호프의 전류 법칙에 의해 $i_1 = i_2$. 키르히호프의 전압 법칙과 옴의 법칙에 의해 $u_1 = Zi_1 + u_2 = Zi_2 + u_2$. 따라서 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

50. 키르히호프의 전류 법칙에 의해 $i_1 = i_2 + u_2/Z_2$. 키르히호프의 전압 법칙과 옴의 법칙에 의해 $u_1 = Z_1 i_1 + u_2 = Z_1(i_2 + u_2/Z_2) + u_2 = Z_1 i_2 + (1 + Z_1/Z_2)u_2$. 따라서 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{bmatrix}$.

51. 키르히호프의 전류 법칙에 의해 $i_1 = i_2 + u_2/Z$. 키르히호프의 전압 법칙과 옴의 법칙에 의해 $u_1 = u_2$. 따라서 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{bmatrix}$.

CHAPTER 7

Linear Algebra: Matrix Eigenvalue Problems

Matrix eigenvalue problems concern vector equations of the form

$$(1) \qquad \mathbf{A} = \lambda\mathbf{x}$$

where **A** is a given square matrix. ***All matrices in this chapter are square:*** 2×2, 3×3, or $n \times n$. Furthermore, **x** is an unknown vector and λ an unknown scalar. Our goal is to solve (1). Obviously, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is a solution, giving $\mathbf{0} = \mathbf{0}$, but this is of no practical interest. We want solutions $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. These are called **eigenvectors** of **A.** We shall see that such $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ exist only for certain values of λ. These values are called **eigenvalues**[1] (or *characteristic values*) of **A.** Geometrically, solving (1) means we are looking for **x** for which the multiplication by **A** has the same effect as the multiplication of **x** by a scalar, λ, giving a vector $\lambda\mathbf{x}$, with components proportional to those of **x**, and λ as the factor of proportionality.

We shall see that eigenvalue problems are of greatest importance to the engineer and physicist, and they make up a beautiful chapter in linear algebra. Of course, this is not obvious from (1) and thus needs further explanation.

In Sec. 7.1 we explain the basic concepts and show how to systematically find eigenvalues and eigenvectors. Typical applications follow in Sec. 7.2. Sections 7.3 and 7.4 concern properties and eigenvalue problems of symmetric, skew-symmetric, and orthogonal matrices and their complex counterparts (Hermitian, skew-Hermitian, and unitary matrices). In Sec. 7.5 we show that diagonalization of matrices also leads to eigenvalues.

Numerical methods in Secs. 18.6–18.9 can be studied immediately after the corresponding material in the present chapter.

Prerequisite for this chapter: Chap. 6.
Sections that may be omitted in a shorter course: 7.4, 7.5
References: Appendix 1, Part B.
Answers to problems: Appendix 2.

7.1. Eigenvalues, Eigenvectors

1. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2+2\lambda-24$, $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-6$,
$$\mathbf{A}-4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0\\0&-6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-6\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 0]^T$,
$$\mathbf{A}+6\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[0\quad 1]^T$.

2. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2$, $\lambda_1=\lambda_2=0$,
$$\mathbf{A}-0\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 0]^T$, $\mathbf{x}_2=[0\quad 1]^T$.

3. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2+2\lambda-48$, $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-8$,
$$\mathbf{A}-6\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4&-4\\18&-18\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&-4\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+8\mathbf{I}=\begin{bmatrix}18&-4\\18&-4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}18&-4\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}9&-2\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[2\quad 9]^T$.

4. $a=0$이면 문제 2와 같다.
$a\neq 0$이면, $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2-a^2$, $\lambda_1=a$, $\lambda_2=-a$,
$$\mathbf{A}-a\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-a&a\\a&-a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-a&a\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+a\mathbf{I}=\begin{bmatrix}a&a\\a&a\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&a\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad -1]^T$.

5. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2-25$, $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-5$,
$$\mathbf{A}-5\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-2&4\\4&-8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&4\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[2\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+5\mathbf{I}=\begin{bmatrix}8&4\\4&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}8&4\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad -2]^T$.

6. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2+9$, $\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$,
$$\mathbf{A}-3i\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-3i&3\\-3&-3i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3i&3\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&i\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad i]^T$,
$$\mathbf{A}+3i\mathbf{I}=\begin{bmatrix}3i&3\\-3&3i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3i&3\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-i\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[i\quad 1]^T$.

7. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2-4\lambda+3$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$,
$$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 0]^T$,
$$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-2&2\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad 1]^T$.

8. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \lambda^2-1.6\lambda+1$,
$\lambda_1=0.8+0.6i$, $\lambda_2=0.8-0.6i$,
$$\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-0.6i&-0.6\\0.6&-0.6i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-0.6i&-0.6\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-i\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[i\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0.6i&-0.6\\0.6&0.6i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0.6i&-0.6\\0&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&i\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad i]^T$.

9. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3-\lambda^2+44\lambda-96$,
$\lambda_1=3$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=-8$,
$$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-11&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-11&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 0\quad 0]^T$,
$$\mathbf{A}-4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-12&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[0\quad 0\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+8\mathbf{I}=\begin{bmatrix}11&0&0\\0&0&0\\0&0&12\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}11&0&0\\0&0&12\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_3=[0\quad 1\quad 0]^T$.

10. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3-5\lambda^2+525\lambda+5625$,
$\lambda_1=25$, $\lambda_2=\lambda_3=-15$,
$$\mathbf{A}-25\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-35&10&-15\\10&-20&-30\\-5&-10&-25\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}7&-2&3\\1&-2&-3\\1&2&5\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&5\\1&-2&-3\\7&-2&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&5\\0&-4&-8\\0&-16&-32\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 2\quad -1]^T$,
$$\mathbf{A}+15\mathbf{I}=\begin{bmatrix}5&10&-15\\10&20&-30\\-5&-10&15\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3\\1&2&-3\\1&2&-3\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad 1\quad 1]^T$, $\mathbf{x}_3=[3\quad 0\quad 1]^T$.

11. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3+8\lambda^2-19\lambda+12$,
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=4$,
$$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2&5&3\\0&3&6\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&5&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-7\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[7\quad -4\quad 2]^T$,
$$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&5&3\\0&1&6\\0&0&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&6\\0&0&-2\\0&5&3\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&6\\0&0&-2\\0&0&-27\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$,

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_3 = [5 \quad 1 \quad 0]^T$.

12. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 3a\lambda^2 - (3a^2 - 2)\lambda + a^3 - 2a$,
$\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = a - \sqrt{2}$,

$$\mathbf{A} - a\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$,

$$\mathbf{A} - (a + \sqrt{2})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = [1 \quad \sqrt{2} \quad 1]^T$,

$$\mathbf{A} - (a - \sqrt{2})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_3 = [1 \quad -\sqrt{2} \quad 1]^T$.

13. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 6.5\lambda^2 - 12\lambda + 4.5$,
$\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$,

$$\mathbf{A} - \tfrac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3.5 \\ 1.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & -6.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6.25 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$,

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_3 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$.

14. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 - 2\lambda^2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$,

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$,

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$.

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$,

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0]^T$,

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = [0 \quad 1]^T$,
x 축에 있는 점은 그대로이고 y 축에 있는 점만 $-y$ 로 움직인다.

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 + 1$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,

$$\mathbf{A} - i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -i]^T$,

$$\mathbf{A} + i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = [i \quad 1]^T$,
고유 벡터 (eigenvector) 가 모두 복소수 벡터이므로 회전에 의해 움직이지 않는 방향이 없슴을 보여준다.

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 8\lambda + 16$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$,

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0 \quad 1]^T$,
모든 방향으로 4 배 증가한다.

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$,
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$,

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]^T$,

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$,
xy 평면에 있는 점은 그대로 있고 z 축에 있는 점은 $-z$ 로 움직인다.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \lambda$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$,

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0]^T$,

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = [0 \quad 1]^T$,
x 축에 있는 점은 원점으로 가고 y 축에 있는 점만 그대로 있게 된다.

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$,
$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,
$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -1 \quad 0]^T$,
$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$, $\mathbf{x}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$,
평면 $y = x$ 에 있는 점은 그대로 있고 직선 $y = -x, z = 0$ 에 있는 점은 원점으로 움직인다.

7.2. Some Applications of Eigenvalue Problems

1. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 10\lambda + 16$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$,
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [2 \quad -\sqrt{2}]^T$,
$\mathbf{A} - 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [\sqrt{2} \quad 2]^T$.
답. 2, $[2 \quad -\sqrt{2}]^T$; 8, $[\sqrt{2} \quad 2]^T$.
2. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 4\lambda + 3.84$, $\lambda_1 = 1.6$, $\lambda_2 = 2.4$,
$\mathbf{A} - 1.6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -1]^T$,
$\mathbf{A} - 2.4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 1]^T$.
답. 1.6, $[1 \quad -1]^T$; 2.4, $[1 \quad 1]^T$.
3. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 6\lambda + 6.75$, $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 4.5$,
$\mathbf{A} - 1.5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -1]^T$,
$\mathbf{A} - 4.5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 1]^T$.
답. 1.4, $[1 \quad -1]^T$; 4.5, $[1 \quad 1]^T$.
4. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$,
$\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -1]^T$,
$\mathbf{A} - \frac{3}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 1]^T$.
답. $\frac{1}{2}$, $[1 \quad -1]^T$; $\frac{3}{2}$, $[1 \quad 1]^T$.
5. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$,
$\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -\sqrt{2}]^T$,
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [\sqrt{2} \quad 1]^T$.
답. $\frac{1}{2}$, $[1 \quad -\sqrt{2}]^T$; 2, $[\sqrt{2} \quad 1]^T$.
6. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2$,
$\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.75 & 0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -1]^T$,
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.75 & 0.75 \\ 0.75 & -0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.75 & 0.75 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 1]^T$.
답. $\frac{1}{2}$, $[1 \quad -1]^T$; 2, $[1 \quad 1]^T$.
7. 극한 상태를 나타내는 벡터가 $\mathbf{x}$라면 $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}$를 만족하게 되므로, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$를 얻는다. 이것은 $\mathbf{A}^T$가 고유치 (eigenvalue) 1을 가진다는 말이다. 그런데 $\mathbf{A}^T$와 $\mathbf{A}$는 같은 고유치를 가지므로, 결국 $\mathbf{A}$가 고유치 1을 가지게 된다. 실제로 $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로, 주어진 행렬 $\mathbf{A}$는 고유치 1과 고유 벡터 $[1 \quad 1]^T$ 를 가진다.
이제 고유치가 1일 때, $\mathbf{A}^T$의 고유 벡터를 구하기 위해 특성 행렬 (characteristic matrix) $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 를 구하면, $\begin{bmatrix} -0.8 & 0.5 \\ 0.8 & -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.8 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이 되므로, 특히, 각 성분의 합이 1인 고유 벡터는 $[\frac{5}{13} \quad \frac{8}{13}]^T$ 이다.
8. 극한 상태를 나타내는 벡터가 $\mathbf{x}$라면 $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}$를 만족하게 되므로, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$를 얻는다. 이것은 $\mathbf{A}^T$가 고유치 1을 가진다는 말이다. 그런데 $\mathbf{A}^T$와 $\mathbf{A}$는 같은 고유치를 가지므로, 결국 $\mathbf{A}$가 고유치 1을 가지게 된다. 실제로 $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이므로, 행렬 $\mathbf{A}$는 고유치 1과 고유 벡터 $[1 \quad 1 \quad 1]^T$ 를 가진다.
이제 고유치가 1일 때, $\mathbf{A}^T$의 고유 벡터를 구하기 위해 특성 행렬 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 를 구하면,
$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & -0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & -0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이 되므로, 특히, 각 성분의 합이 1인 고유 벡터는 $[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]^T$ 이다.
9. 극한 상태를 나타내는 벡터가 $\mathbf{x}$라면 $\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T\mathbf{A}$를 만족하게 되므로, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}$를 얻는다. 이것은 $\mathbf{A}^T$가 고유치 1을 가진다는 말이다. 그런데 $\mathbf{A}^T$와 $\mathbf{A}$는 같은 고유치를 가지므로, 결국 $\mathbf{A}$가 고유치 1을 가지게 된다.

실제로 $\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.3\\0.2 & 0.6 & 0.2\\0.3 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 이므로, 행렬 **A**는 고유치 1과 고유 벡터 $[1\quad 1\quad 1]^T$ 를 가진다. 이제 고유치가 1일 때, $\mathbf{A}^T$의 고유 벡터를 구하기 위해 특성 행렬 $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ 를 구하면,

$$\begin{bmatrix}-0.6 & 0.2 & 0.1\\0.3 & -0.4 & 0.1\\0.3 & 0.2 & -0.2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-0.6 & 0.2 & 0.1\\0 & -0.6 & 0.3\\0 & 0.6 & -0.3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-0.6 & 0.2 & 0.1\\0 & -0.6 & 0.3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1.8 & 0 & 0.6\\0 & -0.6 & 0.3\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\0 & 2 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 이 되므로, 특히, 각 성분의 합이 1인 고유 벡터는 $[\frac{2}{11}\quad \frac{3}{11}\quad \frac{6}{11}]^T$ 이다.

10. 비례 변화를 얻기 원하므로, 분배 벡터 **x** 가 $\mathbf{Lx}=\lambda\mathbf{x}$를 만족하고 λ는 성장율이 된다.
$|\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+3.6\lambda+0.8$,
$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1+\sqrt{0.6},\ \lambda_3=-1-\sqrt{0.6}$,
양인 고유치 2에 대해 특성 행렬 $\mathbf{L}-2\mathbf{I}$ 를 구하자.

$$\begin{bmatrix}-2 & 9 & 5\\0.4 & -2 & 0\\0 & 0.4 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 9 & 5\\0 & -0.2 & 1\\0 & 0.4 & -2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 9 & 5\\0 & -0.2 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 0 & 50\\0 & -0.2 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

고유 벡터는 $[25\quad 5\quad 1]^T$ 이고 성장률 (growth rate)은 2 이다.

11. 비례 변화를 얻기 원하므로, 분배 벡터 **x** 가 $\mathbf{Lx}=\lambda\mathbf{x}$를 만족하고 λ는 성장율이 된다.
$|\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+2.25\lambda$,
$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1.5,\ \lambda_3=-1.5$,
양인 고유치 1.5에 대해 특성 행렬 $\mathbf{L}-1.5\mathbf{I}$ 를 구하자.

$$\begin{bmatrix}-1.5 & 6 & 0\\0.375 & -1.5 & 0\\0 & 0.15 & -1.5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1.5 & 6 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0.15 & -1.5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-1.5 & 6 & 0\\0 & 0.15 & -1.5\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1.5 & 0 & 60\\0 & 0.15 & -1.5\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

고유 벡터는 $[40\quad 10\quad 1]^T$ 이고 성장률은 1.5 이다.

12. 비례 변화를 얻기 원하므로, 분배 벡터 **x** 가 $\mathbf{Lx}=\lambda\mathbf{x}$를 만족하고 λ는 성장율이 된다.
$|\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+8.32\lambda+2.04$,
$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-0.247,\ \lambda_3=-2.753$,
양인 고유치 3에 대해 특성 행렬 $\mathbf{L}-3\mathbf{I}$ 를 구하자.

$$\begin{bmatrix}-3 & 10.4 & 4.25\\0.8 & -3 & 0\\0 & 0.6 & -3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 10.4 & 4.25\\0 & -0.68 & 3.4\\0 & 0.6 & -3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 10.4 & 4.25\\0 & -0.68 & 3.4\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 10.4 & 4.25\\0 & 1 & -5\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 0 & 56.25\\0 & 1 & -5\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

고유 벡터는 $[75\quad 20\quad 4]^T$ 이고 성장률은 3이다.

13. 총 소요 경비는 비용 벡터**p**가 나타내고 이 경비에 의해 얻어지는 수입은 **Ap**가 된다. 따라서 총 경비와 총 수입이 같아지길 원하므로 $\mathbf{Ap}=\mathbf{p}$를 얻는다. 벡터 $\mathbf{x}=[1\quad 1\quad 1]^T$ 에 대해 $\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{x}$ 가 성립하므로 실제로 **A**는 고유치 1을 가지게 된다. 이 고유치에 대해 특성 행렬 $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ 가 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{bmatrix}-0.9 & 0.5 & 0\\0.8 & -1 & 0.4\\0.1 & 0.5 & -0.4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-0.9 & 0.5 & 0\\0 & -5 & 3.6\\0 & 5 & -3.6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-9 & 0 & 3.6\\0 & -5 & 3.6\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

따라서 고유 벡터는 $[0.4\quad 0.72\quad 1]^T$ 이다.
답. $\mathbf{p}=c[0.4\quad 0.72\quad 1]^T,\ c>0$ 인 상수.

14. k 번째 열은 k 번째 공장의 생산물 중에서 각 공장에 소요되는 비율을 표시하므로 이 열의 합은 1이 된다. 벡터 $\mathbf{x}=[1\quad 1\quad 1]^T$ 에 대해 $\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{x}$ 가 성립하므로 실제로 **A**는 고유치 1을 가지게 된다.

15. $\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-0.9 & 0.4 & 0.2\\0.5 & -1 & 0.1\\0.1 & 0.4 & -0.6\end{bmatrix}$ 이므로,

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-0.9 & 0.4 & 0.2 & 0.1\\0.5 & -1 & 0.1 & 0.3\\0.1 & 0.4 & -0.6 & 0.1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}0.1 & 0.4 & -0.6 & 0.1\\0.5 & -1 & 0.1 & 0.3\\-0.9 & 0.4 & 0.2 & 0.1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -6 & 1\\0 & -3 & 3.1 & -0.2\\0 & 4 & -5.2 & 1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & -6 & 1\\0 & -3 & 3.1 & -0.2\\0 & 0 & -3.2 & 2.2\end{array}\right],$$

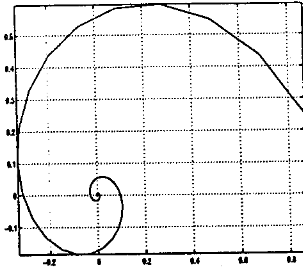
답. $\mathbf{x}=[-0.55\quad -0.6438\quad -0.6875]^T$.

16. (a) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$ 가 실계수 방정식이 된다. 실계수 방정식은 실근을 가지거나 복소수 근을 가질 경우 켤레 쌍으로 가진다. 따라서 **A** 의 고유치는 실수 이거나 복소수인 경우 켤레 쌍으로 생긴다.
(b) $\mathbf{A}^{-1}$ 존재 $\iff$ $\det\mathbf{A}\neq 0$. 여기서 **A** 의 고유치를 중복도를 고려하여 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 이라 하면, $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ 이 되므로, 특히 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}-0\mathbf{I}|=\lambda_1\cdots\lambda_n$ 을 얻는다. 그러므로 $\mathbf{A}^{-1}$ 존재 $\iff\lambda_1\cdots\lambda_n\neq 0\iff$ 0은 **A** 의 고유치가 아니다; $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}\iff\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}(\lambda\mathbf{x})=\lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ $\iff\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}=\lambda^{-1}\mathbf{x}$. 그러므로 $\mathbf{A}^{-1}$ 의 고유치는 $\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1}$ 이다.
(c) 다항식 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$ 의 λ^{n-1} 의 계수를 조사해 보자. λ^{n-1} 은 대각 원소들의 곱을 살펴볼 때, 예를 들어 $a_{11}(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$ 에서 $(-1)^{n-1}a_{11}$ 이 생긴다. 마찬가지로 $(-1)^{n-1}a_{ii}\ (1\le i\le n)$ 도 λ^{n-1} 의 계수이므로 이들의 합이 λ^{n-1} 의 계수이다. 반면에 $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ 이므로, λ^{n-1} 의 계수는 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}\lambda_i$ 이다. 즉 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}\lambda_i$ $=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}a_{ii}$ 가 되어 **A** 의 trace 는 고유치의 합이 된다.
(d) $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ 이면 $(\mathbf{A}-k\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{Ax}-k\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}-k\mathbf{x}$ $=(\lambda-k)\mathbf{x}$ 이다. $(\mathbf{A}-k\mathbf{I})\mathbf{x}=\lambda'\mathbf{x}$ 이면 $\mathbf{Ax}$

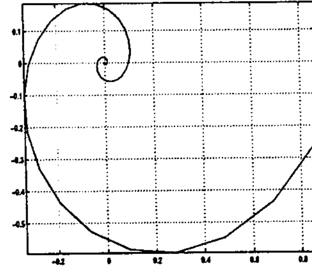
$= [(\mathbf{A}-k\mathbf{I})+k\mathbf{I}]\mathbf{x} = (\mathbf{A}-k\mathbf{I})\mathbf{x}+k\mathbf{x} = \lambda'\mathbf{x}+k\mathbf{x}$
$= (\lambda'+k)\mathbf{x}$ 이다. 따라서 $\mathbf{A}-k\mathbf{I}$ 의 고유치는 λ_1-k, $\ldots$, λ_n-k 이고 $\mathbf{A}$ 와 같은 고유 벡터를 가진다.
(e) $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ 이면 $k\mathbf{Ax}=k\lambda\mathbf{x}$ 이다. $k\mathbf{Ax}=\lambda'\mathbf{x}$ 이면 $\mathbf{Ax}=\frac{1}{k}(k\mathbf{A})\mathbf{x}=\frac{1}{k}\lambda'\mathbf{x}$ 이다. 따라서 $k\mathbf{A}$ 의 고유치는 $k\lambda_1, \ldots, k\lambda_n$ 이고 $\mathbf{A}$ 와 같은 고유 벡터를 가진다 $(k\neq 0)$; $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$ 이면 수학적 귀납법에 의해 $\mathbf{A}^m\mathbf{x}=\lambda^m\mathbf{x}$ 이다. 따라서 $\mathbf{A}^m$ 의 고유치 중에는 $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ 이 있고 $\mathbf{A}$ 의 고유 벡터를 자신의 고유 벡터로 가진다.
(f) 위의 (e) 로 부터 $p(\mathbf{A})$ 의 고유치에 $p(\lambda_j)$ $(j=1,\ldots,n)$ 가 있고 $\mathbf{A}$ 의 고유 벡터를 자신의 고유 벡터로 가진다.
(g) $\mathbf{L}=\begin{bmatrix}0 & l_{12} & l_{13}\\ l_{21} & 0 & 0\\ 0 & l_{32} & 0\end{bmatrix}$,
$|\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3+l_{12}l_{21}\lambda+l_{13}l_{21}l_{32}$,
$l_{12}>0, l_{13}>0, l_{21}>0, l_{32}>0$ 이므로 $|\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I}|$ 의 상수항이 양수가 되어 0 은 고유치가 아니다. 먼저 모든 고유치가 실수이면 λ^2 의 계수가 0 이므로 고유치의 합이 0이 된다. 0 아닌 세 실수의 합이 0 이 되려면 적어도 하나는 양수여야 한다. 따라서 양의 고유치를 가진다. 이제 남은 경우는 하나는 실수 λ_1 이고 나머지 두개는 켤레 복소수 쌍 $\lambda_2=a+bi$, $\lambda_3=a-bi$ 인 경우이다. 이때 세근의 곱 $(a^2+b^2)\lambda_1$ 은 $\det\mathbf{L}=l_{13}l_{21}l_{32}$ 이므로 $(a^2+b^2)\lambda_1=l_{13}l_{21}l_{32}>0$ 이 된다. 따라서 $\lambda_1>0$ 이 되어 양의 고유치를 가진다.

7.3. Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices

1. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 직교 (orthogonal) 행렬이다.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-1.92\lambda+1$,
$\lambda_1=0.96+0.28i$, $\lambda_2=0.96-0.28i$,
고유치의 절대값이 1 이다.
2. $a=0$ 이면 $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 왜대칭 행렬이다. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2+b^2$, $\lambda_1=bi$, $\lambda_2=-bi$, 고유치가 순 허수이거나 0 이다; $b=0$ 이면, $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 대칭 행렬이다. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-2a\lambda+a^2$, $\lambda_1=\lambda_2=a$, 고유치가 모두 실수이다; $b\neq 0$, $a\neq 0$ 일 때 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=(a^2+b^2)\mathbf{I}$ 이므로 $a^2+b^2=1$ 인 경우 $\mathbf{A}$ 는 직교 행렬이다. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2$, $\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$, 고유치의 절대값이 a^2+b^2 이다.
3. $\mathbf{A}$는 세가지 중에서 어느 것도 아니다. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=17\mathbf{I}$.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-2\lambda+17$, $\lambda_1=1+4i$, $\lambda_2=1-4i$.
4. $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 직교 행렬이다.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+(2\cos\theta+1)\lambda^2-(2\cos\theta+1)\lambda+1$,
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\cos\theta+i\sin\theta$, $\lambda_3=\cos\theta-i\sin\theta$,
고유치의 절대값이 1 이다.
5. $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 왜대칭 행렬이다.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3-625\lambda$,
$\lambda_1=0$, $\lambda_2=25i$, $\lambda_3=-25i$,
고유치가 순 허수이거나 0 이다.
6. $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 대칭 행렬이다.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+3a\lambda^2-3(a^2-k^2)\lambda$
$+(a-k)^2(a+2k)$,
$\lambda_1=\lambda_2=a-k$, $\lambda_3=2+2k$,
고유치가 모두 실수이다
7. 주 대각 원소는 a_{jj}, $j=1,\ldots,n$ 이므로, 이것에 조건을 적용하면 $a_{jj}=-a_{jj}$를 얻는다. 따라서 $a_{jj}=0$이 되므로 왜대칭 행렬의 모든 주 대각 원소는 0 이다.
8. $\mathbf{Au}=\lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{Av}=\lambda\mathbf{v}$ 라면 $\lambda\mathbf{u}^T\mathbf{v}=(\mathbf{Au})^T\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\mathbf{A}^T\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\mathbf{Av}=\mu\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ 이 얻어진다. 이로 부터 $(\lambda-\mu)\mathbf{u}^T\mathbf{v}=0$ 가 되고 $\lambda\neq\mu$ 이므로 $\mathbf{u}^T\mathbf{v}=0$ 이 된다. 즉, 대칭 행렬의 서로 다른 두 고유치에 대응되는 두 고유 벡터는 서로 직교한다.
9. x 축을 중심으로 θ 만큼 회전하는 선형 변환이다.
10. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 는 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$ 이므로, $\mathbf{A}$ 는 단위 행렬이 아닌 3×3 대칭 직교 행렬이다.
11. $\mathbf{A}$가 왜대칭 행렬이고, $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}$라 하자. 그러면,
$\mathbf{B}^T=\mathbf{B}^T\mathbf{I}=\mathbf{B}^T(\mathbf{AB})=(\mathbf{B}^T\mathbf{A})\mathbf{B}=(\mathbf{A}^T\mathbf{B})^T\mathbf{B}$
$=(-\mathbf{AB})^T\mathbf{B}=(-\mathbf{I})^T\mathbf{B}=-\mathbf{IB}=-\mathbf{B}$ 를 얻는다.
즉, 왜대칭 행렬의 역행렬도 왜대칭 행렬이다.
12. $\mathbf{A}$ 가 왜대칭 $n\times n$ 행렬이면, $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ 이다. 여기서 $\det(\mathbf{A}^T)=\det\mathbf{A}$ 이므로, n 이 홀수라면 조건에서 $\det\mathbf{A}=\det(\mathbf{A}^T)=\det(-\mathbf{A})=(-1)^n\det\mathbf{A}$
$=-\det\mathbf{A}$ 가 되어, $\det\mathbf{A}=0$ 을 얻는다. 따라서 n 이 홀수일 때, nonsingular 왜대칭 $n\times n$ 행렬은 없다.
$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
13. 직교 행렬이면 nonsingular 이므로 문제 13에 의해 직교 왜대칭 3×3 행렬은 없다.
14. (a) $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^T=\mathbf{B}^{-1}$ 이면,
$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{AB})^{-1}$ 이고,
$(\mathbf{A}^{-1})^T=(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}=(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ 이다. 따라서 $\mathbf{AB}$ 와 $\mathbf{A}^{-1}$ 도 직교 행렬이다; 즉, 회전의 합성과 역회전 변환도 회전 변환이다.
(b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 이므로 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$ 이다.
즉, $\mathbf{A}$ 는 직교 행렬이다;
$\mathbf{a}_1=[\cos\theta \quad \sin\theta]^T$, $\mathbf{a}_2=[-\sin\theta \quad \cos\theta]^T$,
$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2=0$, $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_1=1$, $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}_2=1$,
$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ 는 직교 좌표계 (orthogonal system) 이다;
$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.
(c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.96 & -0.28\\ 0.28 & 0.96\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 이면,
$\tan\theta=0.2917$, $\theta=16.2602^\circ$ 이다;
$\mathbf{A}^m$ 의 고유치는 $\lambda_1=0.96+0.28i$, $\lambda_2=0.96-0.28i$ 에 대해 λ_1^m, λ_2^m 이므로, $m\to\infty$ 이면 진동한다.
(d) $0.9\mathbf{A}^m$ 의 고유치는 $\lambda_1=0.96+0.28i$, $\lambda_2=0.96-0.28i$ 에 대해 $0.9^m\lambda_1^m$, $0.9^m\lambda_2^m$ 이므로, $m\to\infty$ 이면 0 으로 수렴한다; 나선형 궤적을 따라간다. (그림은 다음 page 에)
(e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$.



$\lambda_1 = 0.96 + 0.28i$ 인 경우.



$\lambda_2 = 0.96 - 0.28i$ 인 경우.

7.4. Complex Matrices: Hermitian, Skew-Hermitian, Unitary

1. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 11\lambda + 18$,
$|\mathbf{A} - 9\mathbf{I}| = 9^2 - 11 \cdot 9 + 18 = 81 - 99 + 18 = 0$,
$|\mathbf{A} - 2\mathbf{I}| = 2^2 - 11 \cdot 2 + 18 = 4 - 22 + 18 = 0$;
$|\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 2i\lambda + 8$,
$|\mathbf{B} - 4i\mathbf{I}| = (4i)^2 - 2i \cdot 4i + 8 = -16 + 8 + 8 = 0$,
$|\mathbf{B} + 2i\mathbf{I}| = (-2i)^2 - 2i \cdot (-2i) + 8 = -4 - 4 + 8 = 0$;
$|\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - i\lambda - 1$,
$\left|\mathbf{C} - (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)\mathbf{I}\right|$
$= (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^2 - i \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) - 1$
$= (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i) - 1 = 0$,
$\left|\mathbf{C} - (-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)\mathbf{I}\right|$
$= (-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^2 - i \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) - 1$
$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i) - 1 = 0$.

2. $\mathbf{A} - 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 1-3i \\ 1+3i & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 1-3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [2 \quad 1+3i]^T$,
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1-3i \\ 1+3i & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1-3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [-5 \quad 1+3i]^T$.

3. $\mathbf{B} - 4i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -i & 2+i \\ -2+i & -5i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 2+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1-2i \quad 1]^T$,
$\mathbf{B} + 2i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5i & 2+i \\ -2+i & i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5i & 2+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [i \quad 2-i]^T$.

4. $\mathbf{C} - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1]^T$,
$\mathbf{C} - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -1]^T$.

5. $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 Hermitian 이다.
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 4\lambda - 21$, $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -3$,
$\mathbf{A} - 7\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 3+4i \\ 3-4i & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 3+4i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [5 \quad 3-4i]^T$,
$\mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5 & 3+4i \\ 3-4i & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3+4i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [-5 \quad 3-4i]^T$.

6. $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian 이다.
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - i\lambda + 2$, $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -i$,
$\mathbf{A} - 2i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ -1+i & -2i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1+i \quad i]^T$,
$\mathbf{A} + i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [i \quad 1-i]^T$.

7. $\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 unitary 이다.
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \lambda + 1$,
$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}$,
$\mathbf{A} - (\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{\frac{3}{4}} & i\sqrt{\frac{3}{4}} \\ i\sqrt{\frac{3}{4}} & -i\sqrt{\frac{3}{4}} \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} -i\sqrt{\frac{3}{4}} & i\sqrt{\frac{3}{4}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1]^T$,
$\mathbf{A} - (\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i\sqrt{\frac{3}{4}} & i\sqrt{\frac{3}{4}} \\ i\sqrt{\frac{3}{4}} & i\sqrt{\frac{3}{4}} \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} i\sqrt{\frac{3}{4}} & i\sqrt{\frac{3}{4}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -1]^T$.

8. $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian 이다.
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 9i\lambda^2 + 23\lambda - 15i$,
$\lambda_1 = 5i$, $\lambda_2 = 3i$, $\lambda_3 = i$,
$\mathbf{A} - 5i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & -4i & 0 \\ i & 0 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & -4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0 \quad 1]^T$,
$\mathbf{A} - 3i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 0 & -2i & 0 \\ i & 0 & i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$,

$$\mathbf{A}-i\mathbf{I}=\begin{bmatrix}3i&0&i\\0&0&0\\i&0&3i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3i&0&i\\0&0&0\\0&0&8i\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3i&0&0\\0&0&0\\0&0&8i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3i&0&0\\0&0&8i\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_3=[0\quad 1\quad 0]^T$.

9. $\overline{\mathbf{A}}^T=-\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian 이다.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+i\lambda^2-\lambda+i$,
$\lambda_1=\lambda_2=i,\ \lambda_3=-i$,
$$\mathbf{A}-i\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-i&i\\0&i&-i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-i&i\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 1\quad 1]^T,\ \mathbf{x}_2=[0\quad 1\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+i\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2i&0&0\\0&i&i\\0&i&i\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2i&0&0\\0&i&i\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_3=[0\quad 1\quad -1]^T$.

10. $\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 Hermitian 이다.
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+4\lambda$,
$\lambda_1=2,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=-2$,
$$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-2&1+i&0\\1-i&-2&1+i\\0&1-i&-2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&1+i&0\\0&-1-i&2i\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 1-i\quad -i]^T$,
$$\mathbf{A}-0\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&1+i&0\\1-i&0&1+i\\0&1-i&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0&1+i&0\\1-i&0&1+i\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[-i\quad 0\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2&1+i&0\\1-i&2&1+i\\0&1-i&2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&1+i&0\\0&1+i&2i\\0&1-i&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&1+i&0\\0&1+i&2i\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_3=[-1\quad 1-i\quad i]^T$.

11. 임의의 정방 행렬 $\mathbf{A}$ 에 대해
$\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\overline{\mathbf{A}}^T),\ \mathbf{C}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\overline{\mathbf{A}}^T)$ 라 하자.
그러면 당연히 $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}$ 이다.
$\overline{\mathbf{B}}^T=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}+\overline{\mathbf{A}}^T})^T=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}}+\mathbf{A}^T)^T$
$=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}}^T+\mathbf{A})=\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ 는 Hermitian.
$\overline{\mathbf{C}}^T=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}-\overline{\mathbf{A}}^T})^T=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}}-\mathbf{A}^T)^T$
$=\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{A}}^T-\mathbf{A})=-\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ 는 skew-Hermitian.
그러므로, 임의의 정방 행렬은 Hermitian 행렬과 skew-Hermitian 행렬의 합으로 쓸 수 있다.

12. (a) $\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}^{-1},\ \overline{\mathbf{B}}^T=\mathbf{B}^{-1}$ 이면,
$\overline{\mathbf{AB}}^T=\overline{\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T}=\overline{\mathbf{B}}^T\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{AB})^{-1}$,
$\overline{\mathbf{A}^{-1}}^T=\overline{\overline{\mathbf{A}}^T}^T=\mathbf{A}=(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ 이므로, $\mathbf{AB}$ 와 $\mathbf{A}^{-1}$ 도 unitary 이다;
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$,
$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$,
$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-i&0\\0&i\end{bmatrix},\ \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-i\\-i&0\end{bmatrix}$.
(b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\sqrt{3}i\\\frac{1}{2}\sqrt{3}i&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ \mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\sqrt{3}i\\\frac{1}{2}\sqrt{3}i&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,
$\mathbf{A}^3=-\mathbf{I}$.
(c) $\mathbf{A}$ 가 Hermitian 이면 $\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}$ 이므로,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=\mathbf{A}^2=\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ 가 성립한다;
$\mathbf{A}$ 가 skew-Hermitian 이면 $\overline{\mathbf{A}}^T=-\mathbf{A}$ 이므로,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=-\mathbf{A}^2=\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ 가 성립한다;
$\mathbf{A}$ 가 unitary 이면 $\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$ 이므로,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=\overline{\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}}^T=\overline{\mathbf{I}}^T=\mathbf{I}=\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$ 가 성립한다;
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3+4i\\3-4i&2\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{A}}^T$,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}29&12+16i\\12-16i&29\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$;
$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}i&1+i\\-1+i&0\end{bmatrix}=-\overline{\mathbf{B}}^T$,
$\mathbf{B}\overline{\mathbf{B}}^T=\begin{bmatrix}3&1-i\\1+i&2\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{B}}^T\mathbf{B}$;
$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\sqrt{3}i\\\frac{1}{2}\sqrt{3}i&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,
$\mathbf{C}\overline{\mathbf{C}}^T=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{C}}^T\mathbf{C}$.
(d) $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C},\ \overline{\mathbf{B}}^T=\mathbf{B},\ \overline{\mathbf{C}}^T=-\mathbf{C}$;
$\overline{\mathbf{A}}^T=\overline{\mathbf{B}+\mathbf{C}}^T=\overline{\mathbf{B}}^T+\overline{\mathbf{C}}^T=\mathbf{B}-\mathbf{C}$,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=(\mathbf{B}+\mathbf{C})(\mathbf{B}-\mathbf{C})=\mathbf{B}^2+\mathbf{CB}-\mathbf{BC}+\mathbf{C}^2$,
$\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}=(\mathbf{B}-\mathbf{C})(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{B}^2-\mathbf{CB}+\mathbf{BC}+\mathbf{C}^2$;
$\mathbf{A}$ 가 normal $\iff \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$
$\iff 2\mathbf{BC}=2\mathbf{CB}$
$\iff$ $\mathbf{B}$ 와 $\mathbf{C}$ 가 가환.
(e) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0\\i&0\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}0&-i\\0&0\end{bmatrix}$,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$;
$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&\sqrt{3}i\\\sqrt{3}i&1\end{bmatrix},\ \overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}1&-\sqrt{3}i\\-\sqrt{3}i&1\end{bmatrix}$,
$\overline{\mathbf{A}}^T\neq\mathbf{A},\ \overline{\mathbf{A}}^T\neq-\mathbf{A}$,
$\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{A}}^T\mathbf{A}$.

13. $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}4&-4\\-4&5\end{bmatrix}$.

14. $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&2\\1&2&-9\end{bmatrix}$.

15. $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0.5&0.4&0\\0.4&0&-0.7\\0&-0.7&0\end{bmatrix}$.

16. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 3 & -6 & 9 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

17. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

18. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 16 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, $C_1 = 4 > 0$, $C_2 = \det \mathbf{C} = 4 > 0$,
$\mathbf{C}$ 는 양의 정부호 (positive definite) 이다;
$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $C_1 = 3 > 0$, $C_2 = \det \mathbf{C} = -18 < 0$,
$\mathbf{C}$ 는 양의 정부호가 아니다.

20. $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian 이다.
$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -1+3i & 2i \end{bmatrix}^T$ 이므로, $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{Ax} = 6i$ 이다.

21. $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 Hermitian 이다.
$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 5-7i & -10i \end{bmatrix}^T$ 이므로, $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{Ax} = 4$ 이다.

22. $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 Hermitian 이다.
$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} ax_1 + (b+ic)x_2 & (b-ic)x_1 + kx_2 \end{bmatrix}^T$,
$\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{Ax} = a|x_1|^2 + 2\mathrm{Re}[(b+ic)\bar{x}_1 x_2] + k|x_2|^2$.

23. $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian 이다.
$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -9+12i & -3+2i \end{bmatrix}^T$, $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{Ax} = 17i$.

24. $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 Hermitian 이다.
$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} -4i & 2i & 4-2i \end{bmatrix}^T$, $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{Ax} = 4$.

25. $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 는 skew-Hermitian 이다.
$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 5+2i & 6i & 5i \end{bmatrix}^T$, $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{Ax} = 16i$.

7.5. Similarity of Matrices. Basis of Eigenvectors. Diagonalization

1. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7}{3} & 5 \end{bmatrix}$,
$|\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 5\lambda$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 0$,
$\hat{\mathbf{A}} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ \frac{7}{3} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$,
$\hat{\mathbf{A}} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{7}{3} & 5 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Py}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_1 = 5\mathbf{x}_1$,
$\mathbf{x}_2 = \mathbf{Py}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_2 = 0\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

2. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.28 & -0.96 \\ 0.96 & 0.28 \end{bmatrix}$,
$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 3.008 & -0.544 \\ 5.456 & 6.992 \end{bmatrix}$,
$|\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 10\lambda + 24$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$,
$\hat{\mathbf{A}} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2.992 & -0.544 \\ 5.456 & 0.992 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2.992 & -0.544 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -11 \end{bmatrix}^T$,
$\hat{\mathbf{A}} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.992 & -0.544 \\ 5.456 & 2.992 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} -0.992 & -0.544 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 17 & -31 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Py}_1 = \begin{bmatrix} -10 & -5 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_1 = 6\mathbf{x}_1$,
$\mathbf{x}_2 = \mathbf{Py}_2 = \begin{bmatrix} -25 & -25 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_2 = 4\mathbf{x}_2$.

3. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}$,
$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -25 & 12 \\ -50 & 25 \end{bmatrix}$,
$|\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 25$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -5$,
$\hat{\mathbf{A}} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -30 & 12 \\ -50 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -30 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}^T$,
$\hat{\mathbf{A}} + 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -20 & 12 \\ -50 & 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -20 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Py}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_1 = 5\mathbf{x}_1$,
$\mathbf{x}_2 = \mathbf{Py}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_2 = -5\mathbf{x}_2$.

4. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 5 - 10 & 7 \end{bmatrix}$,
$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -29 & 20 \\ -42 & 29 \end{bmatrix}$,
$|\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$,
$\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -30 & 20 \\ -42 & 28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -30 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$,
$\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -28 & 20 \\ -42 & 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -28 & 20 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Py}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{x}_1$,
$\mathbf{x}_2 = \mathbf{Py}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{Ax}_2 = -\mathbf{x}_2$.

5. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,
$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 355 & -42 & 560 \\ 0 & 1 & 0 \\ -225 & 27 & -355 \end{bmatrix}$,
$|\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + \lambda^2 + 25\lambda - 25$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$,
$\lambda_3 = -5$,
$\hat{\mathbf{A}} - 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 350 & -42 & 560 \\ 0 & -4 & 0 \\ -225 & 27 & -360 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \begin{bmatrix} 350 & -42 & 560 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 350 & 0 & 560 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \end{bmatrix}^T$,
$\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 354 & -42 & 560 \\ 0 & 0 & 0 \\ -225 & 27 & -356 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 354 & -42 & 560 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2124 & 0 & 3304 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & -8 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -9 \end{bmatrix}^T$,

$$\hat{\mathbf{A}} + 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 360 & -42 & 560 \\ 0 & 6 & 0 \\ -225 & 27 & -350 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 360 & -42 & 560 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 360 & & 560 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -9 \end{bmatrix}^T$,

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{P}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 5\mathbf{x}_1$,

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{P}\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$,

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{P}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = -5\mathbf{x}_3$.

6. $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$|\hat{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 18\lambda + 8$,

$\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

$$\hat{\mathbf{A}} - 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$,

$$\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$,

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{P}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 8\mathbf{x}_1$,

$\mathbf{x}_2 = \mathbf{P}\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$,

$\mathbf{x}_3 = \mathbf{P}\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3$.

7. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 9$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$,

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -3 & 3i \\ -3i & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 3i \\ -3i & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$,

$\overline{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_2 = 0$, $\overline{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_1 = 1$, $\overline{\mathbf{x}}_2^T\mathbf{x}_2 = 1$.

8. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 8\lambda + 14$, $\lambda_1 = 4 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{2}$,

$$\mathbf{A} - (4 + \sqrt{2})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1+i \\ 1-i & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-i)/2 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} - (4 - \sqrt{2})\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ 1-i & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1+i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & (1-i)/2 \end{bmatrix}^T$,

$\overline{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_2 = 0$, $\overline{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_1 = 1$, $\overline{\mathbf{x}}_2^T\mathbf{x}_2 = 1$.

9. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 2i\lambda$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$,

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} - 2i\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{bmatrix}^T$,

$\overline{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_2 = 0$, $\overline{\mathbf{x}}_1^T\mathbf{x}_1 = 1$, $\overline{\mathbf{x}}_2^T\mathbf{x}_2 = 1$.

10. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 + 3\lambda - 10$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$,

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -21 & 7 \\ -42 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -21 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} + 5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -14 & 7 \\ -42 & 21 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -14 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

11. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 3\lambda$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$,

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 50\lambda - 150$, $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = -50$,

$$\mathbf{A} - 100\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -143 & 77 \\ 13 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -143 & 77 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 13 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} + 50\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 7 & 77 \\ 13 & 143 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 77 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 11 & -1 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{-150}\begin{bmatrix} -1 & -11 \\ -13 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -50 \end{bmatrix}.$$

13. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 12\lambda^2 + 96\lambda - 512$,

$\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -8$,

$$\mathbf{A} - 16\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & -24 & 0 \\ 84 & -24 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & -24 & 0 \\ 0 & 72 & -48 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 144 & 0 & -48 \\ 0 & 72 & -48 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 48 & -12 & 0 \\ 84 & -24 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$,

$$\mathbf{A} + 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \\ 84 & -24 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 12 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}_3 = [0 \quad 1 \quad 2]^T$,

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

14. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 1.5\lambda^2 + 1.5\lambda - 1$,

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0.5,\ \lambda_3 = -1$,

$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -4.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -6 & 6 \\ -6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4.5 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$,

$\mathbf{A} - 0.5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -4.5 & -4.5 & 6 \\ -6 & -6 & 7.5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -1 \quad 0]^T$,

$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & 3 \\ -4.5 & -3 & 6 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.5 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = [2 \quad 1 \quad 2]^T$,

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

15. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = -\lambda^3 + 225\lambda,\ \lambda_1 = 15,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -15$,

$\mathbf{A} - 15\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 10 & -10 & -20 \\ 5 & -5 & -25 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & -60 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$,

$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 10 & 5 & -20 \\ 5 & -5 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 10 & -10 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = [2 \quad 0 \quad 1]^T$,

$\mathbf{A} + 15\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 10 & 20 & -20 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 20 & 10 & -10 \\ 0 & 30 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = [0 \quad 1 \quad 1]^T$,

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$.

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 42 \\ 42 & 24 \end{bmatrix}$,

$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 13\lambda - 2028,\ \lambda_1 = 52,\ \lambda_2 = -39$,

$\mathbf{A} - 52\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -63 & 42 \\ 42 & -28 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -63 & 42 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = [2 \quad 3]^T/\sqrt{13}$,

$\mathbf{A} + 39\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 28 & 42 \\ 42 & 63 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 28 & 42 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = [3 \quad -2]^T/\sqrt{13}$,

$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,

$x_1 = (2y_1 + 3y_2)/\sqrt{13}$,

$x_2 = (3y_1 - 2y_2)/\sqrt{13}$,

$52y_1^2 - 39y_2^2 = 156$,

$\frac{y_1^2}{3} - \frac{y_2^2}{4} = 1$, 쌍곡선.

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$,

$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 14\lambda + 40,\ \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 4$,

$\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1]^T/\sqrt{2}$,

$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -1]^T/\sqrt{2}$,

$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,

$x_1 = (y_1 + y_2)/\sqrt{2}$,

$x_2 = (y_1 - y_2)/\sqrt{2}$,

$10y_1^2 + 4y_2^2 = 200$,

$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{50} = 1$, 타원.

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{bmatrix}$,

$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 75\lambda + 1250,\ \lambda_1 = 50,\ \lambda_2 = 25$,

$\mathbf{A} - 50\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1 = [4 \quad -3]^T/5$,

$\mathbf{A} - 25\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = [3 \quad 4]^T/5$,

$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,

$x_1 = (4y_1 + 3y_2)/5$,

$x_2 = (-3y_1 + 4y_2)/5$,

$50y_1^2 + 25y_2^2 = 0$,

$(y_1, y_2) = (0, 0)$, 한 점.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 10\lambda$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 0$,
$\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [3 \quad -1]^T / \sqrt{10}$,
$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad 3]^T / \sqrt{10}$,
$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,
$x_1 = (3y_1 + y_2)/\sqrt{10}$,
$x_2 = (-y_1 + 3y_2)/\sqrt{10}$,
$10y_1^2 = 40$,
$y_1 = \pm 2$, 평행한 두 직선.

20. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 17\lambda + 16$, $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 1$,
$\mathbf{A} - 16\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 2]^T / \sqrt{5}$,
$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [2 \quad -1]^T / \sqrt{5}$,
$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,
$x_1 = (y_1 + 2y_2)/\sqrt{5}$,
$x_2 = (2y_1 - y_2)/\sqrt{5}$,
$16y_1^2 + y_2^2 = 16$,
$y_1^2 + \frac{y_2^2}{16} = 1$, 타원.

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & -30 \\ -30 & 7 \end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 39\lambda - 676$, $\lambda_1 = 52$, $\lambda_2 = -13$,
$\mathbf{A} - 52\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -20 & -30 \\ -30 & -45 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -20 & -30 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [3 \quad -2]^T / \sqrt{13}$,
$\mathbf{A} + 13\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 45 & -30 \\ -30 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 45 & -30 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [2 \quad 3]^T / \sqrt{13}$,
$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,
$x_1 = (3y_1 + 2y_2)/\sqrt{13}$,
$x_2 = (-2y_1 + 3y_2)/\sqrt{13}$,
$52y_1^2 - 13y_2^2 = -52$,
$y_1^2 - \frac{y_2^2}{4} = -1$, 쌍곡선.

22. (a) 문제 7.2.16 (c) 참조.
(b) $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$,
$c_{ij} = \sum_{k=1}^{1} a_{ik} b_{kj}$, $d_{ij} = \sum_{k=1}^{1} b_{ik} a_{kj}$,
$\text{trace } \mathbf{C} = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$.
$\text{trace } \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$
$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ik} = \text{trace } \mathbf{C}$,
즉, trace $\mathbf{AB}$ = trace $\mathbf{BA}$;
$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 이면 $\mathbf{A}$ 와 $\hat{\mathbf{A}}$ 는 같은 고유치를 가진다. 따라서 (a) 에 의해 trace $\mathbf{A}$ = trace $\hat{\mathbf{A}}$ 을 얻는다. 따라서 상사 (similar) 행렬은 같은 trace 값을 가진다.
(c) $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, $\mathbf{A} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^2\hat{\mathbf{A}}\mathbf{P}^{-2}$.
(d) 고유치의 순서를 바꾸고 싶으면, $\mathbf{X}$ 에서 그에 대응하는 고유 벡터의 순서를 바꾸면 된다.

Chapter 7 Review

1. $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ 를 만족하는 $\mathbf{0}$ 아닌 벡터 $\mathbf{x}$ 가 존재하는 경우, λ 를 고유치라 하고 $\mathbf{x}$ 를 고유 벡터라고 한다.
2. 고유치는 고유 방정식 (characteristic polynomial) 의 근이므로 모든 정방 행렬은 고유치를 가진다;
$\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (2×2), $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [0 \quad 1]^T$;
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 + 1$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$,
$\mathbf{x}_1 = [-1 \quad i]^T$, $\mathbf{x}_2 = [i \quad -1]^T$.
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - i\lambda$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$,
$\mathbf{x}_1 = [0 \quad 1]^T$, $\mathbf{x}_2 = [1 \quad 0]^T$.
4. 대수적 중복도 (algebraic multiplicity) 는 고유방정식의 중근의 중복 정도를, 기하적 (geometric) 중복도는 한 고유치에 대한 일차 독립인 고유 벡터의 갯수를 말한다. 두 값이 일치하지 않으면 원래 행렬과 상사인 대각 행렬을 만들 수 없다.
5. 고유 벡터로 이루어진 기저이다; 고유 벡터의 수가 차원과 같을 때 찾을 수 있다.
6. 대칭 행렬: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 고유치가 모두 실수;
왜대칭 행렬: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, 고유치가 0 이거나 순허수;
직교 행렬: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, 고유치의 절대값이 1;
Hermitian 행렬: $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}$, 고유치가 모두 실수;
skew-Hermitian 행렬: $\overline{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{A}$, 고유치가 0 이거나 순허수;
unitary 행렬: $\overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A}^{-1}$, 고유치의 절대값이 1.
7. 문제 7.3.8 에서 대칭 행렬의 서로 다른 고유치에 대한 고유 벡터는 직교한다. 따라서 대칭 행렬의 경우 직교하는 고유 벡터를 찾을 수 있다.
8. $\mathbf{A}$ 가 고유치 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 을 가지면, 행렬 다항식 $p(\mathbf{A}) = k_m\mathbf{A}^m + k_{m-1}\mathbf{A}^{m-1} + \cdots + k_1\mathbf{A} + k_0\mathbf{I}$ 의 고유치는 $p(\lambda) = k_m\lambda^m + k_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + k_1\lambda + k_0$ 이고 $\mathbf{A}$ 와 같은 고유 벡터를 가진다;
$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 7\lambda + 6$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$,
$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [4 \quad 1]^T$,

$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4&4\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&4\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad -1]^T$;

$\mathbf{B}=\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{I}=\begin{bmatrix}208&204\\51&55\end{bmatrix}$,

$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-263\lambda+1036$, $\lambda_1=259$, $\lambda_2=4$,

$\mathbf{B}-259\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-51&204\\51-204&\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-51&204\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[4\quad 1]^T$,

$\mathbf{B}-4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}204&204\\51&51\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}204&204\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad -1]^T$.

9. Markov 과정을 이해하거나 단진자의 운동방정식을 푸는데 쓰인다.

10. 역행렬의 고유치는 원래 행렬의 고유치의 역수가 된다.

11. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-5\lambda+6$, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$,

$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-0.5&0.5\\0.5&-0.5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-0.5&0.5\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[1\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0.5&0.5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0.5&0.5\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad -1]^T$.

12. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-16$, $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-4$,

$\mathbf{A}-4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-32&16\\-48&24\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-32&16\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[1\quad 2]^T$,

$\mathbf{A}+4\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-24&16\\-48&32\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-24&16\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[2\quad 3]^T$.

13. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-0.25\lambda-0.125$, $\lambda_1=0.5$, $\lambda_2=-0.25$,

$\mathbf{A}-0.5\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-0.15&0.3\\0.3&-0.6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-0.15&0.3\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[2\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}+0.25\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0.6&0.3\\0.3&0.15\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0.6&0.3\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad -2]^T$.

14. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda$, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$,

$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-2&-1&0\\0&-3&0\\0&-3&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[0\quad 0\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&-1&0\\0&-3&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad 0\quad 0]^T$,

$\mathbf{A}-0\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&-3&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&0&-3\\0&0&0\\0&-3&3\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3=[1\quad 1\quad 1]^T$.

15. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+\lambda^2+4\lambda-4$,

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-2$,

$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2&-6&-6\\0&-4&0\\1&-1&-3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&-6&-6\\0&-4&0\\0&4&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&-6\\0&-4&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[3\quad 0\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}3&-6&-6\\0&-3&0\\1&-1&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}3&-6&-6\\0&-3&0\\0&3&0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}3&0&-6\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[2\quad 0\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}+2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}6&-6&-6\\0&0&0\\1&-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}6&-6&-6\\0&0&0\\0&0&12\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}6&-6&0\\0&0&0\\0&0&12\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3=[1\quad 1\quad 0]^T$.

16. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+15\lambda^2+9\lambda-135$,

$\lambda_1=15$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-3$,

$\mathbf{A}-15\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-6&-10&2\\-6&-10&2\\6&-2&-14\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-6&-10&2\\0&0&0\\0&-12&-12\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}-36&0&72\\0&0&0\\0&-12&-12\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[2\quad -1\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}6&-10&2\\-6&2&2\\6&-2&-2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}6&-10&2\\0&-8&4\\0&8&-4\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}24&0&-12\\0&-8&4\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad 1\quad 2]^T$,

$\mathbf{A}+3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}12&-10&2\\-6&8&2\\6&-2&4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}12&-10&2\\0&6&6\\0&6&6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}36&0&36\\0&6&6\\0&0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3=[1\quad 1\quad -1]^T$.

17. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-10\lambda+21$, $\lambda_1=7$, $\lambda_2=3$,

$\mathbf{A}-7\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&-1\\5&-5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_1=[1\quad 1]^T$,

$\mathbf{A}-3\mathbf{I}=\begin{bmatrix}5&-1\\5&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}5&-1\\0&0\end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2=[1\quad 5]^T$,

$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&1\\1&5\end{bmatrix}$, $\mathbf{X}^{-1}=\begin{bmatrix}1.25&-0.25\\-0.25&0.25\end{bmatrix}$,

$\mathbf{D}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}7&0\\0&3\end{bmatrix}$.

18. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3+18\lambda^2+81\lambda-1458$, $\lambda_1=18$, $\lambda_2=9$, $\lambda_3=-9$,

$$\mathbf{A}-18\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-3&6&-12\\4&-8&-2\\-4&8&-25\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&6&-12\\0&0&-54\\0&0&-27\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&6&0\\0&0&-54\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[2\quad 1\quad 0]^T$,
$$\mathbf{A}-9\mathbf{I}=\begin{bmatrix}6&6&-12\\4&1&-2\\-4&8&-16\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}6&6&-12\\0&-9&18\\0&36&-72\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}18&0&0\\0&-9&18\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[0\quad 2\quad 1]^T$,
$$\mathbf{A}+9\mathbf{I}=\begin{bmatrix}24&6&-12\\4&19&-2\\-4&8&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}24&6&-12\\0&108&0\\0&54&0\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}24&0&-12\\0&108&0\\0&0&12\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_3=[1\quad 0\quad 2]^T$,
$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{bmatrix},\ \mathbf{X}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&1&-2\\-2&4&1\\1&-2&4\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}18&0&0\\0&9&0\\0&0&-9\end{bmatrix}.$$

9. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=-\lambda^3-3\lambda^2+108\lambda$,
$\lambda_1=9,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=-12$,
$$\mathbf{A}-9\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-17&11&3\\4&-10&3\\-4&10&-3\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-17&11&3\\0&-126&63\\0&126&-63\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-2142&0&1071\\0&-126&63\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad 1\quad 2]^T$,
$$\mathbf{A}-0\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-8&11&3\\4&-1&3\\-4&10&6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-8&11&3\\0&9&9\\0&9&9\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-72&0&-72\\0&9&9\\0&0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad 1\quad -1]^T$,
$$\mathbf{A}+12\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4&11&3\\4&11&3\\-4&10&18\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}4&11&3\\0&0&0\\0&21&21\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}84&0&-168\\0&0&0\\0&21&21\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_3=[2\quad -1\quad 1]^T$,
$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\2&-1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{X}^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{bmatrix}0&-3&-3\\-3&-3&3\\-3&3&0\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D}=\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}9&0&0\\0&0&0\\0&0&-12\end{bmatrix}.$$

20. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&6\\6&-7\end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2+5\lambda-50,\ \lambda_1=5,\ \lambda_2=-10$
$$\mathbf{A}-5\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-3&6\\6&-12\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&6\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[2\quad 1]^T/\sqrt{5}$,
$$\mathbf{A}+10\mathbf{I}=\begin{bmatrix}12&6\\6&3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}12&6\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[1\quad -2]^T/\sqrt{5}$,
$$\mathbf{x}=\mathbf{X}\mathbf{y}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2&1\\1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$
$x_1=(2y_1+y_2)/\sqrt{5}$,
$x_2=(y_1-2y_2)/\sqrt{5}$,
$5y_1^2-10y_2^2=10$,
$\frac{y_1^2}{2}-y_2^2=1$, 쌍곡선.

21. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}9&-3\\-3&17\end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-26\lambda+144,\ \lambda_1=18,\ \lambda_2=8$
$$\mathbf{A}-18\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-9&-3\\-3&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-9&-3\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[1\quad -3]^T/\sqrt{5}$,
$$\mathbf{A}-8\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&-3\\-3&9\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-3\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[3\quad 1]^T/\sqrt{5}$,
$$\mathbf{x}=\mathbf{X}\mathbf{y}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&3\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$
$x_1=(y_1+3y_2)/\sqrt{5}$,
$x_2=(-3y_1+y_2)/\sqrt{5}$,
$18y_1^2+8y_2^2=72$,
$\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{9}=1$, 타원.

22. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&12\\12&-5\end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-169,\ \lambda_1=13,\ \lambda_2=-13$
$$\mathbf{A}-13\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-8&12\\12&-18\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-8&12\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_1=[3\quad 2]^T/\sqrt{13}$,
$$\mathbf{A}+13\mathbf{I}=\begin{bmatrix}18&12\\12&8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}18&12\\0&0\end{bmatrix},$$
$\mathbf{x}_2=[2\quad -3]^T/\sqrt{13}$,
$$\mathbf{x}=\mathbf{X}\mathbf{y}=\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix}3&2\\2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix},$$
$x_1=(3y_1+2y_2)/\sqrt{13}$,
$x_2=(2y_1-3y_2)/\sqrt{13}$,
$13y_1^2-13y_2^2=0$,
$y_1^2\pm y_2^2=0$, 두 직선.

23. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7.4&3.2\\3.2&2.6\end{bmatrix}$,
$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\lambda^2-10\lambda+9,\ \lambda_1=9,\ \lambda_2=1$

$\mathbf{A} - 9\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1.6 & 3.2 \\ 3.2 & -6.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1.6 & 3.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [2 \quad 1]^T / \sqrt{5}$,
$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 6.4 & 3.2 \\ 3.2 & 1.6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6.4 & 3.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -2]^T / \sqrt{5}$,
$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,
$x_1 = (2y_1 + y_2)/\sqrt{5}$,
$x_2 = (y_1 - 2y_2)/\sqrt{5}$,
$9y_1^2 + y_2^2 = 9$,
$y_1^2 + \frac{y_2^2}{9} = 1$, 타원.

24. $|\mathbf{S}_x - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$
$\mathbf{S}_x - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 1]^T$,
$\mathbf{S}_x + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -1]^T$,
$|\mathbf{S}_y - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$
$\mathbf{S}_y - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad i]^T$,
$\mathbf{S}_y + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [1 \quad -1]^T$,
$|\mathbf{S}_z - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - 1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$
$\mathbf{S}_z - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_1 = [1 \quad 0]^T$,
$\mathbf{S}_z + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}_2 = [0 \quad 1]^T$,
$\mathbf{S}_x\mathbf{S}_y = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i\mathbf{S}_z$,
$\mathbf{S}_y\mathbf{S}_x = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = -i\mathbf{S}_z$,
$\mathbf{S}_x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = i\mathbf{I}$,
$\mathbf{S}_y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = i\mathbf{I}$,
$\mathbf{S}_z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = i\mathbf{I}$.

CHAPTER 8

Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

This chapter deals with vectors and vector functions in 3-space and extends the differential calculus to these vector functions. Forces, velocities and various other quantities are vectors. This makes the algebra and calculus of these vector functions the natural instrument for the engineer and physicist in solid mechanics, fluid flow, heat flow, electrostatics, and so on. The engineer must understand these fields as the basis of the design and construction of systems, such as airplanes, laser generators, thermodynamical systems, or robots. In three dimensions (as opposed to higher dimensions), geometrical ideas become influential, enriching the theory, and many geometrical quantities (tangents and normals, for example) can be given by vectors.

As a preparation, in Secs. 8.1–8.3 we explain the basic *algebraic* operations with vectors in 3-space. Vector differential calculus begins in Sec. 8.4 with a discussion of vector functions, which represent vector fields and have various physical and geometrical applications. Then the basic concepts of differential calculus are extended to vector functions in a simple and natural fashion. In Secs. 8.5–8.7 we shall see that vector functions are useful in studying curves and their applications as paths of moving bodies in mechanics.

We finally discuss three physically and geometrically important concepts related to scalar and vector fields, namely, the gradient (Sec. 8.9), divergence (Sec. 8.10), and curl (Sec. 8.11). (Integral theorems involving these concepts follow in Chap. 9 on **vector integral calculus.** The form of these quantities in curvilinear coordinates is given in Appendix A3.4.)

We shall keep this chapter independent[1] of Chaps. 6 and 7.

Prerequisites for this chapter: In Sec. 8.3 we shall make elementary use of second- and third-order determinants.

Sections that may be omitted in a shorter course: 8.6–8.8, 8.12.

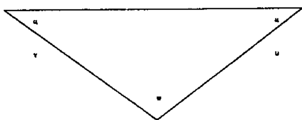
References: Appendix 1, Part B.

Answers to problems: Appendix 2.

[1]Readers familiar with Chap. 6 will notice that our present approach is in harmony with that in Chap. 6. The restriction to two and three dimensions will provide for a richer theory with basic physical, engineering, and geometrical applications.

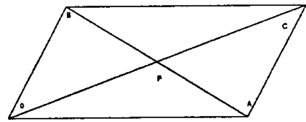
8.1. Vector Algebra in 2-Space and 3-Space

1. $3, 4, 0$, $|\mathbf{v}| = 5$.
2. $-1, 4, 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}$.
3. $1, 2, 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{14}$.
4. $-10, 2, -6$, $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{35}$.
5. $-4, 4, 0$, $|\mathbf{v}| = 4\sqrt{2}$.
6. a, b, c, $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
7. $0, -18, 0$, $|\mathbf{v}| = 18$.
8. $-2, 0, -2$, $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$.
9. $Q: (3, 3, 0)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$.
10. $Q: (0, 0, 1)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$.
11. $Q: (0, 0, 0)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{74}$.
12. $Q: (3, -1, -2)$, $|\mathbf{v}| = 0$.
13. $Q: (1.25, 1, -4.5)$, $|\mathbf{v}| = \frac{3}{4}$.
14. $Q: (3, -1, 6)$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{46}$.
15. $\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{c}+\mathbf{a} = [7, -1, 0]$.
16. $-\mathbf{a} = [-3, 2, -1]$, $3\mathbf{a} = [9, -6, 3]$, $-\frac{1}{2}\mathbf{a} = [-1.5, 1, -0.5]$.
17. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = [3, 1, 1]+\mathbf{c} = [7, 2, 0]$, $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}+[4, 4, -1] = [7, 2, 0]$.
18. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |[3, 1, 1]| = \sqrt{11}$, $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| = \sqrt{14}+3$.
19. $4\mathbf{a}+8\mathbf{c} = [12, -8, 4]+[32, 8, -8] = [44, 0, -4]$, $4(\mathbf{a}+2\mathbf{c}) = 4[11, 0, -1] = [44, 0, -4]$.
20. $(1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a} = [3/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}]$, $(1/|\mathbf{b}|)\mathbf{b} = [0, 1, 0]$.
21. $6\mathbf{a}-12\mathbf{b} = [18, -12, 6]-[0, 36, 0] = [18, -48, 6]$, $3(2\mathbf{a}-4\mathbf{b}) = 3[6, -16, 2] = [18, -48, 6]$.
22. $5\mathbf{a}-4\mathbf{b}+3\mathbf{c} = [27, -19, 2]$
23. 문제 15: (4) (a) (교환 법칙).
    문제 17: (4) (b) (결합 법칙).
    문제 19: (6) (a) (분배 법칙).
24. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v} = [8, -3, 8]$, $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}| = \sqrt{137}$.
25. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u} = [0, 0, 0]$, $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}| = 0$.
26. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u} = [0, -10, 0]$, $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}| = 10$.
27. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u} = [-6, -10, -14]$, $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}| = 2\sqrt{83}$.
28. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u} = [12, 0, 16]$, $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}| = 20$.
29. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = -\mathbf{q}-\mathbf{u} = [-1, -6, 0]$.
30. $2 \le |\mathbf{p}+\mathbf{q}| \le 10$, $12 \le |4\mathbf{p}-3\mathbf{q}| \le 36$, 방향은 전혀 알 수 없다. derive!
31. $\mathbf{w} = \mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v} = [5, -1, p_3+17]$가 xy 평면에 평행하려면 z 성분이 없어야 한다. 즉 $p_3+17 = 0$가 되어 $p_3 = -17$이다.
    답. $\mathbf{p} = [0, 0, -17]$.
32. $\mathbf{p} = [p_1, 0, 0]$, $\mathbf{q} = [0, q_2, 0]$, $\mathbf{u} = [0, 0, u_3]$이라 하자. 그러면 $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} = [p_1+3, q_2+9, u_3-3]$이고, 평형 조건으로부터 $p_1+3 = 0$, $q_2+9 = 0$, $u_3-3 = 0$를 얻는다. 따라서 $p_1 = -3$, $q_2 = -9$, $u_3 = 3$이다.
    답. $\mathbf{p} = [-3, 0, 0]$, $\mathbf{q} = [0, -9, 0]$, $\mathbf{u} = [0, 0, 3]$.
33.



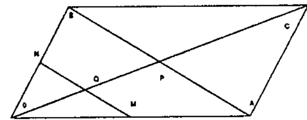
$\mathbf{w} = [0, -w]$,
$\mathbf{u} = [f\cos\alpha, f\sin\alpha]$, $\mathbf{v} = [-f\cos\alpha, f\sin\alpha]$,
$\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{0}$, $2f\sin\alpha = w$, $f = \frac{w}{2}\csc\alpha$.

34. (a)



$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ 이면, $\overrightarrow{OP}$ 는 $\overrightarrow{OC}$ 에 평행하므로 $\overrightarrow{OP} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 이다. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ 인 데, 역시 $\overrightarrow{AP}$ 는 $\overrightarrow{AB}$ 에 평행하고 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ 이므로, $\overrightarrow{AP} = \mu(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{OP} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\mu(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 이고 $\lambda = 1-\mu$ 와 $\lambda = \mu$ 이므로, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 이다. 즉, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 이다. 그러므로 두 대각선은 서로 이등분한다.

(b)



$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$ 이고, $\overrightarrow{OQ}$ 는 $\overrightarrow{OC}$ 에 평행하므로 $\overrightarrow{OQ} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 이다. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MQ}$ 인 데, 역시 $\overrightarrow{MQ}$ 는 $\overrightarrow{MN}$ 에 평행하고 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 이므로, $\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{OQ} = \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{\mu}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ 이고 $\lambda = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu$ 와 $\lambda = \frac{1}{2}\mu$ 이므로, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{2}$ 이다. 즉, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ 이다. 즉 각 변의 중점을 잇는 선중에는 대각선을 3:1 로 내분하는 것이 있다.

(c) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ 이므로, (a) 를 평행 사변형 □$OMPN$ 적용하면 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ 가 된다. 즉 각 변의 중점을 잇는 선중에는 대각선을 3:1 로 내분하는 것이 있다.

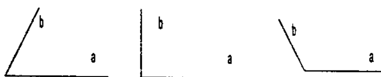
(d) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d} = \mathbf{0}$ 이므로 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = -(\mathbf{c}+\mathbf{d})$ 이다. $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\mathbf{c}+\frac{1}{2}\mathbf{d}$ 이고, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{c}-\frac{1}{2}\mathbf{d}$ 이므로 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. 마찬가지로 하면 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ 를 얻게 되어 사각형 □$ABCD$는 평행 사변형이다.

(e) 무게 중심에서 각 꼭지점으로 나가는 벡터를 차례대로 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 라 두자. 인접한 두 벡터 사이의 각은 $2\pi/n$ 이고, 각 꼭지점의 내각은 $\pi-2\pi/n$ 이다. 이제 $\mathbf{v}_1$ 의 끝점에 $\mathbf{v}_2$ 을 옮기자. 그러면 두 변이 이루는 각이 $\pi-2\pi/n$ 이 된다. 이런 식으로 차례로 움직이면 n 다각형이 만들어지는데 원래 정 n 각형과 닮은 꼴이다. 따라서 $\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 을 얻는다.

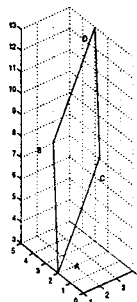
(f) 평행 육면체의 밑면의 꼭지점을 A, B, C, D 라 하고 이에 대응되는 윗면의 꼭지점을 E, F, G, H 라 하자. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{c}$ 라면, 공간 대각선은 $\overrightarrow{AG} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BH} = \mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{EC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\overrightarrow{DF} = \mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b}$ 이다. 따라서 각 공간 대각선의 중점을 M_1, $\ldots$, M_4 라 하면 그 위치 벡터는 각각 $\overrightarrow{AM}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\overrightarrow{AM}_2 = \overrightarrow{BM}_2 - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})$, $\overrightarrow{AM}_3 = \overrightarrow{EM}_3 - \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AE} = \mathbf{c}+\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c})$, $\overrightarrow{AM}_4 = \overrightarrow{DM}_4 - \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}+\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c}-\mathbf{b})$ 이므로 모두 같은 점이다. 즉 평행 육면체의 공간 대각선은 한점에서 만난다.

8.2. Inner Product (Dot Product)

1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = -8$.
2. $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$, $|2\mathbf{a}| = |[2,6,4]| = 2\sqrt{14}$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{21}$.
3. $|4\mathbf{a}| = |[4,12,8]| = 4\sqrt{14}$, $4|\mathbf{a}| = 4\sqrt{14}$,
   $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |[-1,3,7]| = \sqrt{59}$.
4. $\mathbf{a}\cdot(2\mathbf{b}+3\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot[16,-6,-7] = -16$,
   $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 3\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 2\cdot(-8) + 3\cdot 0 = -16$.
5. $2\mathbf{b}\cdot 5\mathbf{c} = [4,0,-10]\cdot[20,-10,5] = 30$,
   $10\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 10\cdot 3 = 30$.
6. $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = [-1,3,7]\cdot\mathbf{b} = -37$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = -37$.
7. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot[1,-3,-7] = -22$,
   $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot[-1,3,7] = 22$.
8. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |[3,3,-3]| = 3\sqrt{3}$, $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = \sqrt{14} + \sqrt{29}$.
9. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot[6,-2,-4] = -8$,
   $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = -8\mathbf{c} = [-32,16,-8]$.
10. $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ 가 $\mathbf{u}$ 에 수직이다. 따라서 일반적으로 $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ 가 성립하지 않는다.
11. 문제 1: 교환 법칙.
    문제 4: 분배 법칙.
    문제 5: 실수배에 대한 결합, 교환 법칙
    문제 6: 분배 법칙.
12.



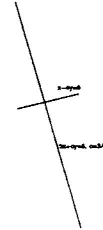
13. $\mathbf{d} = [2,4,0]$, $W = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} = 28$.
14. $\mathbf{d} = [6,-9,0]$, $W = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} = 0$.
15. $\mathbf{d} = [2,-2,0]$, $W = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} = 0$.
16. $\mathbf{d} = [-2,-8,-6]$, $W = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} = -82$.
17. 작용하는 힘과 움직이는 거리가 수직이면 행해진 일은 0 이고, 두 벡터가 이루는 각이 90° 보다 크면 음수의 일이 된다.
18. $W = (\mathbf{p}+\mathbf{q})\cdot\mathbf{d} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{d}$ 이므로 합력 (resultant) 이 한 일은 각각이 한 일의 합과 같다.
19. $\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{14}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.
    답. $\gamma = 19.1066°$.
20. $\mathbf{b}-\mathbf{a} = [2,1,1]$, $\mathbf{c}-\mathbf{a} = [0,-1,2]$,
    $$\cos\gamma = \frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{|\mathbf{b}-\mathbf{a}||\mathbf{c}-\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$
    답. $\gamma = 79.4803°$.
21. $\mathbf{b}+\mathbf{c} = [4,2,3]$,
    $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}+\mathbf{c}|} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}}.$$
    답. $\gamma = 38.0160°$.
22. $\mathbf{a}+\mathbf{b} = [4,3,1]$,
    $$\cos\gamma = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{6}{\sqrt{26}\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{130}}.$$
    답. $\gamma = 58.2486°$.
23. 직선 $x-y=1$의 법벡터 $\mathbf{a} = [1,-1]$, 직선 $x-2y = -1$의 법벡터 $\mathbf{b} = [1,-2]$,
    두 직선 사이의 각 γ,
    $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$
    답. $\gamma = 18.4349°$.
24. 직선 $3x+5y=0$의 법벡터 $\mathbf{a} = [3,5]$, 직선 $4x-2y = 1$의 법벡터 $\mathbf{b} = [4,-2]$,
    두 직선 사이의 각 γ,
    $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{34}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{170}}.$$
    답. $\gamma = 85.6013°$.
25. 평면 $x+y+z=1$ 의 법벡터 $\mathbf{a} = [1,1,1]$,
    평면 $x+2y+3z=6$ 의 법벡터 $\mathbf{b} = [1,2,3]$,
    두 평면 사이의 각 γ,
    $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$$
    답. $\gamma = 22.2077°$.
26. 평면 $x-y=0$ 의 법벡터 $\mathbf{a} = [1,-1,0]$,
    평면 $x-z=1$ 의 법벡터 $\mathbf{b} = [1,0,-1]$,
    두 평면 사이의 각 γ,
    $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$
    답. $\gamma = 60°$.
27. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} = [-3,0,3]$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b} = [-1,-2,-4]$,
    $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = [4,2,1]$,
    $$\cos\angle A = -\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{21}} = \frac{4}{7},$$
    $$\cos\angle B = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} = \frac{9}{3\sqrt{2}\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{42}},$$
    $$\cos\angle C = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{9}{3\sqrt{2}\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{42}}.$$
    답. $\angle A = 55.150°$, $\angle B = 62.425°$, $\angle C = 62.425°$.
28. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} = [-3,5,0]$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b} = [-1,-7,0]$,
    $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = [4,2,0]$,
    $$\cos\angle A = -\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{18}{5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{5\sqrt{10}},$$
    $$\cos\angle B = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{a}||\mathbf{c}|} = \frac{2}{\sqrt{34}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{170}},$$
    $$\cos\angle C = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{32}{\sqrt{34}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{16}{5\sqrt{17}}.$$
    답. $\angle A = 55.3048°$, $\angle B = 85.6013°$,
    $\angle C = 39.0939°$.
29. $A(1,2,3)$, $B(3,5,7)$, $C(2,0,9)$, $D(4,3,13)$,



$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = [2,3,4]$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} = [1,-2,6]$,
$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} = [-2,-3,-4]$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{d} = [-1,2,-6]$,
$$\cos\angle A = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{a}||\mathbf{d}|} = \frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = \frac{20}{\sqrt{1189}},$$
$$\cos\angle B = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = -\frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = -\frac{20}{\sqrt{1189}},$$
$$\cos\angle C = -\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{c}||\mathbf{d}|} = -\frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = -\frac{20}{\sqrt{1189}},$$
$$\cos\angle D = -\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{41}} = \frac{20}{\sqrt{1189}}.$$

답. $\angle A = 54.5484°$, $\angle B = 125.4516°$,
$\angle C = 125.4516°$, $\angle D = 54.5484°$.

30. $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{3}{\sqrt{35}}$, $p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = 3$.
31. $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$, $p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
32. $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{2}{\sqrt{4.34}\sqrt{11}}$, $p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$.
33. $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = -\dfrac{14}{\sqrt{14}\cdot 4\sqrt{5}}$,
$p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = -\dfrac{14}{4\sqrt{5}}$.
34. $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{0}{\sqrt{74}\sqrt{33}} = 0$, $p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = 0$.
35. $\cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{4.6}{\sqrt{77}}$, $p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = 4.6$.
36. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
$\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$,
따라서 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ 이다.
37. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$,
$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$,
따라서 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + \mathbf{b}|^2)$ 이다.
38. (a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5a_1 - 5 = 0$, $a_1 = 1$.
(b) 직교 조건에서 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 5a_1 - 2a_2 = 0$, $a_1 = 2k$, $a_2 = 5k$ (k 는 실수) 를 얻는다. 단위 벡터이므로 $|\mathbf{a}|^2 = 29k^2 = 1$ 이 되어 $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ 가 된다. 따라서 $\mathbf{a} = [2,5]/\sqrt{29}$ 이다.
(c) $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$, $\mathbf{a} = [2,1,0]$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2b_1 + b_2 = 0$, 즉, $2b_1 + b_2 = 0$ 을 만족하는 벡터는 $\mathbf{a}$ 에 수직이다; 두 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 조건을 만족하면, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ 는 모든 $j = 1,2,3$ 에 대해 $u_j = \alpha v_j + \beta w_j$ 이므로, $2u_1 + u_2 = 2(\alpha v_1 + \beta w_1) + (\alpha v_2 + \beta w_2) = \alpha(2v_1 + v_2) + \beta(2w_1 + w_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$ 가 되어 조건을 만족한다. 따라서 벡터 공간이다.
(d) 직선 $x - 4y = 3$ 의 법벡터 : $\mathbf{a} = [1, -4]$,
직선 $3x + cy = 8$ 의 법벡터 : $\mathbf{b} = [3, c]$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3 - 4c = 0$, $c = \frac{3}{4}$.

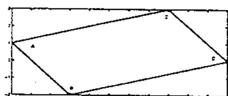


(e) 평면 $x + 2y + 3z = 6$ 의 법벡터 : $\mathbf{a} = [1,2,3]$,
평면 $x + cy + z = 0$ 의 법벡터 : $\mathbf{b} = [1, c, 1]$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2c + 4 = 0$, $c = -2$.
(f) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$, 두 벡터는 서로 수직,
$|\mathbf{b}| = 25q_1^2 = 1$, $q_1 = \frac{1}{5}$,
$|\mathbf{c}| = 25q_2^2 = 1$, $q_2 = \frac{1}{5}$,
$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 0$,
$(4a_1 - 3a_2)/5 = 0$, $(3a_1 + 4a_2)/5 = 0$,
$a_1 = a_2 = 0$, $\mathbf{a} = [0,0,1]$,
$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$: 정규 (normal) 직교 기저.
(g) 직사각형의 한 꼭지점을 공유하는 두 변을 나타내는 벡터를 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 라 하면 두 대각선은 각각 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 로 표현된다. 이 두 대각선이 수직이므로 $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ 이 된다. 즉 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ 를 얻게 되어 원래의 사각형이 정사각형임을 뜻한다.
(h) 전기장 내에서 하전 입자가 움직일 때 이 입자가 받는 힘을 분해할 경우. 한 벡터가 어떤 공간에 속하는 지를 확인할 경우.

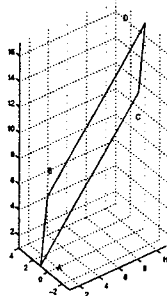
8.3. Vector Product (Cross Product)

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [0,0,8]$, $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = [0,0,-8]$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 1$.
2. $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = [8,12,-13]$, $\mathbf{c}\times\mathbf{b} = [-8,-12,13]$,
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = 0$.
3. $\mathbf{a}\times\mathbf{c} = [8,-4,-1]$, $|\mathbf{a}\times\mathbf{c}| = 9$,
$|\mathbf{c}\times\mathbf{a}| = |[-8,4,1]| = 9$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = 8$.
4. $\mathbf{b}\times\mathbf{d} - \mathbf{d}\times\mathbf{b} = [4,6,9] - [-4,-6,-9] = [8,12,18]$.
5. $3\mathbf{a}\times 5\mathbf{b} = 5\mathbf{a}\times 3\mathbf{b} = 15\mathbf{a}\times\mathbf{b} = [0,0,120]$.
6. $\mathbf{b}\times\mathbf{b} = [0,0,0]$, $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = [0,0,0]$,
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 13$.
7. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = [-2,4,0]\times\mathbf{c} = [16,8,-14]$,
$\mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} = [8,-4,-1] + [8,12,-13]$
$= [16,8,-14]$.
8. $(\mathbf{b}-\mathbf{d})\times\mathbf{a} = [-9,9,-2]\times\mathbf{a} = [4,-2,-27]$,
$\mathbf{b}\times\mathbf{a} - \mathbf{d}\times\mathbf{a} = [0,0,-8] - [-4,2,19]$
$= [4,-2,-27]$.
9. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = [0,0,8]\times\mathbf{c} = [-24,16,0]$,
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times[8,12,-13] = [-26,13,-4]$.
10. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{a}) = [0,0,0]$.
11. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} = [2,3,4]$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = 32$.
12. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{b} = [0,0,8]\times\mathbf{b} = [-16,-24,0]$,
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times[0,0,0] = [0,0,0]$.
13. $(\mathbf{i}\ \ \mathbf{j}\ \ \mathbf{k}) = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1$,
$(\mathbf{i}\ \ \mathbf{k}\ \ \mathbf{j}) = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}\cdot(-\mathbf{i}) = -1$.
14. $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} = [8,12,-13]\cdot\mathbf{d} = -62$,
$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{b}\cdot[34,20,-32] = -62$.
15. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [0,0,8]\cdot[34,20,-32] = -256$,
$(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}\times\mathbf{c}) = [0,0,-8]\cdot[-34,-20,32] = -256$.
16. $(\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot[8,12,-13] = 32$,
$(\mathbf{a}-\mathbf{b}\ \ \mathbf{b}-\mathbf{c}\ \ \mathbf{c}) = (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot((\mathbf{b}-\mathbf{c})\times\mathbf{c})$
$= [4,0,0]\cdot([-5,-1,-4]\times\mathbf{c})$
$= [4,0,0]\cdot[8,12,-13] = 32$.
17. $(\mathbf{b}\ \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{d}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) = \mathbf{b}\cdot[4,-2,-19] = -16$,
$(\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{d}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) = \mathbf{a}\cdot[4,6,9] = 16$.
18. $(3\mathbf{a}\ \ 2\mathbf{c}\ \ 4\mathbf{d}) = 3\mathbf{a}\cdot(2\mathbf{c}\times 4\mathbf{d})$
$= [3,6,0]\cdot[272,160,-256] = 1776$,
$24(\mathbf{a}\ \ \mathbf{c}\ \ \mathbf{d}) = 24\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$
$= 24\mathbf{a}\cdot[34,20,-32] = 1776$.
19. 문제 1: 교환 법칙
문제 5: 실수배의 결합, 교환 법칙
문제 7: 결합 법칙
문제 9, 12: 결합 법칙이 성립하지 않는다.
20. $\mathbf{w} = [3,0,0]$, $\mathbf{r} = [2,2,2]$,
$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r} = [3,0,0]\times[2,2,2] = [0,-6,6]$,
$|\mathbf{v}| = 6\sqrt{2}$.

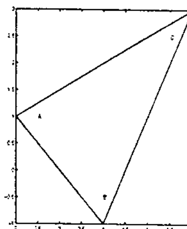
21. $\mathbf{w} = [0,9,0]$, $\mathbf{r} = [3,4,8]$,
$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = [0,9,0] \times [3,4,8] = [72,0,-27]$,
$|\mathbf{v}| = 9\sqrt{73}$.
22. $\mathbf{r} = \overrightarrow{QA} = [-3,4,0]$, $\mathbf{p} = [2,1,0]$,
$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = [0,0,-11]$.
23. $\mathbf{r} = \overrightarrow{QA} = [-2,-2,0]$, $\mathbf{p} = [0,0,10]$,
$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = [-20,20,0]$.
24. $\mathbf{r} = \overrightarrow{QA} = [-3,-1,2]$, $\mathbf{p} = [3,-1,2]$,
$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = [0,12,6]$.
25. $\mathbf{r} = \overrightarrow{QA} = [-4,-7,5]$, $\mathbf{p} = [3,0,-6]$,
$\mathbf{m} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = [42,-9,21]$.
26. $A(1,1)$, $B(4,-2)$, $C(9,3)$, $D(12,0)$,



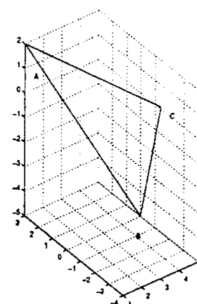
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = [3,-3]$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} = [8,2]$,
$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} = [-3,3]$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{d} = [-8,-2]$,
$$\cos\angle A = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{a}||\mathbf{d}|} = \frac{18}{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}},$$
$$\sin\angle A = \frac{5}{\sqrt{34}},$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{d}|\sin\angle A = 15,$$
$$\cos\angle D = -\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = \frac{18}{3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}},$$
$$\sin\angle D = \frac{5}{\sqrt{34}},$$
$$\triangle DCB = \frac{1}{2}|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\angle D = 15.$$
답. $\square ABCD = 30$.
27. $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$, $C(8,-3,14)$, $D(11,0,17)$,



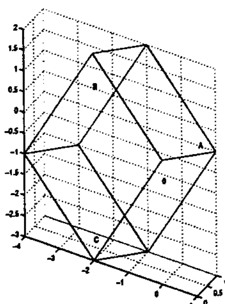
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = [3,3,3]$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} = [7,-4,13]$,
$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} = [-3,-3,-3]$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{d} = [-7,4,-13]$,
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{d}| = \frac{1}{2}|[-51,18,33]| = \frac{3}{2}\sqrt{446},$$
$$\triangle DCB = \frac{1}{2}|\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = \frac{1}{2}|[-51,18,33]| = \frac{3}{2}\sqrt{446}.$$
답. $\square ABCD = 3\sqrt{446}$.
28. $A(2,1)$, $B(4,-1)$, $C(6,3)$,



$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = [2,-2]$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} = [4,2]$,
$$\cos\angle A = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$
$$\sin\angle A = \frac{3}{\sqrt{10}},$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle A = 6.$$
29. $A(1,3,2)$, $B(3,-4,2)$, $C(5,0,-5)$,



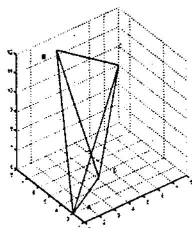
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} = [2,-7,0]$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} = [4,-3,-7]$,
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}|[49,14,22]| = \frac{1}{2}\sqrt{3081}.$$
30. $A(1,3,0)$, $B(2,0,8)$, $C(0,2,2)$,
$\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} = [-2,2,-6]$,
$\overrightarrow{CA} = \mathbf{b} = [1,1,-2]$,
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = [1,-3,8]$,
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{1}{2\sqrt{30}}[13.5,-9,18],$$
$\mathbf{r} = [x,y,z]$,
$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = c$,
$c = \mathbf{n}\cdot[1,3,0] = -\frac{14}{\sqrt{30}}$,
$2x - 10y - 4z = -28$.
31. $A(1,2,\frac{1}{4})$, $B(4,2,-2)$, $C(0,8,4)$,
$\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} = [-4,6,6]$,
$\overrightarrow{CA} = \mathbf{b} = [1,-6,-3.75]$,
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = [3,0,-2.25]$,
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{2}{9\sqrt{29}}[13.5,-9,18],$$
$\mathbf{r} = [x,y,z]$,
$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = c$,
$c = \mathbf{n}\cdot[1,2,\frac{1}{4}] = 0$,
$13.5x - 9y + 18z = 0$.
32. $A(1,1,0)$, $B(-2,0,2)$, $C(-2,0,-3)$,



$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = [1,1,0]$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b} = [-2,0,2]$,
$\overrightarrow{OC} = \mathbf{c} = [-2,0,-3]$,
$V = |(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})| = |\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}| = 10.$

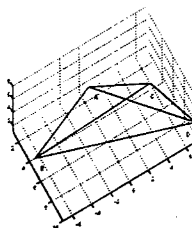
33. $V = |([4,9,-1]\ \ [2,6,0]\ \ [5,-4,2])| = 50.$

34. $A(1,3,6)$, $B(3,7,12)$, $C(8,8,9)$, $D(2,2,8)$,



$\overrightarrow{DA} = \mathbf{a} = [-1,1,-2]$,
$\overrightarrow{DB} = \mathbf{b} = [1,5,4]$,
$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} = [6,6,1]$,
$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})| = 15.$

35. $A(1,1,1)$, $B(5,-7,3)$, $C(7,4,8)$, $D(10,7,4)$,



$\overrightarrow{DA} = \mathbf{a} = [-9,-6,-3]$,
$\overrightarrow{DB} = \mathbf{b} = [-5,-14,-1]$,
$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} = [-3,-3,4]$,
$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})| = 79.$

36. $([4,2,9]\ \ [3,2,1]\ \ [-4,6,9]) = 220 \neq 0$ 이므로 세 벡터는 일차 독립이다.

37. $([3,5,9]\ \ [73,-56,76]\ \ [-4,7,-1]) = 0$ 이므로 세 벡터는 일차 종속이다.

38. (a) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\gamma = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\gamma)$
$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\gamma)$
$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2,$
$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2};$
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ 이면 $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$

(b) 기본 벡터에 대해 구해 보자.
$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j},$
$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) = \mathbf{i}\times(-\mathbf{j}) = -\mathbf{k},$
$\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0},$
$\mathbf{j}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},$
$\mathbf{j}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) = \mathbf{j}\times(-\mathbf{j}) = \mathbf{0},$
$\mathbf{j}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k},$
$\mathbf{k}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0},$
$\mathbf{k}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) = \mathbf{k}\times(-\mathbf{j}) = \mathbf{i},$
$\mathbf{k}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) = \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j},$
$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},$
$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k},$
$\mathbf{d} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k},$
$\mathbf{a} = \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$
$a_1 = b_2(c_1d_2 - c_2d_1) + b_3(c_1d_3 - c_3d_1)$
$= (b_2d_2 + b_3d_3)c_1 - (b_2c_2 + b_3c_3)d_1$
$= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})c_1 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})d_1,$
$a_2 = b_1(-c_1d_2 + c_2d_1) + b_3(c_2d_3 - c_3d_2)$
$= (b_1d_1 + b_3d_3)c_2 - (b_1c_1 + b_3c_3)d_2$
$= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})c_2 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})d_2,$
$a_3 = b_1(-c_1d_3 + c_3d_1) + b_2(-c_2d_3 + c_3d_2)$
$= (b_1d_1 + b_2d_2)c_3 - (b_1c_1 + b_2c_2)d_3$
$= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})c_3 - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})d_3,$
따라서 $\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}.$

(c) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}]\mathbf{c} - [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]\mathbf{d}$
$= (\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})\mathbf{d}.$

(d) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{c}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = ([\mathbf{c}\times\mathbf{d}]\ \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{b})$
$= (\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ [\mathbf{c}\times\mathbf{d}]) = \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]$
$= \mathbf{a}\cdot[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}]$
$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$

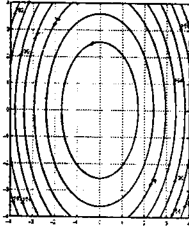
(e) 행렬식의 성질 중에서 행을 서로 바꾸면 그 값에 -1 을 곱해주는 것을 이용하면 당연한 식들이다. (d) 에서도 이미 사용하였다.

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= -(\mathbf{b}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= -(\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{b}),$$
$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}\ \mathbf{a}\ \mathbf{c}) = (\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{a}),$
$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}\ \mathbf{c}\ \mathbf{b}) = (\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{b}).$

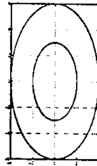
8.4. Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives

1. $f(2,4) = 100$, $f(0.5, -3.25) = 44.5$, $f(\sqrt{17}, 1/\sqrt{6}) = \frac{461}{3}$.

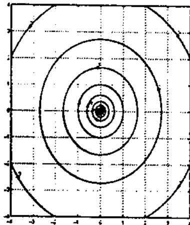
2. 등고선 (isobars) : $9x^2 + 4y^2 = c$, $c = 26, 52, 78, 104, 130, 156, 182$, 타원.



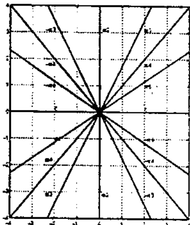
3. 두 타원 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 과 $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ 사이.



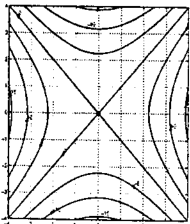
4. 등온선 (isotherms) : $\ln(x^2 + y^2) = c$, $x^2 + y^2 = e^c$, $c = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, 원.



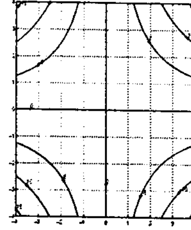
5. 등온선 : $\arctan \frac{y}{x} = c$, $y = x \tan c$, $c = -\pi/3, -\pi/4, -\pi/6, 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$, 직선.



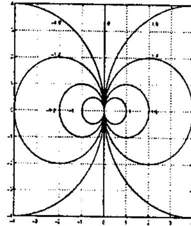
6. 등온선 : $x^2 - y^2 = c$, $c = 0, 5, 10, 15$, 쌍곡선.



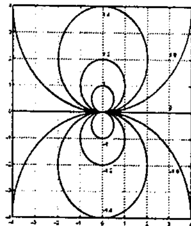
7. 등온선 : $xy = c$, $c = 0, 5, 10, 15$, 쌍곡선.



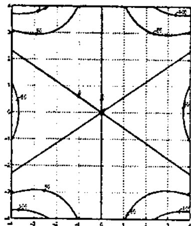
8. 등온선 : $\frac{x}{x^2 + y^2} = c$, $\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2}$, $c = 0, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, 원.



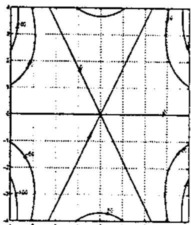
9. 등온선 : $\frac{y}{x^2 + y^2} = c$, $x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$, $c = 0, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, 원.



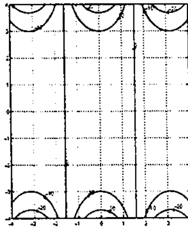
10. (a) $x^3 - 3xy^2 = c$, $c = 0, 50, 100$.



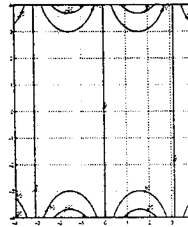
(b) $3x^2y - y^3 = c$, $c = 0, 50, 100$.



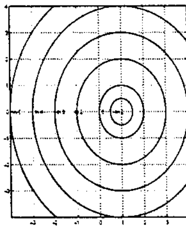
(c) $\cos x \cosh y = c$, $c = 0, \pm 10, \pm 20$.



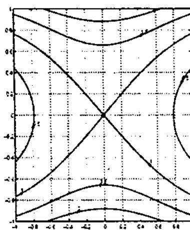
(d) $\sin x \cosh y = c$, $c = 0, \pm 10, \pm 20$.



(e) $\ln[(x-1)^2 + y^2] = c$, $(x-1)^2 + y^2 = e^c$, $c = -\ln 2, 0, \ln 2, \ln 3, \ln 4, \ln 5$.



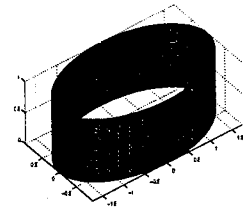
(f) $\cos^2 x + \sinh^2 y = c$, $c = 0.5, 1, 1.5, 2$.



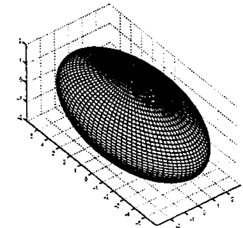
11. $4x + 3y - z = c$, $c = 0$, 평면.



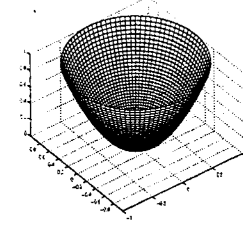
12. $x^2 + 3y^2 = c$, $c = 3$, 타원 기둥.



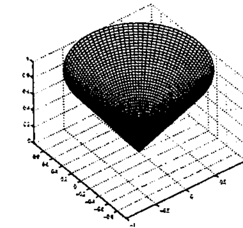
13. $4x^2 + y^2 + 9z^2 = c$, $c = 36$, ellipsoid.



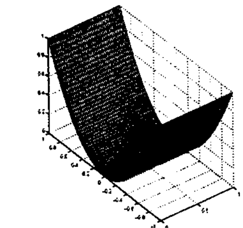
14. $x^2 + y^2 - z = c$, $c = 0$, 회전 포물면.



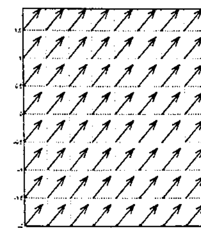
15. $z - \sqrt{x^2 + y^2} = c$, $c = 0$, 원뿔.



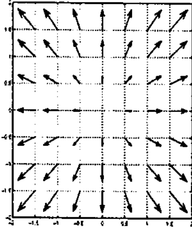
16. $y^2 - z = c$, $c = 0$, yz 방향 단면이 포물선인 기둥.



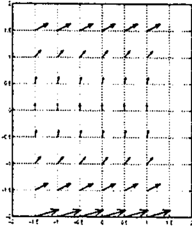
17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, 모든 점에서 같은 벡터.



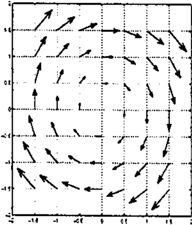
18. $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, 위치 벡터와 같은 벡터.



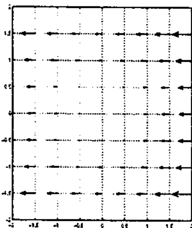
19. $\mathbf{v} = y^2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.



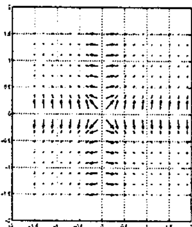
20. $\mathbf{v} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$, 위치 벡터와 수직인 벡터.



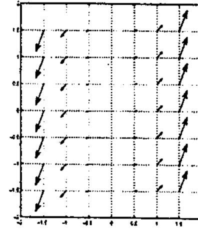
21. $\mathbf{v} = -(x^2 + y^2)\mathbf{i}$.



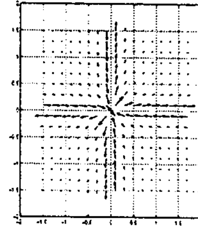
22. $\mathbf{v} = \frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j}$.



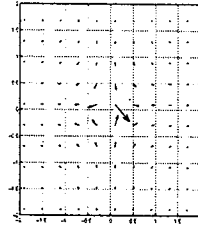
23. (a) $\mathbf{v} = [x, x^3]$.



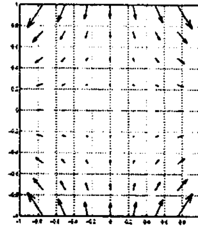
(b) $\mathbf{v} = [\frac{1}{y}, \frac{1}{x}]$.



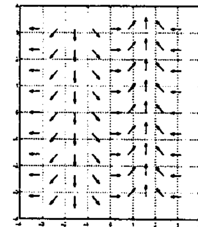
(c) $\mathbf{v} = (x^2 + y^2)^{-1}[x, -y]$.



(d) $\mathbf{v} = e^{x^2+y^2}[x, -y]$.



(e) $\mathbf{v} = [\cos x, \sin x]$.



24. 함수 곱의 미분에서 얻어지는 식들이다;
$\mathbf{u} = [t, 0, t^2]$, $\mathbf{v} = [0, t, 0]$, $\mathbf{w} = [-1, 0, t]$,
$\mathbf{u}' = [1, 0, 2t]$, $\mathbf{v}' = [0, 1, 0]$, $\mathbf{w}' = [0, 0, 1]$,
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' = 0$, $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = 0$,
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [-t^3, 0, t^2]$, $\mathbf{u}' \times \mathbf{v} = [-2t^2, 0, t]$,
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}' = [-t^2, 0, t]$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = [-3t^2, 0, 2t]$,
$(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}) = 2t^3$, $(\mathbf{u}'\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}) = 3t^2$,
$(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}'\ \ \mathbf{w}) = 2t^2$, $(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}') = t^2$,
$(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})' = 6t^2$.

25. $\mathbf{u} = [y^2, z^2, x^2]$, $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = [0, 0, 2x]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = [2y, 0, 0]$, $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = [0, 2z, 0]$.

26. $\mathbf{u} = [\cos xyz, \cos xyz]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = [-yz \sin xyz, -yz \sin xyz]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = [-xz \sin xyz, -xz \sin xyz]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = [-xy \sin xyz, -xy \sin xyz]$.

27. $\mathbf{u} = [xy, yz, zx]$, $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = [y, 0, z]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = [x, z, 0]$, $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = [0, y, x]$.

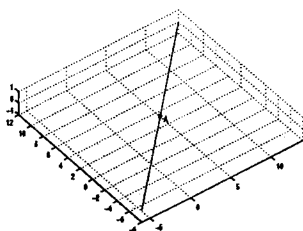
28. $\mathbf{u} = [e^x \cos y, e^x \sin y, 0]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = [e^x \cos y, e^x \sin y, 0]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = [-e^x \sin y, e^x \cos y, 0]$.

29. $\mathbf{u} = [\cos x \cosh y, -\sin x \sinh y]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = [-\sin x \cosh y, -\cos x \sinh y]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = [\cos x \sinh y, -\sin x \cosh y]$.

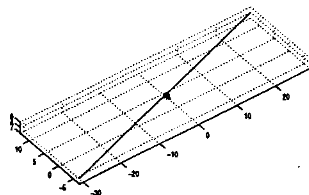
30. $\mathbf{u} = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \arctan \frac{y}{x}, 0\right]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left[\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}, 0\right]$,
$\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \left[\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, 0\right]$.

8.5. Curves. Tangents. Arc Length

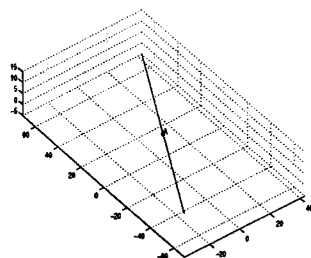
1. $A: (4, 2, 0)$, $\mathbf{a} = (4, 2, 0)$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} = [1, 1, 0]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = [4 + t, 2 + t, 0]$.



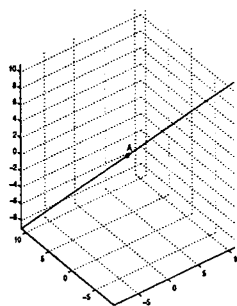
2. $A: (-1, 3, 8)$, $\mathbf{a} = (-1, 3, 8)$, $\mathbf{b} = [3, 1, 0]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = [-1 + 3t, 3 + t, 8]$.



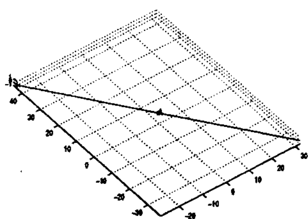
3. $A: (3, 1, 5)$, $\mathbf{a} = (3, 1, 5)$, $\mathbf{b} = [4, 7, -1]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = [3 + 4t, 1 + 7t, 5 - t]$.



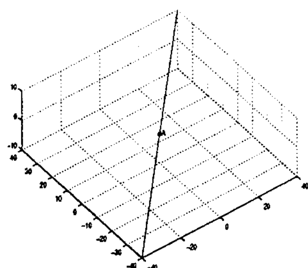
4. $A: (1, 1, 1)$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = [-1, 1, -1]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = [1 - t, 1 + t, 1 - t]$.



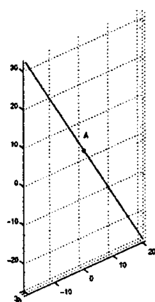
5. $A: (2, 3, 0)$, $\mathbf{a} = (2, 3, 0)$,
$B: (5, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (5, -1, 0)$,
$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [3, -4, 0]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{c} = [2 + 3t, 3 - 4t, 0]$.



6. $A : (0,0,0)$, $\mathbf{a} = (0,0,0)$,
$B : (4,4,1)$, $\mathbf{b} = (4,4,1)$,
$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [4,4,1]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{c} = [4t, 4t, t]$.

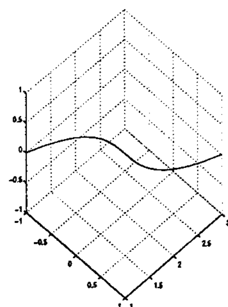


7. $A : (1,2,3)$, $\mathbf{a} = (1,2,3)$,
$B : (3,2,0)$, $\mathbf{b} = (3,2,0)$,
$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [2,0,-3]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{c} = [1+2t, 2, 3-3t]$.

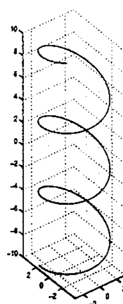


8. $A : (a,b,c)$, $\mathbf{a} = (a,b,c)$,
$B : (a+4, 2-b, c-1)$, $\mathbf{b} = (a+4, 2-b, c-1)$,
$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = [4, 2-2b, -1]$,
$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{c} = [a+4t, b+(2-2b)t, c-t]$.

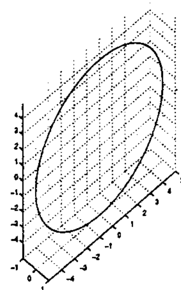
9. $\mathbf{r}(t) = [t, t^3+2, 0]$, $x = t, y = t^3+2, z = 0$, $y = x^3+2, z = 0$, xy 평면에 있는 삼차 곡선.



10. $\mathbf{r}(t) = [3\cos t, 4\sin t, t]$,
$x = 3\cos t, y = 4\sin t, z = t$,
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1, z = \arctan\frac{3y}{4x}$,
타원 기둥 표면에 있는 나선.

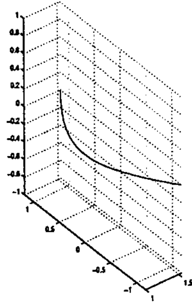


11. $\mathbf{r}(t) = [0, 5\cos t, 5\sin t]$,
$x = 0, y = 5\cos t, z = 5\sin t$,
$x = 0, y^2 + z^2 = 5^2$,
yz 평면에 있는 반지름 5인 원.

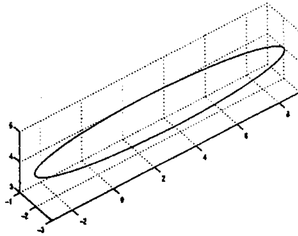


12. $\mathbf{r}(t) = [a + 2\cos 2t, b - 2\sin 2t, 0]$,
$x = a + 2\cos 2t, y = b - 2\sin 2t, z = 0$,
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2^2, z = 0$,
xy 평면에 있는 중심 $(a,b,0)$, 반지름 2인 원.

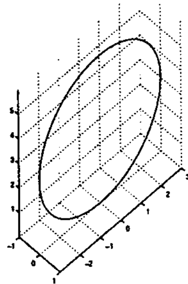
13. $\mathbf{r}(t) = [\cosh t, \sinh t, 0]$,
$x = \cosh t, y = \sinh t, z = 0$,
$x^2 - y^2 = 1, z = 0$,
xy 평면에 있는 쌍곡선.



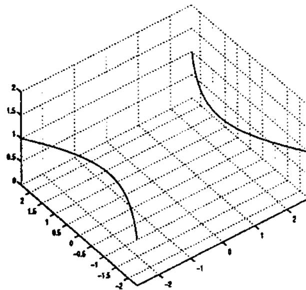
14. $\mathbf{r}(t) = [3 + 6\cos t, -2 + \sin t, 4]$,
$x = 3 + 6\cos t, y = -2 + \sin t, z = 4$,
$\frac{(x-3)^2}{6^2} + (y+2)^2 = 1, z = 4$,
평면 $z = 4$ 에 있는 타원.



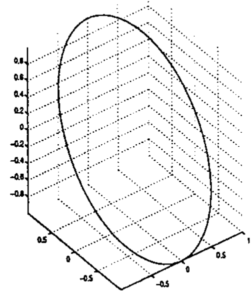
15. 반시계 방향; $t = -\tilde{t}$ 로 치환하면 시계 방향이 된다.
16. $t = e^{\tilde{t}} > 0$ 이므로 $x > 0$ 인 부분만 나타난다.
17. $\mathbf{r}(t) = [0, 3\cos t, 3 + 3\sin t]$, 원.



18. $\mathbf{r}(t) = [\pm\sqrt{3}\cosh t, 2\sinh t, 1]$, 쌍곡선.



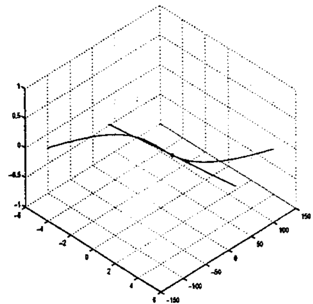
19. $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, \sin t]$, 타원.



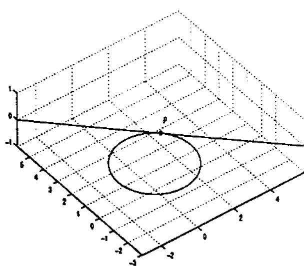
20. $\mathbf{r}(t) = [3\cos t, 3\sin t, 5t]$, 나선.



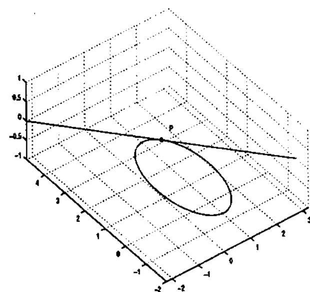
21. (a) $\mathbf{r}(t) = [t, t^3, 0]$, $\mathbf{r}'(t) = [1, 3t^2, 0]$,
$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}[1, 3t^2, 0]$,
(b) $t = 1$, $\mathbf{r}(1) = [1, 1, 0] = P$,
$\mathbf{r}'(1) = [1, 3, 0]$, $\mathbf{u}(1) = \frac{1}{\sqrt{10}}[1, 3, 0]$,
(c) $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(1) + w\mathbf{r}'(1) = [1 + w, 1 + 3w, 0]$.



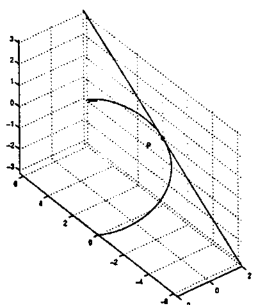
22. (a) $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 0]$,
$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t, 2\cos t, 0]$,
$\mathbf{u}(t) = [-\sin t, \cos t, 0]$,
(b) $t = \frac{\pi}{4}$, $\mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0] = P$,
$\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4}) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0]$, $\mathbf{u}(\frac{\pi}{4}) = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$,
(c) $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) + w\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})$
$= [\sqrt{2} - w\sqrt{2}, \sqrt{2} + w\sqrt{2}, 0]$.



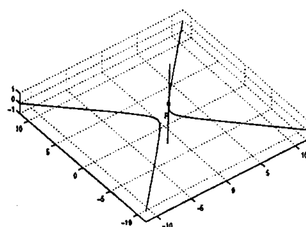
23. (a) $\mathbf{r}(t) = [\cos t, 2\sin t, 0]$,
$\mathbf{r}'(t) = [-\sin t, 2\cos t, 0]$,
$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}}[-\sin t, 2\cos t, 0]$,
(b) $t = \frac{\pi}{3}$, $\mathbf{r}(\frac{\pi}{3}) = [\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0] = P$,
$\mathbf{r}'(\frac{\pi}{3}) = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 0]$, $\mathbf{u}(\frac{\pi}{3}) = [-\frac{3}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, 0]$,
(c) $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(\frac{\pi}{3}) + w\mathbf{r}'(\frac{\pi}{3}) = [\frac{1}{2} - w\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} + w, 0]$.



24. (a) $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, t]$,
$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t, 2\cos t, 1]$,
$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}[-2\sin t, 2\cos t, 1]$,
(b) $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = [2, 0, 0] = P$,
$\mathbf{r}'(0) = [0, 2, 1]$, $\mathbf{u}(0) = [0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]$,
(c) $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(0) + w\mathbf{r}'(0) = [2, 2w, w]$.



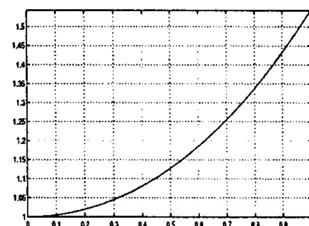
25. (a) $\mathbf{r}(t) = [\cosh t, \sinh t, 0]$,
$\mathbf{r}'(t) = [\sinh t, \cosh t, 0]$,
$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{\cosh 2t}[\sinh t, \cosh t, 0]$,
(b) $t = \ln 3$, $\mathbf{r}(\ln 3) = [\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0] = P$,
$\mathbf{r}'(\ln 3) = [\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 0]$, $\mathbf{u}(\ln 3) = [\frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{5}{\sqrt{41}}, 0]$,
(c) $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(\ln 3) + w\mathbf{r}'(\ln 3) = [\frac{5}{3} + \frac{4}{3}w, \frac{4}{3} + \frac{5}{3}w, 0]$.



26. (a) $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3]$, $\mathbf{r}'(t) = [1, 2t, 3t^2]$,
$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{1+4t^2+9t^4}[1, 2t, 3t^2]$,
(b) $t = 1$, $\mathbf{r}(1) = [1, 1, 1] = P$,
$\mathbf{r}'(1) = [1, 2, 3]$, $\mathbf{u}(1) = [\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}]$,
(c) $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r}(1) + w\mathbf{r}'(1) = [1 + w, 1 + 2w, 1 + 3w]$.



27. $\mathbf{r}(t) = [t, \cosh t]$, $\mathbf{r}'(t) = [1, \sinh t]$,
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$,
$l = \int_0^1 \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}\, dt = \int_0^1 \cosh t\, dt = \sinh 1$.



28. $\mathbf{r}(t) = [a\cos t, a\sin t, ct]$,
$\mathbf{r}'(t) = [-a\sin t, a\cos t, c]$,
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = a^2 + c^2$,
$\mathbf{r}(0) = [a, 0, 0], \mathbf{r}(2\pi) = [0, 0, 2\pi c]$,
$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2}\, dt$
$= 2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$.

29. $\mathbf{r}(t) = [t, t^{\frac{3}{2}}, 0]$, $\mathbf{r}'(t) = [1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}, 0]$,
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 + \frac{9}{4}t$, $\mathbf{r}(0) = [0, 0, 0], \mathbf{r}(4) = [4, 8, 0]$,
$l = \int_0^4 \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}\, dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\, dt$
$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

30. $\mathbf{r}(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t]$,
$\mathbf{r}'(t) = [3a\sin t\cos^2 t, 3a\cos t\sin^2 t]$,
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t = \frac{9}{4}a^2\sin^2 2t$,
$l = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}\,dt = 4\int_0^{\pi/2}\frac{3}{2}|a|\sin 2t\,dt = 6a.$

31. $\mathbf{r}(t) = [t, f(t)]$, $\mathbf{r}'(t) = [1, f'(t)]$,
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = 1 + f'^2$,
$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}\,dt = \int_a^b \sqrt{1+f'^2}\,dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

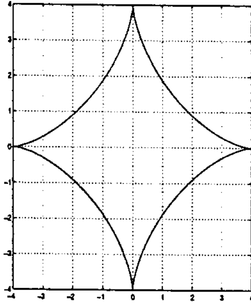
32. $\mathbf{r}(t) = [\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t]$,
$\mathbf{r}'(t) = [\rho'(t)\cos t - \rho(t)\sin t, \rho'(t)\sin t + \rho(t)\cos t]$,
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = \rho^2 + \rho'^2$,
$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,dt$$
$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta;$$
$$s = \int_\alpha^\theta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta,$$
$ds = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$,
$ds^2 = (\rho^2+\rho'^2)d\theta^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho'^2 d\theta^2$
$= \rho^2 d\theta^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2 d\theta^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$;
$\rho' = a\sin\theta$,
$\rho^2 + \rho'^2 = 2a^2(1-\cos\theta) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$,
$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\,d\theta = 8a.$$

33. $r = a\theta$, $a = 1$, $0 \le \theta \le 4\pi$.

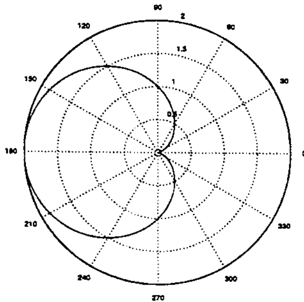
$r = a/\theta$, $a = 1$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 4\pi$.

$r = ae^{b\theta}$, $a = 1$, $b = 1$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

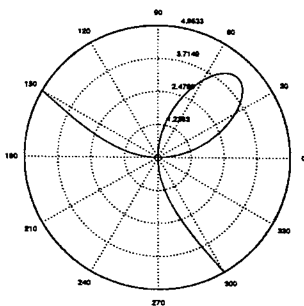
$x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.



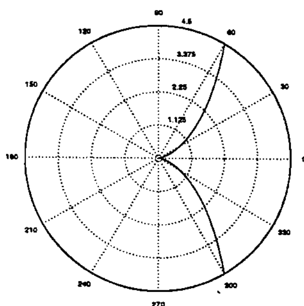
$r = a(1 - \cos\theta)$, $a = 1$.



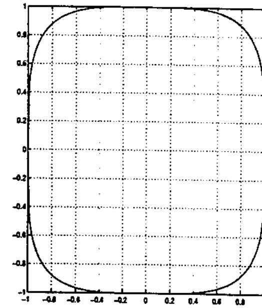
$r = \dfrac{3a\sin 2\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$, $a = 1$, $-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$.



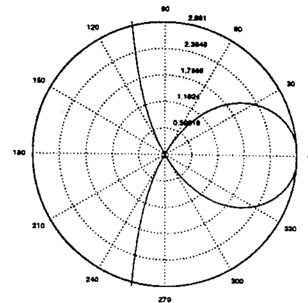
$r = \dfrac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$, $a = 1$, $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{4\pi}{3}$.



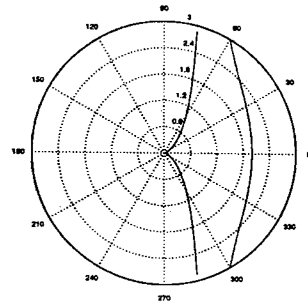
$x^4 + y^4 = 1$.



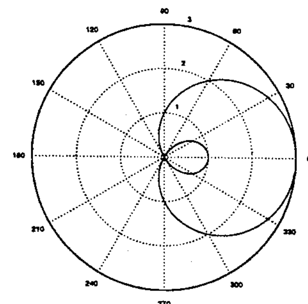
$r = 2a\dfrac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$, $a = 1$, $-175^\circ \le \theta \le -95^\circ$, $-85^\circ \le \theta \le -5^\circ$, $5^\circ \le \theta \le 85^\circ$, $95^\circ \le \theta \le 175^\circ$.



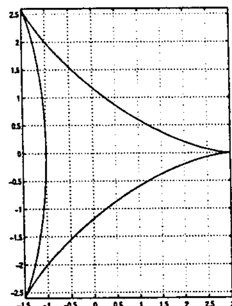
$r = \dfrac{a}{\cos\theta} + b$, $a = 1$, $b = 1$, $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{12} \le \theta \le \frac{17\pi}{12}$.



$r = 2a\cos\theta + b$, $a = 1$, $b = 1$.

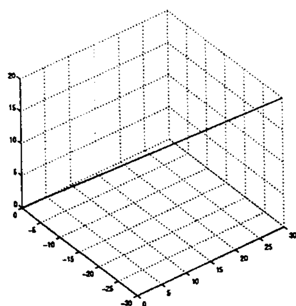


$x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$.

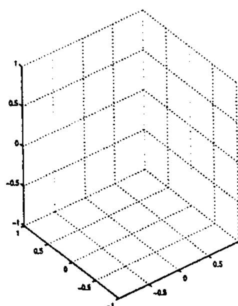


8.6. Curves in Mechanics, Velocity and Acceleration

1. $\mathbf{r}(t) = [3t, -3t, 2t]$,
   $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [3, -3, 2]$,
   $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [0, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = [0, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t) = [0, 0, 0]$.



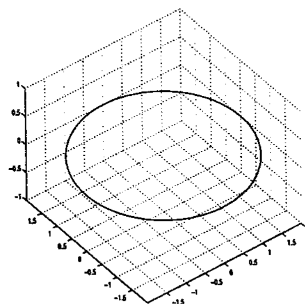
2. $\mathbf{r}(t) = [\sin t, 0, 0]$,
   $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [\cos t, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-\sin t, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = [-\sin t, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t) = [0, 0, 0]$.



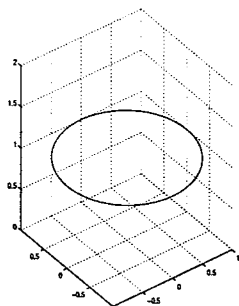
3. $\mathbf{r}(t) = [0, 0, 5t^2]$,
   $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [0, 0, 10t]$,
   $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [0, 0, 10]$,
   $\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = [0, 0, 10]$,
   $\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t) = [0, 0, 0]$.



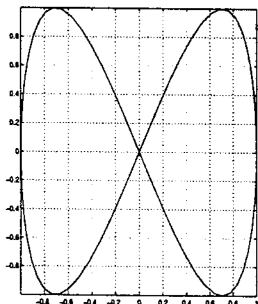
4. $\mathbf{r}(t) = [2\cos 2t, -2\sin 2t, 0]$,
   $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-4\sin 2t, -4\cos 2t, 0]$,
   $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-8\cos 2t, 8\sin 2t, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = [0, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t) = [-8\cos 2t, 8\sin 2t, 0]$.



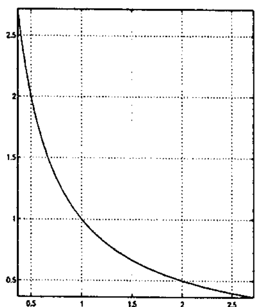
5. $\mathbf{r}(t) = [b\cos t, b\sin t, c]$,
   $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-b\sin t, b\cos t, 0]$,
   $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-b\cos t, -b\sin t, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = [0, 0, 0]$,
   $\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t) = [-b\cos t, -b\sin t, 0]$.



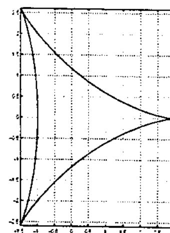
6. $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin 2t]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-\sin t, 2\cos 2t]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-\cos t, -4\sin 2t, 0]$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \dfrac{\frac{1}{2}\sin 2t - 4\sin 4t}{\sin^2 t + 4\cos^2 2t}\mathbf{v}(t)$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t)$.



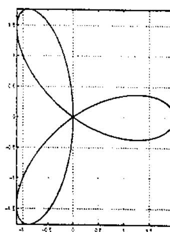
7. $\mathbf{r}(t) = [e^t, e^{-t}]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [e^t, -e^{-t}]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [e^t, e^{-t}]$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \left[\dfrac{e^{3t} - e^{-t}}{e^{2t} + e^{-2t}}, \dfrac{e^{-3t} - e^{t}}{e^{2t} + e^{-2t}}\right]$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t) = \left[\dfrac{2e^{-t}}{e^{2t} + e^{-2t}}, \dfrac{2e^{t}}{e^{2t} + e^{-2t}}\right]$.



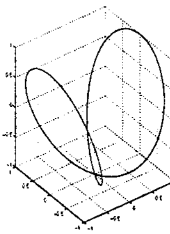
8. (a) $\mathbf{r}(t) = [2\cos t + \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-2\sin t - 2\sin 2t, 2\cos t - 2\cos 2t]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-2\cos t - 4\cos 2t, -2\sin t + 4\sin 2t]$,
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2$
$= 8(1 + \sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t)$
$= 8(1 - \cos 3t) = 16\sin^2 \frac{3t}{2}$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 12(\cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t) = 12\sin 3t$
$= 24\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{3t}{2}$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \frac{3}{2}\cot\frac{3t}{2}\mathbf{v}(t)$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t)$.



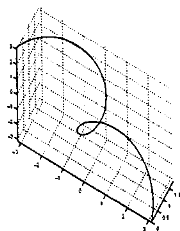
(b) $\mathbf{r}(t) = [\cos t + \cos 2t, \sin t - \sin 2t]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-\sin t - 2\sin 2t, \cos t - 2\cos 2t]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-\cos t - 4\cos 2t, -\sin t + 4\sin 2t]$,
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (-\sin t - 2\sin 2t)^2 + (\cos t - 2\cos 2t)^2$
$= 5 + 4\sin t \sin 2t - 4\cos t \cos 2t$
$= 5 - 4\cos 3t$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 6(\cos t \sin 2t + \sin t \cos 2t) = 6\sin 3t$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \dfrac{6\sin 3t}{5 - 4\cos 3t}\mathbf{v}(t)$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t)$.



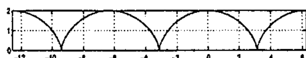
(c) $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin 2t, \cos 2t]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-\sin t, 2\cos 2t, -2\sin 2t]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-\cos t, -4\sin 2t, -4\cos 2t]$,
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 4 + \sin^2 t$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin 2t$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \frac{\sin 2t}{2(4+\sin^2 t)}\mathbf{v}(t)$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t)$.



(d) $\mathbf{r}(t) = [ct\cos t, ct\sin t, ct]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}' = [c\cos t - ct\sin t, c\sin t + ct\cos t, c]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}' = [-2c\sin t - ct\cos t, 2c\cos t - ct\sin t, 0]$,
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (c\cos t - ct\sin t)^2 + (c\sin t + ct\cos t)^2 + c^2$
$= c^2(t^2 + 2)$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = c^2 t$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \dfrac{t}{t^2 + 2}\mathbf{v}(t)$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t)$.



9. $\mathbf{r}(t) = [R\sin\omega t + \omega Rt, R\cos\omega t + R]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [\omega R\cos\omega t + \omega R, -\omega R\sin\omega t]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-\omega^2 R\sin\omega t, -\omega^2 R\cos\omega t]$,
$t = \dfrac{2n\pi}{\omega}$, n =정수 : y 값 최고,
$r(\frac{2n\pi}{\omega}) = [2n\omega\pi R, 2R]$,
$\mathbf{v}(\frac{2n\pi}{\omega}) = [2\omega R, 0]$,
$\mathbf{a}(\frac{2n\pi}{\omega}) = [0, -\omega^2 R]$,
$t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega}$, n =정수 : y 값이 최저,
$r(\frac{(2n+1)\pi}{\omega}) = [(2n+1)\omega\pi R, 0]$,
$\mathbf{v}(\frac{(2n+1)\pi}{\omega}) = [0, 0]$,
$\mathbf{a}(\frac{(2n+1)\pi}{\omega}) = [0, 0]$.



10. $\mathbf{r}(t) = [\cos t, 2\sin t]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-\sin t, 2\cos t]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-\cos t, -2\sin t]$,
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \sin^2 t + 4\cos^2 t = 1 + 3\cos^2 t$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \cos^2 t + 4\sin^2 t = 1 + 3\sin^2 t$,
$|\mathbf{v}|$는 $0, \pi$일 때 최대이고 $\pm\frac{\pi}{2}$일 때 최소이다;
$|\mathbf{a}|$는 $0, \pi$일 때 최소이고 $\pm\frac{\pi}{2}$일 때 최대이다;
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = 3\sin t\sin t$,
$\mathbf{a}_{\tan}(t) = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}(t) = \dfrac{3\sin t\cos t}{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\mathbf{v}(t)$,
$\mathbf{a}_{\text{norm}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_{\tan}(t)$.

11. $\mathbf{r}(t) = [R\cos\omega t, R\sin\omega t, 0]$,
$\mathbf{w} = [0, 0, \omega]$,
$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r} = [-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, 0] = \mathbf{r}'$,
$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \mathbf{w}'\times\mathbf{r} + \mathbf{w}\times\mathbf{r}' = \mathbf{w}\times\mathbf{v}$
$= \mathbf{w}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{w}\cdot\mathbf{r})\mathbf{w} - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{w})\mathbf{r}$
$= -\omega^2\mathbf{r} = [-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0]$.

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{b}$, $\mathbf{b}(t) = [\cos t, \sin t]$, $\mathbf{v} = \mathbf{r}' = 2t\mathbf{b} + t^2\mathbf{b}'$,
$\mathbf{b}'(t) = [-\sin t, \cos t]$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}' = 0$, $|\mathbf{b}| = |\mathbf{b}'| = 1$,
$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = 2\mathbf{b} + 4t\mathbf{b}' + t^2\mathbf{b}''$,
$\mathbf{b}''(t) = [-\cos t, -\sin t] = -\mathbf{b}$,
$\mathbf{a} = (2 - t^2)\mathbf{b} + 4t\mathbf{b}'$,
Coriolis acceleration= $4t\mathbf{b}'$.

13. 지구의 공전 반지름= R,
공전 각속도= $\omega = 2\pi$ year^{-1}= 1.9924×10^{-7} sec^{-1},
공전 선속도= $|\mathbf{v}| = R\omega = 30$ km/sec,
공전 가속도= $|\mathbf{a}| = R\omega^2 = 5.9772\times^{-6}$ km/sec^2.

14. $R = 3.85\times10^8$ m,
$\omega = 2\pi/(2.36\times10^6)$ sec^{-1}= 2.6624×10^{-6} sec^{-1},
$|\mathbf{v}| = R\omega = 1.0250\times10^3$ m/sec,
$|\mathbf{a}| = R\omega^2 = 2.7290\times10^{-3}$ m/sec^2.

15. $R = (3960 + 80)$ mi $= 4040$ mi $= 21331200$ ft,
$g = |\mathbf{a}| = R\omega^2 = 31$ ft/sec^2,
$v = |\mathbf{v}| = R\omega = \sqrt{Rg} = 2.5715\times10^4$ ft/sec.

16. $R = (3960 + 450)$ mi $= 4410$ mi,
$\omega = \dfrac{2\pi}{100}$ rad/min $= \dfrac{\pi}{50}$ rad/min,
$v = |\mathbf{v}| = R\omega = 277.1$ mi/min,
$g = |\mathbf{a}| = R\omega^2 = 17.41$ ft/sec^2.

8.7. Curvature and Torsion of a Curve. *Optional*

1. $\mathbf{r}(t) = [a\cos t, a\sin t]$, $\mathbf{r}'(t) = [-a\sin t, a\cos t]$, $\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = a^2$, $s(t) = \int_0^t\sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}\,dt = at$, $t = \frac{s}{a}$, $\mathbf{r}(s) = [a\cos\frac{s}{a}, a\sin\frac{s}{a}]$, $\mathbf{r}'(s) = [-\sin\frac{s}{a}, \cos\frac{s}{a}]$, $\mathbf{r}''(s) = [-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a}]$, $\kappa(s) = |\mathbf{r}''(s)| = \frac{1}{a}$.

2. $\mathbf{u}(s) = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'\dfrac{dt}{ds}$, $\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}$,
$\dfrac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{r}''\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 + \mathbf{r}'\dfrac{d^2t}{ds^2} = \mathbf{r}''(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-1} + \mathbf{r}'\dfrac{d^2t}{ds^2}$,
$\dfrac{d^2t}{ds^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)\cdot\dfrac{dt}{ds}$
$= -\frac{1}{2}(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-\frac{3}{2}}2(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-\frac{1}{2}}$
$= -(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-2}$,
$\dfrac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{r}''(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-1} - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-2}$,
$\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}\cdot\dfrac{d\mathbf{u}}{ds} = (\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-2}$
$-2(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-3} + (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-3}(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2$
$= (\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'')(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-2} - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-3}$,
$\kappa(t) = \dfrac{\sqrt{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'') - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2}}{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{\frac{3}{2}}}$.

3. $\mathbf{r}(t) = [t, y(t)]$, $\mathbf{r}' = [1, y']$, $\mathbf{r}'' = [0, y'']$,
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = 1 + y'^2$, $\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = y'y''$, $\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = y''^2$,
$\kappa = \dfrac{\sqrt{(1+y'^2)(y''^2) - (y'y'')^2}}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

4. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 타원,
$\mathbf{r}' = [-a\sin t, b\cos t]$, $\mathbf{r}'' = [-a\cos t, -b\sin t]$,
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$,
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = (a^2 - b^2)\sin t\cos t$,
$\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t$,
$\kappa = ab(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{3}{2}}$.

5. 포물선, $y' = 2x$, $y'' = 2$, $\kappa = 2(1 + 4x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

6. 쌍곡선, $y = cx^{-1}$, $y' = -cx^{-2}$, $y'' = 2cx^{-3}$,
$\kappa = 2|cx|x^2(c^2 + x^4)^{-\frac{3}{2}}$.

7. $x = a\cos t, y = b\sin t, z = ct,$
$x^2 + y^2 = a^2, z = c\arctan\frac{y}{x},$
원 기둥 표면에 있는 나선,
$\mathbf{r}' = [-a\sin t, a\cos t, c],\ \mathbf{r}'' = [-a\cos t, -a\sin t, 0],$
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = a^2 + c^2,\ \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = 0,\ \mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = a^2,$
$\kappa = |a|(a^2 + c^2)^{-1}.$

8. $x = \cosh t, y = \sinh t,\ x^2 - y^2 = 1,$ 쌍곡선,
$\mathbf{r}' = [\sinh t, \cosh t],\ \mathbf{r}'' = [\cosh t, \sinh t],$
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = \cosh 2t,\ \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = \sinh 2t,\ \mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = \cosh 2t,$
$\kappa = \cosh^{-3} 2t.$

9. $x = t, y = t^{\frac{3}{2}},\ y^2 = x^3,$ semicubical parabola,
$\mathbf{r}' = [1, \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}],\ \mathbf{r}'' = [0, \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{2}}],$
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = 1 + \frac{9}{4}t,\ \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = \frac{9}{8},\ \mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = \frac{9}{16}t^{-1},$
$\kappa = \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{9}{4}t)^{-\frac{3}{2}}.$

10. $\tau = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{b}' = -\mathbf{p}\cdot\frac{d}{ds}(\mathbf{u}\times\mathbf{p})$
$= -\mathbf{p}\cdot(\frac{d}{ds}\mathbf{u}\times\mathbf{p} + \mathbf{u}\times\frac{d}{ds}\mathbf{p})$
$= 0 - (\mathbf{p}\ \ \mathbf{u}\ \ \frac{d}{ds}\mathbf{p}) = (\mathbf{u}\ \ \mathbf{p}\ \ \frac{d}{ds}\mathbf{p}).$

11. $\tau = (\mathbf{u}\ \ \mathbf{p}\ \ \frac{d}{ds}\mathbf{p}) = (\mathbf{u}\ \ \frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\mathbf{u}\ \ \frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\mathbf{u}))$
$= (\mathbf{u}\ \ \frac{1}{\kappa}\frac{d}{ds}\mathbf{u}\ \ (\frac{d}{ds}(\frac{1}{\kappa})\frac{d}{ds}\mathbf{u} + \frac{1}{\kappa}\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{u}))$
$= \frac{1}{\kappa^2}(\mathbf{u}\ \ \frac{d}{ds}\mathbf{u}\ \ \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{u}) = \frac{1}{\kappa^2}(\frac{d}{ds}\mathbf{r}\ \ \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}\ \ \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}).$

12. $\mathbf{r}' = \frac{d}{dt}\mathbf{r},\ \frac{ds}{dt} = \sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'},\ \frac{dt}{ds} = (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^{-\frac{1}{2}},$
$\frac{d}{ds}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}\frac{dt}{ds} = \mathbf{r}'\frac{dt}{ds},$
$\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r} = \frac{d}{ds}(\frac{d}{ds}\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}'\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds}$
$= \mathbf{r}''(\frac{dt}{ds})^2 + \mathbf{r}'\frac{d}{dt}(\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds},$
$\frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r} = \frac{d}{ds}(\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}''(\frac{dt}{ds})^2 + \mathbf{r}'\frac{d}{dt}(\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds}$
$= \mathbf{r}'''(\frac{dt}{ds})^3 + 3\mathbf{r}''\frac{d}{dt}(\frac{dt}{ds})(\frac{dt}{ds})^2$
$+\mathbf{r}'\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds})\frac{dt}{ds},$
$\frac{1}{\kappa^2(t)} = \frac{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')^3}{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'')-(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2},$
$\tau = \frac{1}{\kappa^2}(\frac{dt}{ds})^6(\mathbf{r}'\ \ \mathbf{r}''\ \ \mathbf{r}''')$
$= \frac{(\mathbf{r}'\ \ \mathbf{r}''\ \ \mathbf{r}''')}{(\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}')(\mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'') - (\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'')^2}.$

13. $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), c],\ \mathbf{r}' = [x', y', 0],$
$\mathbf{r}'' = [x'', y'', 0],\ \mathbf{r}''' = [x''', y''', 0],$
$(\mathbf{r}'\ \ \mathbf{r}''\ \ \mathbf{r}''') = 0,\ \tau = 0.$

14. $\mathbf{r}(t) = [a\cos t, a\sin t, ct],$
$\mathbf{r}' = [-a\sin t, a\cos t, c],$
$\mathbf{r}'' = [-a\cos t, -a\sin t, 0],$
$\mathbf{r}''' = [a\sin t, -a\cos t, 0],$
$(\mathbf{r}'\ \ \mathbf{r}''\ \ \mathbf{r}''') = a^2c,$
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = a^2 + c^2,\ \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = 0,\ \mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = a^2,$
$\tau = c(a^2 + c^2)^{-1}.$

15. $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3],\ \mathbf{r}' = [1, 2t, 3t^2],$
$\mathbf{r}'' = [0, 2, 6t],\ \mathbf{r}''' = [0, 0, 6],$
$(\mathbf{r}'\ \ \mathbf{r}''\ \ \mathbf{r}''') = 12,\ \mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}' = 1 + 4t^2 + 9t^4,$
$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'' = 4t + 18t^3,\ \mathbf{r}''\cdot\mathbf{r}'' = 4 + 36t^2,$
$\tau = 3(1 + 9t^2 + 9t^4)^{-1}.$

16. $\mathbf{p} = \mathbf{b}\times\mathbf{u},\ \frac{d}{ds}\mathbf{p} = \frac{d}{ds}\mathbf{b}\times\mathbf{u} + \mathbf{b}\times\frac{d}{ds}\mathbf{u}$
$= -\tau\mathbf{p}\times\mathbf{u} + \mathbf{b}\times\kappa\mathbf{p} = -\tau(-\mathbf{b}) + \kappa(-\mathbf{u})$
$= -\kappa\mathbf{u} + \tau\mathbf{b}.$

8.8. Review from Calculus in Several Variables. *Optional*

1. $w = \sqrt{x^2 + y^2},\ x = e^{4t},\ y = e^{-4t},$
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
$= x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}4e^{4t} + y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(-4)e^{-4t}$
$= 4(e^{8t} + e^{-8t})^{-\frac{1}{2}}(e^{8t} - e^{-8t}).$

2. $w = x/y,\ x = g(t),\ y = h(t),$
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
$= y^{-1}g'(t) - xy^{-2}h'(t) = g'/h - gh'/h^2.$

3. $w = x^y,\ x = \cos t,\ y = \sin t,$
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
$= yx^{y-1}(-\sin t) + x^y\ln x\cos t$
$= (\cos t)^{\sin t}(\cos t\ln\cos t - \cot t).$

4. $w = xy + yz + zx,\ x = t,\ y = \cos t,\ z = \sin t,$
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$
$= (y + z) + (x + z)(-\sin t) + (y + x)\cos t$
$= 2\cos^2 t + 2\cos t - 1.$

5. $w = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}},\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,$
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$
$= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(-\sin t)$
$-y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}\cos t - z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$
$= -t(1 + t^2)^{-\frac{3}{2}}.$

6. $w = x^2 + y^2,\ x = u + v,\ y = u - v,$
$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2x + 2y = 4u,$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2x - 2y = 4v.$

7. $w = xy,\ x = e^u\cos v,\ y = e^u\sin v,$
$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$
$= ye^u\cos v + xe^u\sin v = e^{2u}\sin 2v,$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$
$= y(-e^u\sin v) + ve^u\cos v = e^{2u}\cos 2v.$

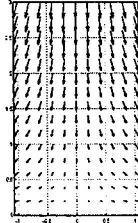
8. $w = x^4 - 4x^2y^2 + y^4,\ x = uv,\ y = u/v,$
$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$
$= (4x^3 - 8xy^2)v + (-8x^2y + 4y^3)/v$
$= 4u^3(v^4 - 4 + v^{-4}),$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$
$= (4x^3 - 8xy^2)u + (-8x^2y + 4y^3)(-u/v^2)$
$= 4u^4(v^3 - v^{-5}).$

9. $w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1},$
$x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ z = 2uv,$
$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$
$= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}2u - y(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}2u$
$-z(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}2v = -u(u^2 + v^2)^{-3},$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$
$= -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}2v$
$-y(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}(-2v) - z(x^2 + y^2 + z^2)^{-2}2u$
$= -v(u^2 + v^2)^{-3}.$

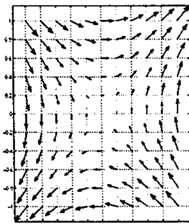
10. $\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x},$
$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y},$
$f = x^3 + y^3 + z^2,\ z = g = x^2 + y^2,$
$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x} = 3x^2 + 2z\cdot 2x = x(3x + 4x^2 + 4y^2),$
$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial y} = 3y^2 + 2z\cdot 2y = y(3y + 4x^2 + 4y^2).$

8.9. Gradient of a Scalar Field. Directional Derivative

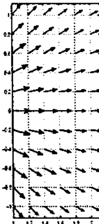
1. $f = x^2 - y^2$, $\nabla f = [2x, -2y]$,
$\nabla f(-1,3) = [-2,-6]$.



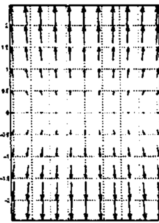
2. $f = xy$, $\nabla f = [y, x]$,
$\nabla f(1,1) = [1,1]$.



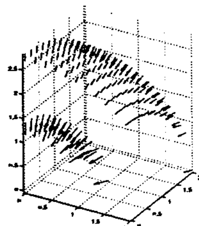
3. $f = \ln(x^2+y^2)$, $\nabla f = [2x, -2y]/(x^2+y^2)$,
$\nabla f(2,0) = [1,0]$.



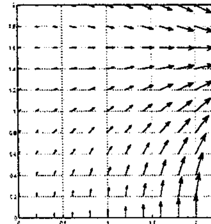
4. $f = x^2 + 9y^2$, $\nabla f = [2x, 18y]$,
$\nabla f(-2,2) = [-4,36]$.



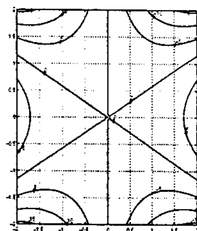
5. $f = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$,
$\nabla f = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}[-x,-y,-z]$,
$\nabla f(2,1,3) = [-2,-1,-3]/14\sqrt{14}$.



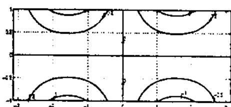
6. $f = e^x \sin y$, $\nabla f = [e^x \sin y, e^x \cos y]$,
$\nabla f(\ln 2, \frac{1}{4}\pi) = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



7. $T = z/(x^2+y^2)$,
$-\nabla T = [2xz, 2yz, -x^2-y^2]/(x^2+y^2)^2$,
$-\nabla T(0,1,2) = [0, 4/25, -1/5]$.
8. $T = \sin(x+z)$,
$-\nabla T = [-\cos(x+z), 0, -\cos(x+z)]$,
$-\nabla T(\frac{\pi}{8}, 1, \frac{\pi}{8}) = [-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]$.
9. $T = \cos x \cosh y$,
$-\nabla T = [\sin x \cosh y, -\cos x \sinh y]$,
$-\nabla T(\frac{\pi}{2}, 1) = [\cosh 1, 0]$.
10. $T = \arctan \frac{y}{x}$,
$-\nabla T = [y, -x]/(x^2+y^2)$,
$-\nabla T(3,4) = [4/25, -3/25]$.
11. $T = x/y$,
$-\nabla T = [-1/y, x/y^2]$,
$-\nabla T(8,-1) = [1,8]$.
12. $T = e^{x^2-y^2} \sin 2xy$,
$-\nabla T = -2e^{x^2-y^2}[x \sin 2xy + y \cos 2xy,$
$x \cos 2xy - y \sin 2xy]$,
$-\nabla T(1,1) = [-2(\sin 2 + \cos 2), -2(\cos 2 - \sin 2)]$.
13. 점 P 에서의 벡터 장의 크기가 점 Q 에서의 크기보다 크다. 따라서 힘의 크기도 점 P 에서 더 크다.
14. $z = 1500 - 3x^2 - 5y^2$, $\nabla z = [-6x, -10y]$,
$\nabla z(-0.2, 0.1) = [1.2, -1]$.
15. $f = \frac{4}{3}x - y - \frac{2}{3}$, $\nabla f = [\frac{4}{3}, -1]$, $\nabla f(2,2) = [\frac{4}{3}, -1]$,
$\mathbf{n} = [\frac{4}{5}, \frac{3}{5}]$.
16. $f = x^2 + y - 1$, $\nabla f = [2x, 1]$, $\nabla f(1,0) = [2,1]$,
$\mathbf{n} = [2,1]/\sqrt{5}$.
17. $f = x^2 + y^2 - 25$, $\nabla f = [2x, 2y]$, $\nabla f(3,4) = [6,8]$,
$\mathbf{n} = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$.
18. $f = ax + by + xz + d$, $\nabla f = [a,b,c]$,
$\mathbf{n} = [a,b,c]/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
19. $f = \sqrt{x^2+y^2} - z$,
$\nabla f = [x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}, -1]$,
$\nabla f(6,8,10) = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1]$, $\mathbf{n} = [\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1]/\sqrt{2}$.
20. $f = x^2 + y^2 + 2z^2 - 26$, $\nabla f = [2x, 2y, 4z]$,
$\nabla f(2,2,3) = [4,4,12]$, $\mathbf{n} = [1,1,3]/\sqrt{11}$.
21. $\mathbf{v} = [2x, 4y, 8z] = \nabla f$, $f = x^2 + 2y^2 + 4z^2$.
22. $\mathbf{v} = [yz, xz, xy] = \nabla f$, $f = xyz$.
23. $\mathbf{v} = [xy, 2xy, 0]$ 는 포텐셜을 가지지 않는다.
24. $\mathbf{v} = [ye^x, e^x, 1] = \nabla f$, $f = e^x y + z$.
25. $\mathbf{v} = [\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2}] = \nabla f$, $f = xy/z$.
26. $\mathbf{v} = (x^2+y^2)^{-1}[x,y] = \nabla f$, $f = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.
27. (a) $T(x,y) = x^3 - 3xy^2 = c$, $c = 0, \pm 5, \pm 10, \pm 15$.



(b) $T(x,y) = \sin x \sinh y = c$, $c = 0, \pm 0.5, \pm 1$.



(c) $T(x,y) = e^x \cos y = c$, $c = 0, \pm 1, \pm 2$.



28. $\nabla(fg) = [(fg)_x, (fg)_y, (fg)_z]$
$= [f_x g, f_y g, f_z g] + [f g_x, f g_y, f g_z]$
$= f\nabla g + g\nabla f$;
$\nabla(f^n) = [(f^n)_x, (f^n)_y, (f^n)_z]$
$= [nf^{n-1} f_x, nf^{n-1} f_y, nf^{n-1} f_z]$
$= nf^{n-1}\nabla f$;
$\nabla(f/g) = [(f/g)_x, (f/g)_y, (f/g)_z]$
$= [f_x/g, f_y/g, f_z/g]$
$-[fg_x/g^2, fg_y/g^2, fg_z/g^2]$
$= (1/g^2)(g\nabla f - f\nabla g)$;
$\nabla^2(fg) = (fg)_{xx} + (fg)_{yy} + (fg)_{zz}$
$= (f_x g + f g_x)_x + (f_y g + f g_y)_y + (f_z g + f g_z)_z$
$= f_{xx} g + 2 f_x g_x + f g_{xx} + f_{yy} g + 2 f_y g_y$
$+ f g_{yy} + f_{zz} g + 2 f_z g_z + f g_{zz}$
$= g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g$.

29. $f = x^2 + y^2$, $\nabla f = [2x, 2y]$, $\nabla f(1,1) = [2,2]$, $\mathbf{a} = [2,-4]$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{5}$,
$D_\mathbf{a} f(1,1) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(1,1) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

30. $f = x - y$, $\nabla f = [1,-1]$, $\nabla f(4,5) = [1,-1]$, $\mathbf{a} = [2,1]$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{5}$,
$D_\mathbf{a} f(4,5) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(4,5) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

31. $f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,
$\nabla f = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}[-x,-y,-z]$,
$\nabla f(3,0,4) = \left[-\frac{3}{125}, 0, -\frac{4}{125}\right]$,
$\mathbf{a} = [1,1,1]$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$,
$D_\mathbf{a} f(3,0,4) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(3,0,4) = -\frac{7}{125\sqrt{3}}$.

32. $f = \ln(x^2+y^2)$, $\nabla f = [2x, 2y]/(x^2+y^2)$,
$\nabla f(4,0) = [1/2, 0]$, $\mathbf{a} = [1,-1]$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$,
$D_\mathbf{a} f(4,0) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(4,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

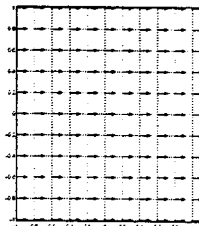
33. $f = xyz$, $\nabla f = [yz, xz, xy]$,
$\nabla f(-1,1,3) = [3,-3,-1]$, $\mathbf{a} = [1,-2,2]$, $|\mathbf{a}| = 3$,
$D_\mathbf{a} f(-1,1,3) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(-1,1,3) = \frac{7}{3}$.

34. $f = x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $\nabla f = [2x, 6y, 8z]$,
$\nabla f(1,0,1) = [2,0,8]$,
$\mathbf{a} = [-1,-1,1]$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$,
$D_\mathbf{a} f(1,0,1) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(1,0,1) = 2\sqrt{3}$.

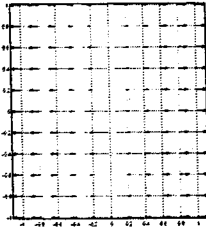
35. $f = e^x \cos y$, $\nabla f = [e^x \cos y, -e^x \sin y, 0]$,
$\nabla f(2,\pi,0) = [-e^2, 0, 0]$, $\mathbf{a} = [2,3,0]$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{13}$,
$D_\mathbf{a} f(2,\pi,0) = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f(2,\pi,0) = -\frac{2e^2}{\sqrt{13}}$.

8.10. Divergence of a Vector Field

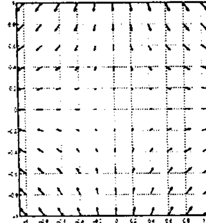
1. $\mathbf{v} = [x,y,z]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 1+1+1 = 3$.
2. $\mathbf{v} = [x^2, y^2, z^2]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 2x+2y+2z = 2(x+y+z)$.
3. $\mathbf{v} = e^x[\cos y, \sin y]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = e^x\cos y + e^x \cos y = 2e^x \cos y$.
4. $\mathbf{v} = [v_1(y,z), v_2(z,x), v_3(x,y)]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$.
5. $\mathbf{v} = (x^2+y^2)^{-1}[-y, x]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = (x^2+y^2)^{-2}2xy - (x^2+y^2)^{-2}2xy = 0$.
6. $\mathbf{v} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}[x,y,z]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(y^2+z^2-2x^2)$
$+(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+z^2-2y^2)$
$+(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2-2z^2) = 0$.
7. $\mathbf{v} = [e^x, ye^{-x}, 2z\sinh x]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = e^x + e^{-x} + 2\sinh x = 2e^x$.
8. $\mathbf{v} = xyz[x,y,z]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz$.
9. (a) $\mathbf{v} = [1,0]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.



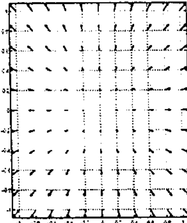
(b) $\mathbf{v} = [x,0]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 1$.



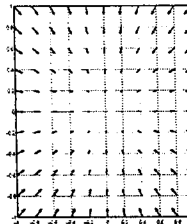
(c) $\mathbf{v} = [x, -y]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.



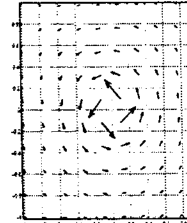
(d) $\mathbf{v} = [x, y]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 2$.



(e) $\mathbf{v} = [-x, -y]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = -2$.



(f) $\mathbf{v} = (x^2+y^2)^{-1}[-y, x]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$.



10. $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = [\omega_2 z - \omega_3 y, \omega_3 x - \omega_1 z, \omega_1 y - \omega_2 x]$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$.

11. $\mathbf{v} = [y, 0, 0]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0$, incompressible,
$\mathbf{v} = [\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}]$,
$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$,
$x = ty + c_1, y = c_2, z = c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [c_2 t + c_1, c_2, c_3]$,
$\mathbf{r}(0) = [c_1, c_2, c_3]$,
$\mathbf{r}(1) = [c_1 + c_2, c_2, c_3]$,
체적 1인 정육면체가 밑면이 평행사변형이고 체적 1인 기둥으로 간다.

12. $\mathbf{v} = [x, 0, 0]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$,
$\mathbf{v} = [\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}]$,
$\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$,
$x = c_1 e^t, y = c_2, z = c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [c_1 e^t, c_2, c_3]$,
$\mathbf{r}(0) = [c_1, c_2, c_3]$,
$\mathbf{r}(1) = [c_1 e, c_2, c_3]$,
체적 1인 정육면체가 체적 e인 직육면체로 간다.

13. (a) $\operatorname{div}(k\mathbf{v}) = (kv_1)_x + (kv_2)_y + (kv_3)_z$
$= kv_{1x} + kv_{2y} + kv_{3z} = k\operatorname{div}\mathbf{v}$.
(b) $\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = (fv_1)_x + (fv_2)_y + (fv_3)_z$
$= f_x v_1 + f_y v_2 + f_z v_3$
$+ fv_{1x} + fv_{2y} + fv_{3z} = f\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla f$.
(c) $\operatorname{div}(f\nabla g) = (fg_x)_x + (fg_y)_y + (fg_z)_z$
$= f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z$
$+ fg_{xx} + fg_{yy} + fg_{zz}$
$= f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$.
(d) $\operatorname{div}(g\nabla f) = g\nabla^2 f + \nabla g \cdot \nabla f$,
$\operatorname{div}(f\nabla g) - \operatorname{div}(g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$.
예를 통한 확인.
$f = e^{xyz}$, $\mathbf{v} = [ax, by, cz]$,
$f\mathbf{v} = [axe^{xyz}, bye^{xyz}, cze^{xyz}]$,
$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = a(1+xyz)e^{xyz} + b(1+xyz)e^{xyz}$
$+ c(1+xyz)e^{xyz}$
$= (a+b+c)(1+xyz)e^{xyz}$,
$\operatorname{div}\mathbf{v} = a+b+c$,
$\nabla f = [yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}]$,
$f\operatorname{div}\mathbf{v} = (a+b+c)e^{xyz}$,
$\mathbf{v}\cdot\nabla f = (a+b+c)xyze^{xyz}$,
$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla f$;
$f = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$, $\mathbf{v} = [x, y, z]$,
$\nabla f = -3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}[x, y, z]$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 3$,
$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f\operatorname{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\nabla f = 0$;
$f = x^2 - y^2$, $g = e^{x+y}$,
$\nabla f = [2x, -2y]$, $\nabla g = [e^{x+y}, e^{x+y}]$,
$f\nabla g = (x^2-y^2)e^{x+y}[1, 1]$,
$\operatorname{div}(f\nabla g) = (2x + x^2 - y^2)e^{x+y}$
$+ (-2y + x^2 - y^2)e^{x+y}$
$= 2(x^2 - y^2 + x - y)e^{x+y}$,
$\nabla^2 g = 2e^{x+y}$,
$f\nabla^2 g = 2(x^2-y^2)e^{x+y}$,
$\nabla f \cdot \nabla g = (2x - 2y)e^{x+y}$,
$\operatorname{div}(f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$;

14. $f = (x-y)/(x+y)$,
$\nabla f = [1 - x + y, -1 - x + y]/(x+y)^2$,
$\nabla^2 f = (x - 3y - 2 + 3x - y + 2)/(x+y)^3$
$= 4(x-y)/(x+y)^3$.

15. $f = 4x^2 + 9y^2 + z^2$,
$\nabla f = [8x, 18y, 2z]$,
$\nabla^2 f = 8 + 18 + 2 = 28$.

16. $f = e^{2x}\sin 2y$,
$\nabla f = [2e^{2x}\sin 2y, 2e^{2x}\cos 2y]$,
$\nabla^2 f = 4e^{2x}\sin 2y - 4e^{2x}\sin 2y = 0$.

17. $f = xy/z$,
$\nabla f = [y/z, x/z, -xy/z^2]$,
$\nabla^2 f = 2xy/z^3$.

18. $f = \cosh^2 x - \sinh^2 y$,
$\nabla f = [\sinh 2x, -\sinh 2y]$,
$\nabla^2 f = 2\cosh 2x - 2\cosh 2y$.
19. $f = \arctan(y/x)$,
$\nabla f = [-y, x]/(x^2+y^2)$,
$\nabla^2 f = (2xy - 2xy)/(x^2+y^2)^2 = 0$.
20. $f = z - \sqrt{x^2+y^2}$,
$\nabla f = [-x(x^2+y^2)^{-1/2}, -y(x^2+y^2)^{-1/2}, 1]$,
$\nabla^2 f = (-x^2-y^2+x^2-x^2-y^2+y^2)(x^2+y^2)^{-3/2}$
$= (x^2+y^2)^{-1/2}$.

8.11. Curl of a Vector Field

1. $\nabla f = [f_x, f_y, f_z]$,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [v_{3y} - v_{2z}, v_{1z} - v_{3x}, v_{2x} - v_{1y}]$,
$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$,
$\nabla f(P) \neq 0$ 이면 점 P 에서 함수값이 가장 크게 증가하는 방향이 된다; $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 는 좌표계의 선택에 무관하다; $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ 는 벡터장 $\mathbf{v}$ 의 회전성을 결정한다; $\nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f)$.
2. $\mathbf{v} = [2y, 5x, 0]$, $\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, 3]$.
3. $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)[1,1,1]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [y - z, z - x, x - y]$.
4. $\mathbf{v} = [v_1(x), v_2(y), v_3(z)]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}]$
$= [0, 0, 0]$.
5. $\mathbf{v} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}[x, y, z]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v}$
$= -3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}[yz - yz, xz - xz, xy - xy]$
$= [0, 0, 0]$.
6. $\mathbf{v} = [\sin y, \cos z, 0]$, $\operatorname{curl} \mathbf{v} = [\sin z, 0, -\cos y]$.
7. $\mathbf{v} = xyz[x, y, z]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [xz^2 - xy^2, xy^2 - yz^2, y^2 z - x^2 z]$.
8. $\mathbf{v} = [2y^2, 0, 0] = [x', y', z']$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, -4y]$,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, incompressible,
$x' = 2y^2, y' = 0, z' = 0$,
$x = 2c_2^2 t + c_1, y = c_2, z = c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [2c_2^2 t + c_1, c_2, c_3]$.
9. $\mathbf{v} = [0, 0, x^3] = [x', y', z']$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, -3x^2, 0]$,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, incompressible,
$x' = 0, y' = 0, z' = x^3$,
$x = c_1, y = c_2, z = c_1^3 t + c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [c_1, c_2, c_1^3 t + c_3]$.
10. $\mathbf{v} = [\sec x, \csc x, 0] = [x', y', z']$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, -\csc x \cot x]$,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sec x \tan x$,
$x' = \sec x, y' = \csc x, z' = 0$,
$\cos x\, dx = dt$, $\sin x = t + c_1$, $x = \arcsin(t + c_1)$,
$y' = \csc x = \dfrac{1}{t + c_1}$, $y = \ln(t + c_1) + c_2$, $z = c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [\arcsin(t + c_1), \ln(t + c_1) + c_2, c_3]$.
11. $\mathbf{v} = [y, -x, 0] = [x', y', z']$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, -2]$,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, incompressible,
$x' = y, y' = -x, z' = 0$,
$x'' = y' = -x, x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$,
$y = x' = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$, $z = c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [c_1 \cos t + c_2 \sin t, -c_1 \sin t + c_2 \cos t, c_3]$.
12. $\mathbf{v} = [-\frac{1}{4}y, 4x, 0] = [x', y', z']$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, 17/4]$,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, incompressible,
$x' = -\frac{1}{4}y, y' = 4x, z' = 0$,
$x'' = -\frac{1}{4}y' = -x, x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$,
$y = -4x' = 4c_1 \sin t - 4c_2 \cos t, z = c_3$,
$\mathbf{r}(t) = [c_1 \cos t + c_2 \sin t, 4c_1 \sin t - 4c_2 \cos t, c_3]$.
13. $\mathbf{v} = [x, y, -z] = [x', y', z']$,
$\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, 0]$, irrotational,
$\operatorname{div} \mathbf{v} = 1$,
$x' = x, y' = y, z' = -z$,
$x = c_1 e^t, y = c_2 e^t, z = c_3 e^{-t}$,
$\mathbf{r}(t) = [c_1 e^t, c_2 e^t, c_3 e^{-t}]$.
14. (a) $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $w_j = u_j + v_j$, $j = 1, 2, 3$,
$\operatorname{curl} \mathbf{w} = [w_{3y} - w_{2z}, w_{1z} - w_{3x}, w_{2x} - w_{1y}]$
$= [u_{3y} + v_{3y} - u_{2z} - v_{2z},$
$u_{1z} + v_{1z} - u_{3x} - v_{3x},$
$u_{2x} + v_{2x} - u_{1y} - v_{1y}]$
$= [u_{3y} - u_{2z}, u_{1z} - u_{3x}, u_{2x} - u_{1y}]$
$+ [v_{3y} - v_{2z}, v_{1z} - v_{3x}, v_{2x} - v_{1y}]$
$= \operatorname{curl} u + \operatorname{curl} v$.
(b) $\operatorname{div} \operatorname{curl} v = \operatorname{div}[v_{3y} - v_{2z}, v_{1z} - v_{3x}, v_{2x} - v_{1y}]$
$= (v_{3y} - v_{2z})_x + (v_{1z} - v_{3x})_y$
$+ (v_{2x} - v_{1y})_z$
$= v_{3xy} - v_{2xz} + v_{1yz} - v_{3xy}$
$+ v_{2xz} - v_{1yz} = 0$.
(c) $\operatorname{curl}(f\mathbf{v}) = [(fv_3)_y - (fv_2)_z, (fv_1)_z - (fv_3)_x,$
$(fv_2)_x - (fv_1)_y]$
$= [f_y v_3 + f v_{3y} - f_z v_2 - f v_{2z},$
$f_z v_1 + f v_{1z} - f_x v_3 - f v_{3x},$
$f_x v_2 + f v_{2x} - f_y v_1 - f v_{1y}]$
$= \nabla f \times \mathbf{v} + f \operatorname{curl} \mathbf{v}$.
(d) $\operatorname{curl} \nabla f = \operatorname{curl}[f_x, f_y, f_z]$
$= [f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}]$
$= \mathbf{0}$.
(e) $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \operatorname{div}[u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3,$
$u_1 v_2 - u_2 v_1]$
$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)_x + (u_3 v_1 - u_1 v_3)_y$
$+ (u_1 v_2 - u_2 v_1)_z$
$= u_{2x} v_3 + u_2 v_{3x} - u_{3x} v_2 - u_3 v_{2x}$
$+ u_{3y} v_1 + u_3 v_{1y} - u_{1y} v_3 - u_1 v_{3y}$
$+ u_{1z} v_2 + u_1 v_{2z} - u_{2z} v_1 - u_2 v_{1z}$
$= (u_{3y} - u_{2z}) v_1 + (u_{1z} - u_{3x}) v_2$
$+ (u_{2x} - u_{1y}) v_3 - u_1(v_{3y} - v_{2z})$
$- u_2(v_{1z} - v_{3x}) - u_3(v_{2x} - v_{1y})$
$= \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{v}$.
15. $\operatorname{curl}(f\mathbf{u}) = \operatorname{curl}[xy^2 z, xyz^2, x^2 yz]$
$= [x^2 z - 2xyz, xy^2 - 2xyz, yz^2 - 2xyz]$.
16. $\operatorname{curl} \mathbf{v} = [0, 0, 0]$,
$\operatorname{curl}(f\mathbf{v}) = \operatorname{curl}[xy^2 z^2, x^2 yz^2, x^2 y^2 z]$
$= [0, 0, 0]$.

17. $\mathbf{u} \times (\text{curl}\,\mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$,
$\mathbf{v} \times (\text{curl}\,\mathbf{u}) = \mathbf{v} \times [-1,-1,-1]$
$= [xy - zx, xy - yz, -yz + zx]$.
18. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [xyz - x^2 z, xyz - xy^2, xyz - yz^2]$,
$\text{curl}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = [xz - z^2 - xy, xy - x^2 - yz, yz - y^2 - xz]$.
19. $\mathbf{v} \cdot (\text{curl}\,\mathbf{u}) = -yz - zx - xy$,
$\mathbf{u} \cdot (\text{curl}\,\mathbf{v}) = 0$.
20. $\mathbf{u} \cdot (\text{curl}\,\mathbf{u}) = -y - z - x$,
$\mathbf{u} \times (\text{curl}\,\mathbf{u}) = [x - z, y - x, z - y]$.

Chapter 8. Review

1. 벡터는 크기와 방향을 가지는 양이다; 스칼라는 크기로 결정되는 양이다; 벡터 함수는 함수값이 벡터인 함수이다; 벡터 장은 어떤 영역에 정의된 벡터 함수이다; 스칼라 함수는 함수값이 스칼라인 함수이다; 스칼라 장은 어떤 영역에 정의된 스칼라 함수이다;
$\mathbf{a} = [2,-1,0]$, $c = \sqrt{5}$, $\mathbf{v}(x,y,z) = [x,y,z]$,
$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; 정사영에서 비롯된다; 내적, dot product.
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1]$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma$; 오른 나사의 진행 방향을 가지고 크기는 두 벡터로 이루어지는 평행사변형의 면적인 벡터를 만든다.
4. 두 벡터가 $90°$ 이면 수직이라 한다; 수직을 이용하면 직선이나 평면의 방정식을 나타내기 쉽다.
5. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 가 오른 나사의 진행 방향을 주면 오른쪽으로 편향된 좌표계이고, 왼 나사의 진행 방향을 주면 왼쪽으로 편향된 좌표계이다;
6. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, 즉 교환 법칙 대신에 반교환 법칙이 성립하고 결합 법칙은 아예 성립하지 않는다.
7. 두 벡터 중 어느 하나가 영벡터이거나 서로 수직일 때 내적이 0 이다; 두 벡터 중 어느 하나가 영벡터이거나 서로 같은 향일 때 외적이 $\mathbf{0}$ 이다.
8. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 는 어느 쪽을 먼저 할 지 알 수 없으므로 정의될 수 없다; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ 는 어느 쪽을 먼저 해도 스칼라와 벡터의 내적을 해야하므로 정의될 수 없다; $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ 는 스칼라와 벡터의 외적을 해야하므로 정의될 수 없다
9. $\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$; 운동하는 질점의 속도, 속력, 가속도를 재거나 곡선의 곡률, 곡률 반경을 재는 데 쓰인다.
10. $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t]$ 이면, $\mathbf{r}'(t) = [-\sin t, \cos t]$ 이므로 항상 변화하는 속도를 가지지만, 속력은 $|\mathbf{r}'(t)| = 1$ 로 일정하다.
11. $D_{\mathbf{a}} f = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\cdot\nabla f$.
12. $\nabla f = [f_x, f_y, f_z]$,
$\text{div}\,\mathbf{v} = v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}$,
$\text{curl}\,\mathbf{v} = [v_{3y} - v_{2z}, v_{1z} - v_{3x}, v_{2x} - v_{1y}]$,
$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$,
$\nabla f(P) \neq 0$ 이면 점 P 에서 함수값이 가장 크게 증가하는 방향이 된다; $\text{div}\,\mathbf{v}$ 는 좌표계의 선택에 무관하다; $\text{curl}\,\mathbf{v}$ 는 벡터장 $\mathbf{v}$ 의 회전성을 결정한다; $\nabla^2 f = \text{div}\,(\nabla f)$.
13. $f\text{curl}\,\mathbf{v}$, $f\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\times\nabla f$, $\mathbf{v}\times(\text{curl}\,\mathbf{v})$, $\text{div}\,(f\mathbf{v})$, $\text{curl}\,(f\mathbf{v})$.
14. $(4\mathbf{a}+5\mathbf{b})\cdot 6\mathbf{c} = [-13,39,-8]\cdot[24,-36,0] = -1716$.
15. $3\mathbf{b}\times 6\mathbf{c} = [-15,21,0]\times[24,-36,0] = [0,0,36]$,
$18\mathbf{c}\times\mathbf{b} = [72,-108,0]\times\mathbf{b} = [0,0,-36]$.
16. $\mathbf{a}\times\mathbf{d} = [16,-60,-6]$,
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} = 0$.
17. $(2\mathbf{a}\;\;\mathbf{b}\;\;3\mathbf{c}) = -24$,
$6(\mathbf{b}\;\;\mathbf{a}\;\;\mathbf{c}) = 24$.
18. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = [14,10,26]\times\mathbf{c} = [156,104,-124]$,
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times[0,0,2] = [2,-6,0]$.
19. $(\mathbf{b}-2\mathbf{c})\times\mathbf{d} = [-13,19,0]\times\mathbf{d} = [266,182,-184]$,
$\mathbf{d}\times(2\mathbf{c}-\mathbf{b}) = \mathbf{d}\times[13,-19,0] = [266,182,-184]$.
20. $(1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a} = 1/\sqrt{14}[3,1,-2]$,
$(1/|\mathbf{c}|)\mathbf{c} = 1/\sqrt{52}[4,-6,0]$.
21. $(\mathbf{d}\;\;4\mathbf{a}\;\;\mathbf{c}) = -1696$,
$(\mathbf{c}\;\;4\mathbf{d}\;\;\mathbf{a}) = -1696$.
22. $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = [0,0,0]$,
$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = [-46,106,-16]$.
23. $(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{c}\times\mathbf{d} - \mathbf{d}\times\mathbf{c}) = 30([-84,-56,58] - [84,56,-58]) = [-5040,-3360,3480]$.
24. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |[-2,8,-2]| = 6\sqrt{2}$, $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| = \sqrt{14}+\sqrt{74}$.
25. $|\mathbf{c}-\mathbf{d}| = |[-5,-7,-14]| = 3\sqrt{30}$, $||\mathbf{c}| - |\mathbf{d}|| = \sqrt{278} - 2\sqrt{13}$.
26. $\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = -\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{74}} = -\frac{4}{\sqrt{259}}$.
답. $\gamma = 104.3916°$.
27. $\cos\gamma = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|} = -\frac{62}{\sqrt{74}\cdot 2\sqrt{13}} = -\frac{31}{\sqrt{962}}$.
답. $\gamma = 178.1524°$.
28. $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = -\mathbf{q}-\mathbf{u} = [1,2,-7]$.
29. $\mathbf{d} = [2,8,0]$, $W = \mathbf{q}\cdot\mathbf{d} = -12$.
30. $\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{12}{2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$,
$p = |\mathbf{a}|\cos\gamma = 2\sqrt{2}$.
31. $\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$, $p_1 = |\mathbf{a}|\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$,
$p_2 = |\mathbf{b}|\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$, $p_1 = p_2$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$,
두 벡터의 크기가 같은 경우.
32. $\mathbf{r} = [-1,2,0]$, $\mathbf{p} = [3,8,0]$,
$\mathbf{m} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = [0,0,-14]$.
33. $\mathbf{m} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{m}| = |\mathbf{r}\times\mathbf{p}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}|\sin\gamma = 0$,
$|\mathbf{r}| = 0$, $|\mathbf{p}| = 0$, $\sin\gamma = 0$,
$|\mathbf{r}| = 0$, $|\mathbf{p}| = 0$, $\gamma = \pi/2, 3\pi/2$;
거리가 $\mathbf{0}$ 이거나 힘이 $\mathbf{0}$ 이거나 힘과 거리가 수직일 때.
34. $A(2,1,8)$, $B(3,2,9)$, $C(2,1,4)$, $D(3,3,10)$,
$\overrightarrow{DA} = \mathbf{a} = [-1,-2,-2]$,
$\overrightarrow{DB} = \mathbf{b} = [0,-1,-1]$,
$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} = [-1,-2,-6]$,
$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{a}\;\;\mathbf{b}\;\;\mathbf{c})| = \frac{2}{3}$.
35. $A(1,1,1)$, $B(5,0,-5)$, $C(3,2,0)$,
$\overrightarrow{BC} = \mathbf{a} = [-2,2,5]$,
$\overrightarrow{CA} = \mathbf{b} = [-2,-1,1]$,
$\overrightarrow{AB} = \mathbf{c} = [4,-1,-6]$,
$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{149}}[7,-8,6]$,
$\mathbf{r} = [x,y,z]$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = c$,
$c = \mathbf{n}\cdot[1,1,1] = 5/\sqrt{149}$,
$7x - 8y + 6z = 5$.

36. $\mathbf{r}(t) = [3\cos t, -2\sin t, \frac{1}{2}t]$,
$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = [-3\sin t, -2\cos t, \frac{1}{2}]$,
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = [-3\cos t, 2\sin t, 0]$,
$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 9\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1/4$,
$t = \pi/4$, $\mathbf{r}(\pi/4) = [3/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, \pi/8]$,
$\mathbf{v}(\pi/4) = [-3/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 1/2]$, $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{3}/2$,
$\mathbf{a}(\pi/4) = [-3/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}, 0]$.
37. $\nabla f = [y, x - z, -y]$, $\nabla f(2,0,7) = [0,-5,0]$.
38. $\nabla f^2 = 2f[y, x-z, -y]$
$= [2y^2(x-z), 2y(x-z)^2, -2y^2(x-z)]$,
$(\nabla f)\times(\nabla f) = \mathbf{0}$.
39. $\operatorname{div}\mathbf{v} = 1$, $\operatorname{div}\mathbf{w} = -2y$.
40. $\operatorname{curl}\mathbf{v} = [-2,-4,-2]$, $\operatorname{curl}\mathbf{w} = [2y, 6z, 4x]$.
41. $\operatorname{div}(\nabla f) = 0$.
42. $\operatorname{div}(\nabla(x^2 f)) = \operatorname{div}[3x^2y - 2xyz, x^3 - x^2z, -x^2y]$
$= 6xy - 2yz$.
43. $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{w}) = [0,-2,0]$.
44. $(\nabla f)\cdot\mathbf{v} = -4xy + 2y^2 + 2xz - yz - 2z^2$.
45. $D_{\mathbf{v}} f(2,3,1) = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}(2,3,1)\cdot\nabla f(2,3,1)$
$= \frac{1}{|[6,2,9]|}[6,2,9]\cdot[3,1,-3] = -\frac{7}{11}$.
46. $D_{\mathbf{w}} f(1,1,0) = \frac{1}{|\mathbf{w}(1,1,0)|}\mathbf{w}(1,1,0)\cdot\nabla f(1,1,0)$
$= \frac{1}{|[0,1,1]|}[0,1,1]\cdot[1,1,-1] = 0$.
47. $\operatorname{curl}(\nabla(f^2))$
$= \operatorname{curl}[2y^2(x-z), 2y(x-z)^2, -2y^2(x-z)] = \mathbf{0}$.
48. $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{v}) = 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{w}) = 0$.
49. $[(\operatorname{curl}\mathbf{v})\times\mathbf{w}]\cdot\mathbf{w}$
$= [4x^2 - 6y^2, 2y^2 - 6z^2, 2y^2 + 4z^2 - 4x^2]\cdot\mathbf{w}$
$= 12x^2z^2 - 18y^2z^2 - 12x^2z^2 + 4x^2y^2 + 6y^2z^2$
$-2y^4 + 2y^2 + 4y^2z^2 - 4x^2y^2 = 2y^2 - 2y^4 - 8y^2z^2$.
50. $[(\nabla f)\times\mathbf{v}]\cdot\mathbf{v}$
$= [4x^2 - z^2 - 3xz + 2yz, -2y^2 - 4xy - yz, 4yz - 2xy]\cdot\mathbf{v}$
$= 0$.

CHAPTER 9

Vector Integral Calculus Integral Theorems

In this chapter we shall define line integrals and surface integrals and consider some of their basic engineering applications in solid mechanics, fluid flow, and heat problems. We shall see that a line integral is a natural generalization of a definite integral, and a surface integral is a generalization of a double integral.

Line integrals can be transformed into double integrals (Sec. 9.4) or into surface integrals (Sec. 9.9), and conversely. Triple integrals can be transformed into surface integrals (Sec. 9.7), and vice versa. These transformations are of great practical importance. The corresponding formulas of Green, Gauss, and Stokes (Secs. 9.4, 9.7, 9.9) serve as powerful tools in many applications as well as in theoretical problems (for instance, in potential theory; see Sec. 9.8). We shall see that they also lead to a better understanding of the physical meaning of the divergence and the curl of a vector function.

Prerequisites for this chapter: elementary integral calculus and Chap. 8.
Sections that may be omitted in a shorter course: 9.3, 9.5, 9.8.
References: Appendix 1, Part B.
Answers to problems: Appendix 2.

9.1. Line Integrals

1. $\mathbf{r}(t) = [t, 4t]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [1, 4]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [16t^2, -t^2]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^1 (16t^2 - 4t^2)\, dt = 4.$
2. $\mathbf{r}(t) = [t, 4t^2]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [1, 8t]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [16t^4, -t^2]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^1 (16t^4 - 8t^3)\, dt = 6/5.$
3. $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t]$, $0 \le t \le \pi/2$, $\mathbf{r}' = [-2\sin t, 2\cos t]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [4\sin t\cos t, 16\sin^2 t\cos^2 t]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-8\sin^2 t\cos t + 32\sin^2 t\cos^3 t)\, dt = \int_0^1 [-8s^2 + 32s^2(1 - s^2)]\, ds = 8/5.$
4. $\mathbf{r}(t) = [2 - t, t]$, $0 \le t \le 2$, $\mathbf{r}' = [-1, 1]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [(2-t)t, (2-t)^2 t^2]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^2 [-(2-t)t + (2-t)^2 t^2]\, dt = \int_0^1 [-8s^2 + 32s^2(1 - s^2)]\, ds = -4/15.$
5. $\mathbf{r}(t) = [t, 1/t]$, $1 \le t \le 4$, $\mathbf{r}' = [1, -1/t^2]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [(t - 1/t)^2, (1/t - t)^2]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_1^4 (t - 1/t)^2 (1 - 1/t^2)\, dt = \int_1^4 (t^2 - 3 - 3/t^2 - 1/t^4)\, dt = 2671/192.$
6. $\mathbf{r}(t) = [t^2, t^3]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [2t, 3t^2]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [e^{t^2}, -e^{t^3}]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^1 (2te^{t^2} - 3t^2 e^{t^3})\, dt = 0.$
7. $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 2t]$, $0 \le t \le 2\pi$, $\mathbf{r}' = [-\sin t, \cos t, 2]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [4t, \cos t, -\sin t]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-4t\sin t + \cos^2 t - 2\sin t)\, dt = 9\pi.$
8. $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, t, 2\sin t]$, $0 \le t \le 2\pi$, $\mathbf{r}' = [-2\sin t, 1, 2\cos t]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [2\cos t - t, t - 2\sin t, 2\sin t - 2\cos t]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-4\sin t\cos t + 2t\sin t + t - 2\sin t + 4\sin t\cos t - 4\cos^2 t)\, dt = 2\pi^2 - 8\pi.$
9. $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [1, 2t, 1]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [e^t, e^{-t^2}, e^t]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^1 (e^t + 2te^{-t^2} + e^t)\, dt = 2e - e^{-1} - 1.$
10. $\mathbf{r}(t) = [t, t^2, t^3]$, $0 \le t \le 2$, $\mathbf{r}' = [1, 2t, 3t^2]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cosh t, \sinh t^2, e^{t^3}]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^2 (\cosh t + 2t\sinh t^2 + 3t^2 e^{t^3})\, dt = \sinh 2 + \cosh 4 + e^8 - 2.$
11. 주어진 함수 (피적분 함수) 를 공간이나 평면위의 곡선을 따라 적분하는 것이 선적분이다.
12. (a) $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t]$, $0 \le t \le \pi$, $\mathbf{r}' = [-\sin t, \cos t]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [-\cos^2 t, \cos t\sin t]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi} 2\cos^2 t\sin t\, dt = \frac{4}{3};$
$\mathbf{r}(p) = [\cos p, -\sin p]$, $-\pi \le p \le 0$, 역순, $\mathbf{r}' = [-\sin p, -\cos p]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(p)) = [-\cos^2 p, -\cos p\sin p]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{-\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(p)) \cdot \mathbf{r}'(p)\, dp = \int_0^{-\pi} 2\cos^2 p\sin p\, dp = \frac{4}{3};$
$\mathbf{r}(p) = [\cos p^2, \sin p^2]$, $0 \le p \le \sqrt{\pi}$, $\mathbf{r}' = [-2p\sin p^2, 2p\cos p^2]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(p)) = [-\cos^2 p^2, \cos p^2 \sin p^2]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\sqrt{\pi}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(p)) \cdot \mathbf{r}'(p)\, dp = \int_0^{\sqrt{\pi}} 4p\cos^2 p^2 \sin p^2\, dp = \frac{4}{3}.$
(b) $\mathbf{r}(t) = [t, t^n]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [1, nt^{n-1}]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [-t^2, t^{n+1}]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^1 (-t^2 + nt^{2n})\, dt = \frac{n-1}{3(2n+1)}.$
(c) $n \to \infty$ 이면, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \to \frac{1}{6};$
$\mathbf{r}(t) = [t, 0]$, $0 \le t < 1$, $\mathbf{r}' = [1, 0]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [-t^2, 0]$, $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^1 -t^2\, dt = -\frac{1}{3}.$
(d) $\mathbf{F} = [y, 0]$, $\mathbf{r}(t) = [t, t^n]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [1, nt^{n-1}]$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [t^n, 0]$,

$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_0^1 t^n\, dt = \dfrac{1}{n+1} \to 0,\ n \to \infty.$

13. $\mathbf{r}(t) = [t, 3t],\ 0 \le t \le 2,\ \mathbf{r}' = [1, 3],\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 10,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{10},\ f(\mathbf{r}(t)) = t^2 + 9t^2 = 10t^2,$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^2 f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^2 10\sqrt{10}t^2\, dt = 80\sqrt{10}/3.$

14. $\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t],\ 0 \le t \le \pi/2,$
$\mathbf{r}' = [-2\sin t, 2\cos t],\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 4,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = 2,\ f(\mathbf{r}(t)) = 16\cos^3 t \sin t,$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^{\pi/2} f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^{\pi/2} 32\cos^3 t \sin t\, dt = 8.$

15. $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 2t],\ 0 \le t \le 4\pi,$
$\mathbf{r}' = [-\sin t, \cos t, 2],\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 5,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{5},$
$f(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + 4t^2 = 1 + 4t^2,$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^{4\pi} f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^{4\pi} \sqrt{5}(1 + 4t^2)\, dt = \sqrt{5}(4\pi + 256\pi^3/3).$

16. $\mathbf{r}(t) = [t, t, t^2],\ 0 \le t \le 3,\ \mathbf{r}' = [1, 1, 2t],$
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 2 + 4t^2,\ ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{2 + 4t^2},$
$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{2 + t^2 + 3t^2} = \sqrt{2 + 4t^2},$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^3 f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^3 (2 + 4t^2)\, dt = 42.$

17. $\mathbf{r}(t) = [t, \cos t, \sin t],\ 0 \le t \le \pi,$
$\mathbf{r}' = [1, -\sin t, \cos t],\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 2,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{2},$
$f(\mathbf{r}(t)) = 1 + \cos^2 t + \sin^2 t = 2,$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^{\pi} 2\sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$

18. $\mathbf{r}(t) = [t, \cosh t],\ 0 \le t \le 2,\ \mathbf{r}' = [1, \sinh t],$
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \cosh t,\ f(\mathbf{r}(t)) = 1 - \sinh^2 t,$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^2 f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^2 (1 - \sinh^2 t)\cosh t\, dt = \sinh 2 - \dfrac{1}{3}\sinh^3 2.$

19. $\mathbf{r}(t) = [\cos^3 t, \sin^3 t],\ 0 \le t \le \pi,$
$\mathbf{r}' = [-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t],$
$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 9\sin^2 t \cos^2 t,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = 3\sin t \cos t,$
$f(\mathbf{r}(t)) = \cos^6 t + \sin t \cos t,$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^{\pi} (\cos^6 t + \sin t \cos t) 3\sin t \cos t\, dt = 3\pi/8.$

20. $\mathbf{r}(t) = [3\cos t, 2\sin t],\ 0 \le t \le \pi,$
$\mathbf{r}' = [-3\sin t, 2\cos t],\ \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = 9\sin^2 t + 4\cos^2 t,$
$ds/dt = \sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t},$
$f(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{144\cos^2 t + 324\sin^2 t}$
$= 6\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t},$
$\int_C f(\mathbf{r}) ds = \int_0^{\pi} f(\mathbf{r}(t))(ds/dt)\, dt$
$= \int_0^{\pi} 6(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)\, dt = 39\pi.$

9.2. Line Integrals Independent of Path

1. 경로에 무관 : 시작점과 끝점이 서로 동일한 경로들에 대해 각 선적분의 결과는 같다 (보존).
경로에 의존 : 시작점과 끝점이 서로 동일한 경로들에 대해 각 선적분의 결과가 다르다 (비보존, 감쇄).
판별 정리에 의해 경로에 의존하는지를 쉽게 결정.

2. $\mathbf{F} = [e^x \cos y, -e^x \sin y, 0],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = e^x \cos y \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(0,\pi,0)}^{(3,\pi/2,0)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = f(3, \pi/2, 0) - f(0, \pi, 0) = 1.$

3. $\mathbf{F} = [3z^2, 0, 6xz],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = 3xz^2 \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(-1,0,5)}^{(4,0,3)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = f(4, 0, 3) - f(-1, 0, 5) = 183.$

4. $\mathbf{F} = [\cos x \cos 2y, -2\sin x \sin 2y, 0],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = \sin x \cos 2y \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(\pi/2,-\pi,0)}^{(\pi/4,0,0)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(\pi/4, 0, 0) - f(\pi/2, -\pi, 0) = 1/\sqrt{2} - 1.$

5. $\mathbf{F} = [2x \sin \pi y, \pi x^2 \cos \pi y, 0],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = x^2 \sin \pi y \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(3,3/2,0)}^{(4,1/2,0)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(4, 1/2, 0) - f(3, 3/2, 0) = 25.$

6. $\mathbf{F} = [3y, 3x, 2z],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = 3xy + z^2 \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(0,0,0)}^{(4,1,2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(4, 1, 2) - f(0, 0, 0) = 16.$

7. $\mathbf{F} = e^{x-y+z^2}[1, -1, 2z],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = e^{x-y+z^2} \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(0,-1,1)}^{(2,4,0)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(2, 4, 0) - f(0, -1, 1) = e^{-2} - e^{2} = -2\sinh 2.$

8. $\mathbf{F} = [-z \sin xz, \cos y, -x \sin xz],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = \cos xz + \sin y \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$
$\int_{(\pi,\pi/2,2)}^{(0,\pi,1)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(0, \pi, 1) - f(\pi, \pi/2, 2) = 1.$

9. $\mathbf{F} = [yz \sinh xz, \cosh xz, xy \sinh xz],\ \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0},$
$f = y \cosh xz \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F},$

$\int_{(0,2,3)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(1,1,1) - f(0,2,3) = \cosh 1 - 2.$

10. (a) $\mathbf{F} = [x^2y, 2xy^2]$,
$\mathbf{r}(t) = [t, t^n],\ 0 \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [1, nt^{n-1}]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [t^{n+2}, 2T^{2n+1}]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_0^1 (t^{n+2} + 2nt^{3n})\, dt = \dfrac{2n^2 + 9n + 1}{(n+3)(3n+1)}.$
(b) $\mathbf{r}(t) = [t, bt],\ 0 \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [1, b]$;
$\mathbf{r}(t) = [1, (1-b)t - 1 + 2b],\ 1 \le t \le 2,\ \mathbf{r}' = [0, 1-b]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [bt^3, 2b^2t^3],\ 0 \le t \le 1$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [(1-b)(t-1) + b, 2((1-b)t - 1 + 2b)^2]$,
$1 \le t \le 2$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_0^1 (bt^3 + 2b^3t^3)\, dt$
$+ \int_1^2 2(1-b)((1-b)t - 1 + 2b)^2\, dt$
$= -\frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{4}b + \frac{2}{3},\ 0 \le b \le 1$,
이 함수는 $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 최대값 $\dfrac{1}{6\sqrt{2}} + \dfrac{2}{3}$ 를 가진다.
(c) $\mathbf{r}(t) = [t, \frac{1}{c}t],\ 0 \le t \le c,\ \mathbf{r}' = [1, \frac{1}{c}]$,
$\mathbf{r}(t) = [t, 1],\ c \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [1, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\frac{1}{c}t^3, \frac{2}{c^2}t^3],\ 0 \le t \le c$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [t^2, 2t],\ c \le t \le 1$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_0^c \left(\frac{1}{c} + \frac{2}{c^3}\right) t^3\, dt + \int_c^1 t^2\, dt$
$= -\frac{1}{12}c^3 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{3},\ 0 \le c \le 1$,
이 함수는 $c = 1$ 일 때 최대값 $\dfrac{3}{4}$ 을 가진다.

11. $\mathbf{F} = [2xy^2, 2x^2y, 1]$, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$,
적분이 경로에 무관,
$f = x^2y^2 + z \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F}$,
$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(a,b,c) - f(0,0,0) = a^2b^2 + c.$

12. $\mathbf{F} = [y, -zx, z]$, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = [x, 0, -z-1] \ne \mathbf{0}$,
적분이 경로에 의존,
$C : \mathbf{r}(t) = [at, bt, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [a, b, c]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [bt, -act^2, ct]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (abt - abct^2 + c^2t)\, dt = ab/2 - abc/3 + c^2/2$,
$\tilde{C} : \tilde{\mathbf{r}}(t) = [at, bt^2, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \tilde{\mathbf{r}}' = [a, 2bt, c]$,
$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) = [bt^2, -act^2, ct]$,
$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (abt^2 - 2abct^3 + c^2t)\, dt = ab/3 - abc/2 + c^2/2.$

13. $\mathbf{F} = \sinh xz[z, 0, -x]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 2\sinh xz + 2xz\cosh xz, 0] \ne \mathbf{0}$,
적분이 경로에 의존,
$C : \mathbf{r}(t) = [at, bt, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [a, b, c]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sinh act^2[ct, 0, -at]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt = 0$,
$\tilde{C} : \tilde{\mathbf{r}}(t) = [at^2, bt, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \tilde{\mathbf{r}}' = [2at, b, c]$,
$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) = \sinh act^3[ct, 0, -at^2]$,
$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 act^2 \sinh act^3\, dt = \frac{1}{3}(\cosh ac - 1).$

14. $\mathbf{F} = [yz, xz, xy]$, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$,
적분이 경로에 무관,
$f = xyz \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F}$,
$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(a,b,c) - f(0,0,0) = abc.$

15. $\mathbf{F} = [0, ye^{2z}, -ze^y]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{F} = [-ze^y - 2ye^{2z}, 0, 0] \ne \mathbf{0}$,
적분이 경로에 의존,
$C : \mathbf{r}(t) = [at, bt, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [a, b, c]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [0, bte^{2ct}, -cte^{bt}]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (b^2te^{2ct} - c^2te^{bt})\, dt$
$= b^2(2ce^{2c} - e^{2c} + 1)/(4c^2) - c^2(be^b - e^b + 1)/b^2$,
$\tilde{C} : \tilde{\mathbf{r}}(t) = [at, bt^2, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \tilde{\mathbf{r}}' = [a, 2bt, c]$,
$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) = [0, bt^2e^{2ct}, -cte^{bt^2}]$,
$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (2b^2t^3e^{2ct} - c^2te^{bt^2})\, dt$
$= b^2(4c^3e^{2c} - 6c^2e^{2c} + 6ce^{2c} - 3e^{2c} + 3)/(4c^4)$
$-c^2(e^b - 1)/(2b).$

16. $\mathbf{F} = [3(x+y)^2, 6(x+y)^2, 1]$,
$\operatorname{curl} \mathbf{F} = [0, 0, 6(x+y)] \ne \mathbf{0}$,
적분이 경로에 의존,
$C : \mathbf{r}(t) = [at, bt, ct],\ 0 \le t \le 1,\ \mathbf{r}' = [a, b, c]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [3(a+b)^2t^2, 6(a+b)^2t^2, 1]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 [3(a+b)^2(a+2b)t^2 + c]\, dt$
$= (a+b)^2(a+2b) + c$,
$\tilde{C} : \tilde{\mathbf{r}}(t) = [at, bt, ct^2],\ 0 \le t \le 1,\ \tilde{\mathbf{r}}' = [a, b, 2ct]$,
$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) = [3(a+b)^2t^2, 6(a+b)^2t^2, 1]$,
$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 [3(a+b)^2(a+2b)t^2 + 2ct]\, dt$
$= (a+b)^2(a+2b) + c^2.$

17. $\mathbf{F} = \cos(x + yz)[1, z, y]$, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 0$,
적분이 경로에 무관,
$f = \sin(x + yz) \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F}$,
$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(a,b,c) - f(0,0,0) = \sin(a + bc).$

18. $\mathbf{F} = [ye^{xy}, 2xe^{xy}, e^{2z}]$,
curl $\mathbf{F} = [0, 0, (1+xy)e^{xy}] \neq \mathbf{0}$,
적분이 경로에 의존,
$C : \mathbf{r}(t) = [at, bt, ct]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [a, b, c]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [bte^{abt^2}, 2ate^{abt^2}, e^{2ct}]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (3abte^{abt^2} + ce^{2ct})\, dt$
$= (3e^{ab} + e^{2c})/2 - 2$,
$\tilde{C} : \tilde{\mathbf{r}}(t) = [at, bt^2, ct]$, $0 \le t \le 1$, $\tilde{\mathbf{r}}' = [a, 2bt, c]$,
$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) = [bt^2e^{abt^3}, 2ate^{abt^3}, e^{2ct}]$,
$\int_{\tilde{C}} \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (5abt^2e^{abt^3} + ce^{2ct})\, dt$
$= 5e^{ab}/3 + e^{2c}/2 - 13/6$.

19. $\mathbf{F} = [e^z, 2y, xe^z]$, curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,
적분이 경로에 무관,
$f = xe^z + y^2 \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F}$,
$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(a, b, c) - f(0, 0, 0) = ae^c + b^2$.

20. $\mathbf{F} = [-2x, z\sinh y, \cosh y]$, curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,
적분이 경로에 무관,
$f = -x^2 + z\cosh y \Rightarrow \nabla f = \mathbf{F}$,
$\int_{(0,0,0)}^{(a,b,c)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(a, b, c) - f(0, 0, 0) = -a^2 + c\cosh b$.

9.3. From Calculus: Double Integrals.

1. $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2$, 직사각형,
$\int_0^2 \int_0^4 (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^2 (\frac{64}{3} + 4y^2)\, dy = \frac{160}{3}$.

2. $0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2$, 직사각형,
$\int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_0^4 (2x^2 + \frac{8}{3})\, dx = \frac{160}{3}$.

3. $0 \le y \le 3, -y \le x \le y$, 직각 삼각형,
$\int_0^3 \int_{-y}^y (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^3 (\frac{2}{3}y^3 + 2y^3)\, dy = 54$.

4. $-3 \le x \le 3, |x| \le y \le 3$, 직각 삼각형,
$\int_{-3}^3 \int_{|x|}^3 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$
$= \int_{-3}^0 \int_{-x}^3 (x^2+y^2)\, dy\, dx + \int_0^3 \int_x^3 (x^2+y^2)\, dy\, dx$
$= \int_{-3}^0 \left[(3+x)x^2 + 9 + \frac{x^3}{3}\right] dx$
$+ \int_0^3 \left[(3-x)x^2 + 9 - \frac{x^3}{3}\right] dx = 54$.

5. $0 \le y \le \pi/4, 0 \le x \le y$, 직각 삼각형,
$\int_0^{\pi/4} \int_0^y \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/4} \sin y\, dy = 1 - 1/\sqrt{2}$.

6. $0 \le x \le \pi/4, \sin x \le y \le \cos x$, 찌그러진 삼각형,
$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} xy\, dy\, dx$
$= \int_0^{\pi/4} \frac{x}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{2} \cos 2x\, dx$
$= \pi/16 - 1/8$.

7. $0 \le y \le 2, 0 \le x \le y$, 직각 삼각형,
$\int_0^2 \int_0^y \sinh(x+y)\, dx\, dy$
$= \int_0^2 (\cosh(2y) - \cosh y)\, dy = \frac{1}{2}\sinh 4 - \sinh 2$.

8. $0 \le x \le 2, 0 \le y \le x$, 직각 삼각형,
$\int_0^2 \int_0^x \sinh(x+y)\, dy\, dx$
$= \int_0^2 (\cosh(2x) - \cosh x)\, dx = \frac{1}{2}\sinh 4 - \sinh 2$.

9. $1 \le x \le 5, 0 \le y \le x^2$, 찌그러진 사변형,
$\int_1^5 \int_0^{x^2} (1+2x)e^{x+y}\, dy\, dx$
$= \int_1^5 (1+2x)(e^{x+x^2} - e^x)\, dx = e^{30} - 9e^5 - e^2 + e$.

10. $0 \le y \le \pi/4, 0 \le x \le \cos y$, 찌그러진 사변형,
$\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos y} x^2 \sin y\, dx\, dy$
$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\cos^3 y \sin y\, dy = 1/16$.

11. $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2$,
$V = \int_0^3 \int_0^2 (4x^2 + 9y^2)\, dy\, dx$
$= \int_0^3 (8x^2 + 24)\, dx = 144$.

12. $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2$,
$V = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x^2)\, dy\, dx$
$= \int_0^1 (1 - x^2)^2\, dx = 8/15$.

13. $0 \le x \le a, 0 \le y \le x$,
$V = \int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dy\, dx$
$= \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^3/3$.

14. $0 \le x \le b, 0 \le y \le hx/b$,
$M = \iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^b \int_0^{hx/b} dy\, dx$
$= \int_0^b hx/b\, dx = hb/2$,
$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_R xf(x, y)\, dx\, dy$
$= \frac{2}{hb} \int_0^b \int_0^{hx/b} x\, dy\, dx$
$= \int_0^b 2x^2/b^2\, dx = 2b/3$,
$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_R yf(x, y)\, dx\, dy$

$= \frac{2}{hb}\int_0^b\int_0^{hx/b} y\,dy\,dx$
$= \int_0^b hx^2/b^3\,dx = h/3.$

15. $0 \le x \le a, 0 \le y \le \sqrt{a^2-x^2},$
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$
$= \frac{1}{2}\left[a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right]_{x=0}^a = \pi a^2/4,$
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4a/(3\pi),$
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx$
$= \frac{2}{\pi a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = 4a/(3\pi).$

16. $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi/2,$
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^a\int_0^{\pi/2} r\,d\theta\,dr = \int_0^a r\pi/2\,dr = \pi a^2/4,$
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^2\cos\theta\,d\theta\,dr$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a r^2\,dr = 4a/(3\pi),$
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^2\sin\theta\,d\theta\,dr$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a r^2\,dr = 4a/(3\pi).$

17. $0 \le x \le b, 0 \le y \le hx/b,$
$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^b\int_0^{hx/b} y^2\,dy\,dx$
$= \int_0^b h^3x^3/(3b^3)\,dx = bh^3/12,$
$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^b\int_0^{hx/b} x^2\,dy\,dx$
$= \int_0^b hx^3/b\,dx = hb^3/4,$
$I_0 = I_x + I_y = hb(h^2+3b^2)/12.$

18. $0 \le x \le b,\ 0 \le y \le h - 2h|x-b/2|/b,$
$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^b\int_0^{h-2h|x-b/2|/b} y^2\,dy\,dx$
$= \int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{2hx}{b}} y^2\,dy\,dx + \int_{\frac{b}{2}}^b\int_0^{\frac{2h-2hx}{b}} y^2\,dy\,dx$
$= \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{8h^3x^3}{3b^3}\,dx + \int_{\frac{b}{2}}^b \frac{8}{3}h^3(1-x/b)^3\,dx$
$= bh^3/12,$
$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^b\int_0^{h-\frac{2h|x-b/2|}{b}} x^2\,dy\,dx$
$= \int_0^{\frac{b}{2}}\int_0^{\frac{2hx}{b}} x^2\,dy\,dx + \int_{\frac{b}{2}}^b\int_0^{2h-\frac{2hx}{b}} x^2\,dy\,dx$
$= \int_0^{b/2} 2hx^3/b\,dx + \int_{b/2}^b 2hx^2(1-x/b)\,dx$
$= 7hb^3/48,$
$I_0 = I_x + I_y = hb(4h^2+7b^2)/48.$

19. $-h/2 \le y \le h/2,\ \frac{a-b}{2h}y - \frac{a+b}{4} \le x \le \frac{b-a}{2h}y + \frac{a+b}{4},$
$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_{-h/2}^{h/2}\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a+b}{4}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a+b}{4}} y^2\,dx\,dy$
$= \int_{-h/2}^{h/2} y^2[(b-a)y/h + (a+b)/2]\,dy$
$= (a+b)h^3/24,$
$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_{-h/2}^{h/2}\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a+b}{4}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a+b}{4}} x^2\,dx\,dy$
$= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2h}y + \frac{a+b}{4}\right)^3 dy$
$= h(a+b)(a^2+b^2)/48,$
$I_0 = I_x + I_y = h(a+b)(2h^2+a^2+b^2)/48.$

20. $0 \le y \le h,\ \frac{a-b}{2h}y - \frac{a}{2} \le x \le \frac{b-a}{2h}y + \frac{a}{2},$
$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^h\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a}{2}} y^2\,dx\,dy$
$= \int_0^h y^2[(b-a)y/h + a]\,dy$
$= (a+3b)h^3/12,$
$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_0^h\int_{\frac{a-b}{2h}y-\frac{a}{2}}^{\frac{b-a}{2h}y+\frac{a}{2}} x^2\,dx\,dy$
$= \int_0^h \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2h}y + \frac{a+b}{4}\right)^3 dy$
$= h(a+b)(a^2+b^2)/48,$
$I_0 = I_x + I_y$
$= h(4ah^2 + 12bh^2 + a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)/48.$

9.4. Green's Theorem in the Plane

1. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = y^2e^x - x^2e^y$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_0^2\int_0^3 (y^2e^x - x^2e^y)\,dy\,dx$
$= \int_0^2 [9e^x - (e^3-1)x^2]\,dx$
$= 9e^2 - 8e^3 - 19/3$.
2. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = 1 - 6y$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (1-6y)\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^1 2\,dx = 4$.
3. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = -1 - 1 = -2$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-\sqrt{1/4-x^2}}^{\sqrt{1/4-x^2}} -2\,dy\,dx$
$= \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} -2r\,d\theta\,dr = \int_0^{1/2} -4\pi r\,dr = -\pi/2$.
4. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = 6xy^2 - 6xy^2 = 0$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy = 0$.
5. $\mathbf{F} = [\cos x\cos y, -\sin x\sin y]$,
$\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = -\cos x\sin y + \cos x\sin y = 0$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy = 0$.
6. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = -\sin x - \cos y$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_0^\pi\int_0^{x/\pi} (-\sin x - \cos y)\,dy\,dx$
$= \int_0^\pi (-\frac{1}{\pi}x\sin x - \sin\frac{x}{\pi})\,dx$
$= -1 - \pi + \pi\cos 1$.
7. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = 5x^4y$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_{-5}^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}} 5x^4y\,dy\,dx$
$= \int_0^5\int_0^\pi 5r^6\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta\,dr$
$= \int_0^5 2r^6\,dr = 156250/7$.
8. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = -\cosh x - \sinh y$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_1^3\int_x^{3x} (-\cosh x - \sinh y)\,dy\,dx$
$= \int_1^3 (-2x\cosh x - \cosh 3x + \cosh x)\,dx$
$= 2(\cosh 3 - \cosh 1) + \sinh 1 - (14\sinh 3 + \sinh 9)/3$.
9. $\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y = e^y/x + 2 - e^y/x = 2$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_{-1}^1\int_{1+x^4}^2 2\,dy\,dx = \int_{-1}^1 2(1-x^4)\,dx = 16/5$.
10. $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 4x\sinh 2y - 2x\sinh 2y = 2x\sinh 2y$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dx\,dy$
$= \int_0^1\int_{x^2}^x 2x\sinh 2y\,dy\,dx$
$= \int_0^1 x(\cosh x^2 - \cosh x)\,dx = (1 - e^{-2})/4$.
11. $r = a(1-\cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$,
$A = \frac{1}{2}\oint_C r^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)^2\,d\theta$
$= (3\pi/8 - 1)a^2$.
12. $\mathbf{r}(t) = a[t - \sin t, 1 - \cos t]$, $0 \le t \le 2\pi$,
$\mathbf{r}'(t) = a[1 - \cos t, \sin t]$,
$A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (xy' - yx')\,dt$
$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} [(t - \sin t)\sin t - (1-\cos t)^2]\,dt = 3\pi a^2$.
13. $r = 1 + 2\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$,
$A = \frac{1}{2}\oint_C r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{3\pi}{4} + 2$.
14. $\nabla w = [e^x, e^y]$, $\nabla^2 w = e^x + e^y$,
$\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy$
$= \int_0^2\int_0^1 (e^x + e^y)\,dy\,dx = \int_0^2 (e^x + e - 1)\,dx$
$= e^2 + 2e - 3$.
15. $\nabla w = [\sinh x, 0]$, $\nabla^2 w = \cosh x$,
$\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy$
$= \int_0^2\int_0^{2y} \cosh x\,dx\,dy = \int_0^2 \sinh 2y\,dy$
$= (\cosh 4 - 1)/2$.
16. $\nabla w = [e^x\sin y, e^x\cos y]$,
$\nabla^2 w = e^x\sin y - e^x\sin y = 0$,
$\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy = 0$.
17. $\nabla w = [6xy, 3x^2 - 3y^2 + 2y]$, $\nabla^2 w = 6y - 6y + 2 = 2$,
$\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_{-5\sqrt{1-x^2}}^{5\sqrt{1-x^2}} 2\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^1 20\sqrt{1-x^2}\,dx = 10\pi$.
18. $\nabla w = [5x^4y + y^5, x^5 + 5xy^4]$, $\nabla^2 w = 20x^3y + 20xy^3$,
$\oint_C \frac{\partial w}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 w\,dx\,dy$
$= \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 20xy(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

$= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} 20r^5 \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, dr$

$= \int_0^1 10r^5 \, dr = 5/3.$

19. $\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-w\frac{\partial w}{\partial y}\right)$

$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + w\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$

$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$

$\iint_R \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$

$= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-w\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$

$= \oint_C \left(-w\frac{\partial w}{\partial y}\, dx + w\frac{\partial w}{\partial x}\, dy\right)$

$= \oint_C w\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) ds$

$= \oint_C w\nabla w \cdot \mathbf{n}\, ds$

$= \oint_C w\frac{\partial w}{\partial n}\, ds.$

20. $\tilde{\mathbf{F}} = [-F_2, F_1]$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y},$

$\iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y}\right) dx\, dy$

$= \oint_C \left(\tilde{F}_1\, dx + \tilde{F}_2\, dy\right) = \oint_C (-F_2\, dx + F_1\, dy)$

$= \oint_C \left(-F_2\frac{dx}{ds} + F_1\frac{dy}{ds}\right) ds = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds;$

$\iint_R \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dx\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$

$= \oint_C (F_1\, dx + F_2\, dy) = \oint_C \left(F_1\frac{dx}{ds} + F_2\frac{dy}{ds}\right) ds$

$= \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'\, ds;$

$\mathbf{F} = [7x, -3y]$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 4$, $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = 0,$

$\mathbf{r}(s) = [2\cos\frac{s}{2}, 2\sin\frac{s}{2}],$

$\mathbf{r}'(s) = [-\sin\frac{s}{2}, \cos\frac{s}{2}],$

$\mathbf{n}(s) = [\cos\frac{s}{2}, \sin\frac{s}{2}],$

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 14\cos^2\frac{s}{2} - 6\sin^2\frac{s}{2} = 10\cos s + 4,$

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}' = -20\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s}{2} = -10\sin s,$

$\iint_R \operatorname{div}\mathbf{F}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\, dr\, d\theta = 16\pi,$

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \int_0^{4\pi} (10\cos s + 4)\, ds = 16\pi,$

$\iint_R \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\, dx\, dy = 0,$

$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'\, ds = \int_0^{4\pi} -10\sin s\, ds = 0.$

9.5. Surfaces for Surface Integrals

1. $x = u, y = v$ 평면,
   $u = c_1 : x = c_1$, 수직선, $v = c_2 : y = c_2$, 수평선,
   $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$.
2. $x = u\cos v, y = u\sin v$, $x^2 + y^2 = u^2$, 원판,
   $u = c_1 : x^2 + y^2 = c_1^2$, 원,
   $v = c_2 : y = x\tan c_2$, 직선,
   $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, u]$.
3. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = cu$,
   $x^2 + y^2 = z^2/c^2$, 원뿔,
   $u = c_1 : x^2 + y^2 = c_1^2/c^2, z = cc_1$, 원,
   $v = c_2 : \frac{x}{\cos c_2} = \frac{y}{\sin c_2} = \frac{z}{c}$, 직선,
   $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, c]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-cu\cos v, -cu\sin v, u]$.
4. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$,
   $x^2 + y^2 = z$, paraboloid of revolution,
   $u = c_1 : x^2 + y^2 = c_1^2, z = c_1^2$, 원,
   $v = c_2 : y = x\tan c_2, z = x^2\sec^2 c_2$, 포물선,
   $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2u]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u]$.
5. $x = au\cos v, y = bu\sin v, z = u^2$,
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$, elliptic paraboloid,
   $u = c_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c_1^2, z = c_1^2$, 타원,
   $v = c_2 : y = \frac{b}{a}x\tan c_2, z = \frac{1}{a^2}x^2\sec^2 c_2$, 포물선,
   $\mathbf{r}_u = [a\cos v, b\sin v, 2u]$,
   $\mathbf{r}_v = [-au\sin v, bu\cos v, 0]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2bu^2\cos v, -2au^2\sin v, abu]$.
6. $x = a\cos v\cos u, y = b\cos v\sin u, z = c\sin v$,
   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ellipsoid,
   $u = c_1 : y = \frac{b}{a}x\tan c_1, \frac{x^2}{a^2\cos^2 c_1} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 타원,
   $v = c_2 : z = c\sin c_2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 c_2$, 타원,
   $\mathbf{r}_u = [-a\cos v\sin u, b\cos v\cos u, 0]$,
   $\mathbf{r}_v = [-a\sin v\cos u, -b\sin v\sin u, c\cos v]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$
   $= [bc\cos^2 v\cos u, ac\cos^2 v\sin u, ab\sin v\cos v]$.
7. $x = au\cosh v, y = bu\sinh v, z = u^2$,
   $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, hyperbolic paraboloid,
   $u = c_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c_1^2, z = c_1^2$, 쌍곡선,
   $v = c_2 : y = \frac{b}{a}x\tanh c_2, z = \frac{1}{a^2}x^2\mathrm{sech}^2 c_2$, 포물선,
   $\mathbf{r}_u = [a\cosh v, b\sinh v, 2u]$,
   $\mathbf{r}_v = [au\sinh v, bu\cosh v, 0]$,
   $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2bu^2\cosh v, 2au^2\sinh v, abu]$.
8. $x = a\sinh u\cos v, y = b\sinh u\sin v, z = c\cosh u$,
   $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, hyperboloid,

$u = c_1 : z = c\cosh c_1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \sinh^2 c_1$, 타원,
$v = c_2 : y = \dfrac{b}{a}x\tan c_2,\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2\cos^2 c_2} = 1$, 쌍곡선,
$\mathbf{r}_u = [a\cosh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\sinh v]$,
$\mathbf{r}_v = [-a\sinh u\sin v, b\sinh u\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$
$= [-bc\sinh^2 u\cos v, -ac\sinh^2 u\sin v,$
$ab\sinh u\cosh u]$.

9. $x = a\cos v, y = b\sin v, z = u$,
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 타원 기둥,
$u = c_1 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, z = c_1$, 타원,
$v = c_2 : x = a\cos c_2, y = b\sin c_2$, 직선,
$\mathbf{r}_u = [0,0,1]$, $\mathbf{r}_v = [-a\sin v, b\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-b\cos v, -a\sin v, 0]$.
10. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v$,
$x^2 + y^2 = u^2, z = \arctan\dfrac{y}{x}$, helicoid,
$u = c_1 : x^2 + y^2 = c_1^2, z = \arctan\dfrac{y}{x}$, helix,
$v = c_2 : y = \dfrac{b}{a}x\tan c_2, z = c_2$, 직선,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [\sin v, -\cos v, u]$.
11. drawn!
12. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, u]$,
$\mathbf{r}_u = [1,0,1]$, $\mathbf{r}_v = [0,1,0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-1,0,1]$.
13. $\mathbf{r}(u,v) = [8u, 6v, 4 - 4u - 4v]$,
$\mathbf{r}_u = [8,0,-4]$, $\mathbf{r}_v = [0,6,-4]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [24,32,48]$.
14. $\mathbf{r}(u,v) = [2\cos v, 3\sin v, u]$,
$\mathbf{r}_u = [0,0,1]$, $\mathbf{r}_v = [-2\sin v, 3\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-3\cos v, -2\sin v, 0]$.
15. $\mathbf{r}(u,v) = [\cos v\cos u, \cos v\sin u, 2\sin v]$,
$\mathbf{r}_u = [-\cos v\sin u, \cos v\cos u, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, 2\cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$
$= [2\cos^2 v\cos u, 2\cos^2 v\sin u, \sin v\cos v]$.
16. $\mathbf{r}(u,v) = [2\cos v\cos u, 2\cos v\sin u + 1, 2\sin v - 2]$,
$\mathbf{r}_u = [-2\cos v\sin u, 2\cos v\cos u, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-2\sin v\cos u, -2\sin v\sin u, 2\cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$
$= [4\cos^2 v\cos u, 4\cos^2 v\sin u, 4\sin v\cos v]$.
17. $\mathbf{r}(u,v) = [\cosh v, \sinh v, u]$,
$\mathbf{r}_u = [0,0,1]$, $\mathbf{r}_v = [\sinh v, \cosh v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-\cosh v, \sinh v, 0]$.
18. $\mathbf{r}(u,v) = [2u\cos v, u\sin v, 2u]$,
$\mathbf{r}_u = [2\cos v, \sin v, 2]$, $\mathbf{r}_v = [-2u\sin v, u\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2u\cos v, -4u\sin v, 2u]$.
19. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 9u^2]$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 18u]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-18u^2\cos v, -18u^2\sin v, u]$.
20. 문제 2: 원점 (매개 표현 선택);
문제 3: 원점 (원뿔의 꼭지점);
문제 4: 원점 (매개 표현 선택);
문제 5: 원점 (매개 표현 선택).
21. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 9u^2]$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 18u]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-18u^2\cos v, -18u^2\sin v, u]$. 다시!
22. $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$가 두 좌표 곡선 u =const. 와 v =const. 에 평행하므로 두 곡선이 직교할 필요 충분 조건은 $\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = 0$이다.
23. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, f(u,v)]$,
$\mathbf{r}_u = [1, 0, f_u]$,
$\mathbf{r}_v = [0, 1, f_v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-f_u, -f_v, 1]$.
24. $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2 - 36$,
$\nabla g = [8x, 2y, 18z]$,
$|\nabla g| = 2(16x^2 + y^2 + 81z^2)^{1/2}$,
$\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\nabla g|}\nabla g$
$= (16x^2 + y^2 + 81z^2)^{-1/2}[4x, y, 9z]$.
25. $g(x,y,z) = 4x - 4y + 7z + 3$,
$\nabla g = [4, -4, 7]$, $|\nabla g| = 9$,
$\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\nabla g|}\nabla g = [4, -4, 7]/9$.
26. $g(x,y,z) = 5xy - z$,
$\nabla g = [5y, 5x, -1]$,
$|\nabla g| = (25x^2 + 25y^2 + 1)^{1/2}$,
$\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\nabla g|}\nabla g$
$= (25x^2 + 25y^2 + 1)^{-1/2}[5y, 5x, -1]$.
27. $g(x,y,z) = y^2 + z^2 - a^2$,
$\nabla g = [0, 2y, 2z]$,
$|\nabla g| = 2(y^2 + z^2)^{1/2}$,
$\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\nabla g|}\nabla g$
$= (y^2 + z^2)^{-1/2}[0, y, z]$.
28. $g(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1$,
$\nabla g = [2x, -2y, 2z]$,
$|\nabla g| = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$,
$\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\nabla g|}\nabla g$
$= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}[x, -y, z]$.
29. $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 36$,
$\nabla g = [2x, 2y, 2z]$,
$|\nabla g| = 2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$,
$\mathbf{n} = \dfrac{1}{|\nabla g|}\nabla g$
$= (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}[x, y, z]$.
30. (a) $\mathbf{N}(P) = \mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)$ 는 접평면에 수직,
$\mathbf{r}^*$: 접평면 위의 한 점,
$\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)$: 접평면 위의 벡터,
$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \mathbf{N}(P) = 0$,
$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot (\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)) = 0$,
$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P) \quad \mathbf{r}_u(P) \quad \mathbf{r}_v(P)) = 0$;
이제 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(P) + p\mathbf{r}_u(P) + q\mathbf{r}_v(P)$ 이면,
$(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{r}(P) \quad \mathbf{r}_u(P) \quad \mathbf{r}_v(P))$
$= (p\mathbf{r}_u(P) + q\mathbf{r}_v(P) \quad \mathbf{r}_u(P) \quad \mathbf{r}_v(P))$
$= p(\mathbf{r}_u(P) \quad \mathbf{r}_u(P) \quad \mathbf{r}_v(P))$
$+ q(\mathbf{r}_v(P) \quad \mathbf{r}_u(P) \quad \mathbf{r}_v(P)) = 0$ 이므로,
$\mathbf{r}^* = \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(P) + p\mathbf{r}_u(P) + q\mathbf{r}_v(P)$ 이다.
(b) $\mathbf{n}(P) = \dfrac{\nabla g(P)}{|\nabla g(P)|}$, $(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \mathbf{n}(P) = 0$,
$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \nabla g(P) = 0$.

(c) $g(x,y,z) = z - f(x,y) = 0,$
$\nabla g(P) = [-f_x(P), -f_y(P), 1],$
$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}(P)) \cdot \nabla g(P) = 0,$
$-(x^* - x(P))f_x(P) - (y^* - y(P))f_y(P) + (z^* - z(P)) = 0,$
$z^* - z(P) = (x^* - x(P))f_x(P) + (y^* - y(P))f_y(P).$

9.6. Surface Integrals

1. $\mathbf{r}_u = [1, 0, 2]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, 3]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2, -3, 1]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [3u^2, v^2, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = -6u^2 - 3v^2$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^2 \int_{-1}^1 (-6u^2 - 3v^2)\, dv\, du$
$= \int_0^2 (-12u^2 - 2)\, du = -36.$

2. $\mathbf{r} = [u, v, 1 - u - v]$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1 - u$,
$\mathbf{r}_u = [1, 0, -1]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, -1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [1, 1, 1]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u^2, e^v, 1]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = u^2 + e^v + 1$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^1 \int_0^{1-u} (u^2 + e^v + 1)\, dv\, du$
$= \int_0^1 [(1-u)(1+u^2) + e^{1-u} - 1]\, du = e - 17/12.$

3. $\mathbf{r}_u = [1, 0, 2]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, 3]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2, -3, 1]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [3u^2, v^2, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = -6u^2 - 3v^2$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^2 \int_{-1}^1 (-6u^2 - 3v^2)\, dv\, du$
$= \int_0^2 (-12u^2 - 2)\, du = -36.$

4. $\mathbf{r}_u = [1, 0, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0, -\sin v, \cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, -\cos v, -\sin v]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\sinh(\cos v \sin v), 0, \cos^4 v]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = -\cos^4 v \sin v$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_{-4}^4 \int_0^\pi -\cos^4 v \sin v\, dv\, du$
$= \int_{-4}^4 -\frac{2}{5}\, du = -16/5.$

5. $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 1]$, $\mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-u \cos v, u \sin v, u]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u \cos v - u, u \sin v - u \cos v, u - u \sin v]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = u^2(2\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos v - \sin v)$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}\, dv\, du = \int_0^3 2\pi\, du = 6\pi.$

6. $\mathbf{r} = [\cos u, \frac{1}{2}\sin u, v]$, $0 \le u \le \pi/2$, $0 \le v \le h$,
$\mathbf{r}_u = [-\sin u, \frac{1}{2}\cos u, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [\frac{1}{2}\cos u, \sin u, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\frac{1}{8}\sin^3 u, \cos^3 u, v^3]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{16}\sin^3 u \cos u + \cos^3 u \sin u$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^h \int_0^{\pi/2} (\frac{1}{16}\sin^3 u \cos u + \cos^3 u \sin u)\, du\, dv$
$= \int_0^h 17/64\, dv = 17h/64.$

7. $\mathbf{r} = [\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v]$,
$0 \le u \le \pi/2$, $0 \le v \le \pi/2$,
$\mathbf{r}_u = [-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [\cos^2 v \cos u, \cos^2 v \sin u, \sin v \cos v]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, \cos v \cos u, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = \cos^3 v \sin u \cos u$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos^3 v \sin u \cos u\, dv\, du$
$= \int_0^1 \frac{2}{3} \sin u \cos u\, du = 1/3.$

8. $\mathbf{r}_u = [\sinh u, \cosh u, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [\cosh u, -\sinh u, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [4\cosh u \sinh u, 2\cosh^2 u, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = 2\cosh^2 u \sinh u$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_{-3}^3 \int_0^2 2\cosh^2 u \sinh u\, du\, dv$
$= \int_{-3}^3 \frac{2}{3}(\cosh^3 2 - 1)\, dv = 4\cosh^3 2 - 4.$

9. $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2u]$, $\mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u^2]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u \cos v, u \sin v, u^2]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = -u^3$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_{-\pi}^\pi \int_0^4 -u^3\, du\, dv = \int_{-\pi}^\pi -64\, dv = -128\pi.$

10. $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0]$, $\mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 3]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [3\sin v, -3\cos v, u]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u^2 \cos^2 v, u^2 \sin^2 v, 9v^2]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = 3u^2 \sin v \cos v(\cos v - \sin v) + 9uv^2$,
$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)] \cdot \mathbf{N}(u,v)\, du\, dv$
$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}\, dv\, du = \int_0^1 24\pi^3 u\, du = 12\pi^3.$

11. $S_1 : \mathbf{r} = [a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v]$,
$\mathbf{r}_u = [-a \cos v \sin u, a \cos v \cos u, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-a \sin v \cos u, -a \sin v \sin u, a \cos v]$,

$\mathbf{N} = [a^2 \cos^2 v \cos u, a^2 \cos^2 v \sin u, a^2 \cos v \sin v]$,
$S_2 : \mathbf{r} = [a \cos v \cos u, b \cos v \sin u, c \sin v]$,
$\mathbf{r}_u = [-a \cos v \sin u, b \cos v \cos u, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-a \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, c \cos v]$,
$\mathbf{N} = [bc \cos^2 v \cos u, ac \cos^2 v \sin u, ab \cos v \sin v]$,
$S_3 : \mathbf{r} = [u \cos v, u \sin v, v]$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 1]$,
$\mathbf{N} = [\sin v, -\cos v, u]$.

12. $z = f(x,y) = 1 - x - y$,
$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x$,
$f_x = -1, f_y = -1$,
$|\mathbf{N}| = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} = \sqrt{3}$,
$\iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_{R^*} G(x,y,f(x,y))|\mathbf{N}(x,y)|\, dx\, dy$
$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{3}(\cos x + \sin y)\, dy\, dx$
$= \int_0^1 \sqrt{3}[(1-x)\cos x + 1 - \cos(1-x)]\, dx$
$= \sqrt{3}(2 - \cos 1 - \sin 1)$.

13. $z = f(x,y) = 3x + 4y$,
$1 \le x < \infty,\ 1 \le y < \infty$,
$f_x = 3, f_y = 4$,
$|\mathbf{N}| = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} = 5$,
$\iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_{R^*} G(x,y,f(x,y))|\mathbf{N}(x,y)|\, dx\, dy$
$= \int_1^\infty \int_1^\infty 5ye^{-xy}\, dx\, dy = \int_1^\infty 5e^{-y}\, dy = 5e^{-1}$.

14. $\mathbf{r}_u = [-5 \sin u, 5 \cos u, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [5 \cos u, 5 \sin u, 0]$, $|\mathbf{N}| = 5$,
$G(\mathbf{r}) = 625(\cos^4 u + \sin^4 u)$,
$\iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_R G(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{N}(u,v)|\, du\, dv$
$= \int_{-0.2}^{0.2} \int_0^\pi 3125(\cos^4 u + \sin^4 u)\, du\, dv$
$= \int_{-0.2}^{0.2} 9375\pi/4\, dy = 937.5\pi$.

15. $\mathbf{r}_u = [1, 0, 3u^2]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-3u^2, 0, 1]$, $|\mathbf{N}| = (1 + 9u^4)^{1/2}$,
$G(\mathbf{r}) = (1 + 9u^4)^{3/2}$,
$\iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_R G(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{N}(u,v)|\, du\, dv$
$= \int_{-2}^{2} \int_0^1 (1 + 9u^4)^2\, du\, dv = \int_{-2}^{2} 68/5\, dy$
$= 272/5$.

16. $\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 2]$, $\mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2u \cos v, -2u \sin v, u]$,
$|\mathbf{N}| = \sqrt{5}|u|$,
$G(\mathbf{r}) = u^4 - 4u^2$,
$\iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_R G(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{N}(u,v)|\, du\, dv$
$= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \sqrt{5}(u^5 - 4u^3)\, du\, dv$
$= \int_{-\pi}^{\pi} -5\sqrt{5}/6\, dy = -5\sqrt{5}\pi/3$.

17. $z = f(x,y) = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$,
$-3 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \sqrt{9 - x^2}$,
$f_x = -x(9 - x^2 - y^2)^{-1/2}$,
$f_y = -y(9 - x^2 - y^2)^{-1/2}$,
$|\mathbf{N}| = (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} = 3(9 - x^2 - y^2)^{-1/2}$,
$\iint_S G(\mathbf{r})\, dA = \iint_{R^*} G(x,y,f(x,y))|\mathbf{N}(x,y)|\, dx\, dy$
$= \int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 3\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^\pi 3r\, d\theta\, dr$
$= \int_0^3 3\pi r\, dr = 27\pi/2$.

18. 원점을 중심으로 하는 원판이 밀도가 균일하면 무게 중심은 원점이다.
$S : x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$,
$M = \iint_S \sigma\, dA = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^a r\, dr\, d\theta$
$= \sigma \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\, d\theta = \pi a^2 \sigma$,
$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S \sigma x\, dA$
$= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta = 0$,
$\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S \sigma x\, dA$
$= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta = 0$.

19. 직선 $y = 0$, $z = 0$ 위의 한 점 $P : [t, 0, 0]$,
곡면 위의 임의의 한 점 $Q : [x, y, z]$,
두점 사이의 길이 $l = \sqrt{(t-x)^2 + y^2 + z^2}$,
$l^2 = t^2 - 2xt + x^2 + y^2 + z^2$,
$t = x$ 일때 l^2 의 최소값은 $D^2 = y^2 + z^2$,
$I_x = \iint_S \sigma D^2\, dA = \iint_S (y^2 + z^2)\, \sigma\, dA$;
직선 $x = 0$, $z = 0$ 위의 한 점 $P : [0, t, 0]$,
곡면 위의 임의의 한 점 $Q : [x, y, z]$,
두점 사이의 길이 $l = \sqrt{x^2 + (t-y)^2 + z^2}$,
$l^2 = t^2 - 2yt + x^2 + y^2 + z^2$,
$t = y$ 일때 l^2 의 최소값은 $D^2 = x^2 + z^2$,
$I_y = \iint_S \sigma D^2\, dA = \iint_S (x^2 + z^2)\, \sigma\, dA$;
직선 $x = 0$, $y = 0$ 위의 한 점 $P : [0, 0, t]$,
곡면 위의 임의의 한 점 $Q : [x, y, z]$,
두점 사이의 길이 $l = \sqrt{x^2 + y^2 + (t-z)^2}$,
$l^2 = t^2 - 2zt + x^2 + y^2 + z^2$,
$t = z$ 일때 l^2 의 최소값은 $D^2 = x^2 + y^2$,
$I_z = \iint_S \sigma D^2\, dA = \iint_S (x^2 + y^2)\, \sigma\, dA$;

20. 직선 $y = x$, $z = 0$ 위의 한 점 $P : [t, t, 0]$,
곡면 위의 임의의 한 점 $Q : [x, y, z]$,
두점 사이의 길이 $l = \sqrt{(t-x)^2 + (t-y)^2 + z^2}$,
$l^2 = 2t^2 - 2(x+y)t + x^2 + y^2 + z^2$,
$t = \frac{x+y}{2}$ 일때 l^2 의 최소값은 $D^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2 + z^2$,
$I_A = \iint_S \sigma D^2\, dA = \iint_S \left[\frac{1}{2}(x-y)^2 + z^2\right] \sigma\, dA$.

21. $I_A = I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\sigma\, dA = \iint_S dA$
$= \int_0^{2\pi} \int_0^h dz\, d\theta = 2\pi h$.

22. 직선 $z = \frac{h}{2}$, $y = 0$ 위의 한 점 $P : [t, 0, \frac{h}{2}]$,
곡면 위의 임의의 한 점 $Q : [x, y, z]$,
두점 사이의 길이 $l = \sqrt{(t-x)^2 + y^2 + (z - \frac{h}{2})^2}$,
$l^2 = t^2 - 2xt + x^2 + y^2 + (z - \frac{h}{2})^2$,

$t = x$ 일때 l^2 의 최소값은 $D^2 = y^2 + (z - \frac{h}{2})^2$,

$$I_A = \iint_S \sigma D^2\, dA = \iint_S \left[y^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2\right] \sigma\, dA$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\sin^2\theta + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2\right] dz\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(h \sin^2\theta + \frac{h^3}{12}\right) dz\, d\theta = \frac{\pi h}{6}(6 + h^2).$$

23. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$R^* : x^2 + y^2 \le h^2$,

$$I_A = I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\sigma\, dA$$
$$= \iint_{R^*} (x^2+y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$
$$= \iint_{R^*} \sqrt{2}(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{2} r^3\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}h^4}{4}\, d\theta = \frac{\pi h^4}{\sqrt{2}}.$$

24. 무게 중심을 원점 (즉 $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$) 으로, 이 무게 중심을 지나는 직선 A 를 z 축이 되도록 좌표계를 놓자. 그러면 직선 B 는 직선 $x = k$, $y = 0$ 으로 둘 수 있다. 곡면 위의 임의의 한 점 $Q[x, y, z]$ 에 대해 직선 A 위의 점 $P[0, 0, t]$ 와 직선 B 위의 점 $\tilde{P}[k, 0, \tilde{t}]$ 사이의 거리는 각각 $l = \overline{PQ} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - t)^2}$, $\tilde{l} = \overline{\tilde{P}Q} = \sqrt{(x-k)^2 + y^2 + (z - \tilde{t})^2}$ 이다.

제곱하면, $l^2 = t^2 - 2zt + x^2 + y^2 + z^2$, $\tilde{l}^2 = \tilde{t}^2 - 2z\tilde{t} + (x-k)^2 + y^2 + z^2$ 이므로 각각 $t = z$, $\tilde{t} = z$ 일때 최소값 $D^2 = x^2 + y^2$, $\tilde{D}^2 = (x-k)^2 + y^2$ 을 가진다. 따라서,

$$I_A = \iint_S \sigma D^2\, dA = \iint_S \sigma(x^2 + y^2)\, dA,$$
$$I_B = \iint_S \sigma \tilde{D}^2\, dA = \iint_S \sigma[(x-k)^2 + y^2]\, dA$$
$$= \iint_S \sigma(x^2 + y^2 + k^2 - 2kx)\, dA$$
$$= I_A + k^2 \iint_S \sigma\, dA + 2k \iint_S \sigma x\, dA$$
$$= I_A + k^2 M + 2k\bar{x}M = I_A + k^2 M.$$

25. $$M = \iint_S \sigma\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^h dz\, d\theta = 2\pi h,$$
$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_S \sigma x\, dA = \frac{1}{M}\int_0^h\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\, dz = 0,$$
$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_S \sigma y\, dA = \frac{1}{M}\int_0^h\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, dz = 0,$$
$$\bar{z} = \frac{1}{M}\iint_S \sigma z\, dA = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^h z\, dz\, d\theta$$
$$= \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} \frac{h^2}{2}\, d\theta = \frac{h}{2},$$

따라서 직선 A 는 무게 중심을 지나고 x 축과는 평행하게 $\frac{h}{2}$ 만큼 떨어져 있으므로 Steiner 의 정리에 의해,

$$I_x = I_A + \left(\frac{h}{2}\right)^2 M = \frac{\pi h}{3}(3 + 2h^2).$$

26. (a) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$,

$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_u u'(t) + \mathbf{r}_v v'(t)$, (연쇄 법칙)

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u u'^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v u'v' + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v v'^2$$
$$= Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2,$$
$$l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'(t)\mathbf{r}'(t)}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt.$$

(b) $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(g(t), h(t))$, $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(p(t), q(t))$,

$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_u g' + \mathbf{r}_v h' = \mathbf{a}$, $\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_u p' + \mathbf{r}_v q' = \mathbf{b}$,

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r}_1'||\mathbf{r}_2'|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

(c) $$|\mathbf{N}|^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 = |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 \sin^2\gamma$$
$$= |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2(1 - \cos^2\gamma)$$
$$= |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2\cos^2\gamma$$
$$= |\mathbf{r}_u|^2|\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2 = EG - F^2;$$
$$A(S) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{N}|\, du\, dv$$
$$= \iint_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

(d) $u = r$, $v = \theta$, $\mathbf{r}(u, v) = [u\cos v, u\sin v]$,

$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v]$,

$E = 1$, $F = 0$, $G = u^2$,

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = du^2 + u^2\, dv^2$$
$$= dr^2 + r^2\, d\theta^2;$$
$$A(S) = \iint_R u\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^a u\, du\, dv$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\, dv = \pi a^2.$$

(e) $\mathbf{r} = [(a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v]$,

$\mathbf{r}_u = [-(a + b\cos v)\sin u, (a + b\cos v)\cos u, 0]$,

$\mathbf{r}_v = [-b\sin v\cos u, -b\sin v\sin u, b\cos v]$,

$E = (a + b\cos v)^2$, $F = 0$, $G = b^2$,

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2$$
$$= (a + b\cos v)^2\, du^2 + b^2\, dv^2,$$
$$A(S) = \iint_R b(a + b\cos v)\, du\, dv$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a + b\cos v)\, dv\, du$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\pi ab\, du = 4\pi^2 ab;$$

$C : (y - a)^2 + z^2 = b^2, x = 0$, 원,

C 의 무게 중심 $= [0, a, 0]$,

C 의 길이 $= 2\pi b$,

C 의 중심이 회전할 때 생기는 궤적의 길이 $= 2\pi a$,

torus 표면적 $= 2\pi b \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ab$ (Pappus 정리).

(f) 원기둥, 원뿔, 공에 대해 살펴보자.

$\mathbf{r}(u, v) = [a\cos u, a\sin u, v]$,

$\mathbf{r}_u = [-a\sin u, a\cos u, 0]$,

$\mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$,

$E = a^2$, $F = 0$, $G = 1$,

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = a^2\, du^2 + dv^2,$$
$$A(S) = \iint_R a\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^h a\, dv\, du = 2\pi ah;$$

$\mathbf{r}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, u]$,

$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 1]$,

$\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,

$E = 2$, $F = 0$, $G = u^2$,

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = 2\, du^2 + u^2\, dv^2,$$
$$A(S) = \iint_R \sqrt{2}u\, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^h \sqrt{2}u\, du\, dv$$

$= \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{\sqrt{2}}\, dv = \sqrt{2}\pi h^2;$
$\mathbf{r}(u,v) = [a\cos u \sin v, a\sin u\sin v, a\cos v],$
$\mathbf{r}_u = [-a\sin u\sin v, a\cos u\sin v, 0],$
$\mathbf{r}_v = [a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, -a\sin v],$
$E = a^2\sin^2 v,\ F = 0,\ G = a^2,$
$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = a^2\sin^2 v\,du^2 + a^2\,dv^2,$
$A(S) = \iint_R a^2|\sin v|\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin v\,dv\,du$
$= \int_0^{2\pi} 2a^2\,du = 4\pi a^2.$

9.7. Triple Integrals, Divergence Theorem of Gauss

1. $M = \iiint_T \sigma\,dV$
$= \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3}\int_{-1}^{1} (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$
$= \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} (2x^2+2y^2+2/3)\,dy\,dz$
$= \int_{-2}^{2} (12x^2+112)\,dz = 512.$

2. $M = \iiint_T \sigma\,dV$
$= \int_0^2\int_0^1\int_0^{1-y} e^{-x-y-z}\,dx\,dy\,dz$
$= \int_0^2\int_0^1 (e^{-y-z} - e^{-1-z})\,dy\,dz$
$= \int_0^2 (e^{-z} - 2e^{-1-z})\,dz = 2e^{-3} - e^{-2} - 2e^{-1} + 1.$

3. $M = \iiint_T \sigma\,dV$
$= \int_{-2}^{2}\int_0^{1/2}\int_0^1 (\sin\pi x\cos\pi y + 2)\,dx\,dy\,dz$
$= \int_{-2}^{2}\int_0^{1/2} (\frac{2}{\pi}\cos\pi y + 2)\,dy\,dz$
$= \int_{-2}^{2} (\frac{2}{\pi^2} + 1)\,dz = 8/\pi^2 + 4.$

4. 극좌표로 고치면,
$0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -3 \le z \le 3,\ \sigma = r^4/3,$
$M = \iiint_T \sigma\,dV = \int_{-3}^{3}\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^5/3\,dr\,d\theta\,dz$
$= \int_{-3}^{3}\int_0^{2\pi} 81/2\,d\theta\,dz = \int_{-3}^{3} 81\pi\,dz = 486\pi.$

5. $0 \le x \le 1-y-z,\ 0 \le y \le 1-z,\ 0 \le z \le 1,$
$M = \iiint_T \sigma\,dV$
$= \int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-y-z} 12xy\,dx\,dy\,dz$
$= \int_0^1\int_0^{1-z} 6y(1-y-z)^2\,dy\,dz$
$= \int_0^1 (z-1)^4/2\,dz = 0.1.$

6. $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x^2,\ 0 \le z \le x,$
$M = \iiint_T \sigma\,dV$
$= \int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^x 4z\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^1\int_0^{1-x^2} 2x^2\,dy\,dx$
$= \int_0^1 2x^2(1-x^2)\,dx = 4/15.$

7. $M = \iiint_T \sigma\,dV$
$= \int_0^2\int_{e^{-x}}^1\int_{e^{-x}}^1 2/yz\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^2\int_{e^{-x}}^1 2x/y\,dy\,dx = \int_0^2 2x^2\,dx = 16/3.$

8. $I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dV$
$= \int_0^a\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-c/2}^{c/2} (y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^a\int_{-b/2}^{b/2} (cy^2 + c^3/12)\,dy\,dx$
$= \int_0^a (b^3c + bc^3)/12\,dx = abc(b^2+c^2)/12.$

9. $I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dV$
$= \int_0^a\int_0^a\int_0^a (y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_0^a\int_0^a (ay^2 + a^3/3)\,dy\,dx$
$= \int_0^a 2a^4/3\,dx = 2a^5/3.$

10. 극좌표로 고치면,
$0 \le x \le h,\ 0 \le r \le x,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$
$y^2 + z^2 = r^2,$
$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dV$
$= \int_0^h\int_0^x\int_0^{2\pi} r^3\,d\theta\,dr\,dx$
$= \int_0^h\int_0^x 2\pi r^3\,dr\,dx$
$= \int_0^h \pi x^4/2\,dx = \pi h^5/10.$

11. 극좌표로 고치면,
$0 \le x \le h,\ 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$
$y^2 + z^2 = r^2,$
$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dV$
$= \int_0^h\int_0^a\int_0^{2\pi} r^3\,d\theta\,dr\,dx$
$= \int_0^h\int_0^a 2\pi r^3\,dr\,dx$
$= \int_0^h \pi a^4/2\,dx = \pi a^4 h/2.$

12. 구면좌표로 고치면,
$0 \le r \le a,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$
$y^2 + z^2 = r^2(\sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta),$
$I_x = \iiint_T (y^2+z^2)\,dV$

$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (y^2+z^2) r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$
$= \int_0^a \int_0^{2\pi} 2r^4(1+2\sin^2\phi)/3 \, d\phi \, dr$
$= \int_0^a 8r^4\pi/3 \, dx = 8\pi a^5/15.$

13. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2z,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3}\int_{-1}^{1} (2x+2z)\, dx\, dy\, dz$
$= \int_{-2}^{2}\int_{-3}^{3} 4z\, dy\, dz = \int_{-2}^{2} 24z\, dz = 0.$

14. $\operatorname{div}\mathbf{F} = e^x + e^y + e^z,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (e^x + e^y + e^z)\, dx\, dy\, dz$
$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2(\sinh 1 + e^y + e^z)\, dy\, dz$
$= \int_{-1}^{1} 4(2\sinh 1 + e^z)\, dz = 24\sinh 1.$

15. 극좌표로 고치면,
$0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -2 \le z \le 2,$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = -\sin z,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_{-2}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} -r\sin z\, dr\, d\theta\, dz$
$= \int_{-2}^{2}\int_0^{2\pi} -2\sin z\, d\theta\, dz = \int_{-2}^{2} -4\pi\sin z\, dz = 0.$

16. 극좌표로 고치면,
$0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2,$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = -\sin z,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{3} -r\sin z\, dr\, d\theta\, dz$
$= \int_0^{2}\int_0^{2\pi} -9\sin z/2\, d\theta\, dz = \int_0^{2} -9\pi\sin z\, dz =$
$9\pi(\cos 2 - 1).$

17. $0 \le x \le 1-y-z,\ 0 \le y \le 1-z,\ 0 \le z \le 1,$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 4,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^{1}\int_0^{1-z}\int_0^{1-y-z} 4\, dx\, dy\, dz$
$= \int_0^{1}\int_0^{1-z} 4(1-y-z)\, dy\, dz$
$= \int_0^{1} 2(1-z)^2\, dz = 2/3.$

18. $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y,$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 4x + y + \pi\sin\pi z,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^{1}\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} (4x + y + \pi\sin\pi z)\, dz\, dy\, dx$
$= \int_0^{1}\int_0^{1-x} [1 + (4x+y)(1-x-y)$
$-\cos\pi(1-x-y)]\, dy\, dx$
$= \int_0^{1} [7/6 + x/2 - 7x^2/2 + 11x^3/6 - \frac{1}{\pi}\sin\pi(1-x)]\, dx$
$= 17/24 - 2/\pi^2.$

19. 구면좌표로 고치면,
$0 \le r \le 3,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3r^2,$
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^4\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$
$= \int_0^{3}\int_0^{2\pi} 2r^4\, d\phi\, dr$
$= \int_0^{3} 4r^4\pi\, dx = 972\pi/5.$

20. 적절한 변수 변환에 의해 $\operatorname{div}\mathbf{F}$ 가 변수 하나에만 의존하게 하면 삼중 적분이 매우 쉬워진다.

9.8. Divergence Theorem: Further Applications

1. $\nabla f = [-2x, -2y, 4z],$
$S_1 : x = 0,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 4,$
$\mathbf{n} = [-1, 0, 0],\ \frac{\partial f}{\partial n} = 2x = 0,$
$S_2 : x = 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 4,$
$\mathbf{n} = [1, 0, 0],\ \frac{\partial f}{\partial n} = -2x = -2,$
$S_3 : 0 \le x \le 1,\ y = 0,\ 0 \le z \le 4,$
$\mathbf{n} = [0, -1, 0],\ \frac{\partial f}{\partial n} = 2y = 0,$
$S_4 : 0 \le x \le 1,\ y = 2,\ 0 \le z \le 4,$
$\mathbf{n} = [0, 1, 0],\ \frac{\partial f}{\partial n} = -2y = -4,$
$S_5 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ z = 0,$
$\mathbf{n} = [0, 0, -1],\ \frac{\partial f}{\partial n} = -4z = 0,$
$S_6 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ z = 4,$
$\mathbf{n} = [0, 0, 1],\ \frac{\partial f}{\partial n} = 4z = 16,$
$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dA = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA$
$= \int_0^{2}\int_0^{4} (-2)\, dz\, dy + \int_0^{1}\int_0^{4} (-4)\, dz\, dx$
$+ \int_0^{2}\int_0^{1} 16\, dx\, dy = -16 - 16 + 32 = 0;$
$\nabla^2 f = -2 - 2 + 4 = 0,$
$\iiint_T \nabla^2 f\, dV = 0.$

2. $\nabla f = [2x, -2y, 0],$
$S_1 : x^2 + y^2 \le 4,\ z = 0,\ \mathbf{n} = [0, 0, -1],\ \frac{\partial f}{\partial n} = 0,$
$S_2 : x^2 + y^2 \le 4,\ z = 1,\ \mathbf{n} = [0, 0, 1],\ \frac{\partial f}{\partial n} = 0,$
$S_3 : x^2 + y^2 = 4,\ 0 \le z \le 1,\ \mathbf{r} = [2\cos u, 2\sin u, v],$
$\mathbf{r}_u = [-2\sin u, 2\cos u, 0],\ \mathbf{r}_v = [0, 0, 1],$
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [2\cos u, 2\sin u, 0],$

$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}[\cos u, \sin u, 0]$,
$\dfrac{\partial f}{\partial n} = 4\cos^2 u - 4\sin^2 u = 4\cos 2u$,
$\iint_S \dfrac{\partial f}{\partial n}\, dA = \sum_{i=1}^{3} \iint_{S_i} \dfrac{\partial f}{\partial n}\, dA$
$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4\cos 2u\, du\, dv = 0$;
$\nabla^2 f = 2 - 2 = 0$,
$\iiint_T \nabla^2 f\, dV = 0$.

3. 구면좌표로 고치면,
$0 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi/2$,
$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$
$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2\, d\phi\, dr$
$= \int_0^2 2r^2\pi\, dx = 2\pi/3$.

4. 극좌표로 고치면,
$0 \le r \le z,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 3$,
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 10$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^z 10r\, dr\, d\theta\, dz$
$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 5z^2\, d\theta\, dz = \int_0^3 10\pi z^2\, dz = 90\pi$.

5. $x = 3r\sin\theta\cos\phi, y = 6r\sin\theta\sin\phi, z = 2r\cos\theta$,
$0 \le r \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$,
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 10$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 360r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$
$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 720r^2\, d\phi\, dr$
$= \int_0^1 1440r^2\pi\, dx = 480\pi$.

6. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 10 + 3z^2$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_{-1}^1 \int_{x/2}^x \int_0^y (10 + 3z^2)\, dz\, dy\, dx$
$= \int_{-1}^1 \int_{x/2}^x (10y + y^3)\, dy\, dx$
$= \int_{-1}^1 15(16 + x^2)x^2/64\, dx = 83/32$.

7. $\operatorname{div}\mathbf{F} = \cos x - \sin y + \sinh z$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^{\pi/2} \int_0^x \int_x^z (\cos x - \sin y + \sinh z)\, dy\, dz\, dx$
$= \int_0^{\pi/2} \int_0^x [(z - x)(\cos x + \sinh z)$
$+ \cos z - \cos x]\, dz\, dx$
$= \int_0^{\pi/2} [\sin x - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)\cos x - \cosh x + 1]\, dx$
$= 1 - \pi^2/8 - \sinh\frac{\pi}{2}$.

8. 극좌표로 고치면,
$0 \le r \le \sqrt{z},\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le 4$,
$\operatorname{div}\mathbf{F} = r(\cos\theta + \sin\theta)$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \int_0^4 \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2(\cos\theta + \sin\theta)\, dr\, d\theta\, dz$
$= \int_0^4 \int_0^{\pi} z^{3/2}(\cos\theta + \sin\theta)/3\, d\theta\, dz$
$= \int_0^4 \frac{2}{3} z^{3/2}\, dz = 128/15$.

9. $f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}r^2$,
$\nabla f = [x, y, z] = \mathbf{r},\ \nabla^2 f = 3$,
$\cos\phi = \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} = \dfrac{\nabla f\cdot\mathbf{n}}{r}$,
$\dfrac{\partial f}{\partial n} = \nabla f\cdot\mathbf{n} = r\cos\phi$,
$V(T) = \iiint_T dV = \frac{1}{3}\iiint_T \nabla^2 f\, dV$
$= \frac{1}{3}\iint_S \dfrac{\partial f}{\partial n}\, dA = \frac{1}{3}\iint_S r\cos\phi\, dA$.

10. $\mathbf{r} = [a\cos u\cos v, a\sin u\cos v, a\sin v]$,
$\mathbf{r}_u = [-a\sin u\cos v, a\cos u\cos v, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-a\cos u\sin v, -a\sin u\sin v, a\cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [a^2\cos u\cos^2 v, a^2\sin u\cos^2 v, a^2\cos v\sin v]$
$|\mathbf{N}| = a^2\cos v,\ \mathbf{n} = [\cos u\cos v, \sin u\cos v, \sin v]$,
$r\cos\phi = \mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = a$,
$V(T) = \frac{1}{3}\iint_S r\cos\phi\, dA = \frac{1}{3}\iint_R a|\mathbf{N}|\, du\, dv$
$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos v\, dv\, du = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 2a^3\, du$
$= \frac{4}{3}\pi a^3$.

11. $\mathbf{F} = [x, 0, 0],\ \operatorname{div}\mathbf{F} = 1$,
$V(T) = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \iint_S x\, dy\, dz$;
$\mathbf{F} = [0, y, 0],\ \operatorname{div}\mathbf{F} = 1$,
$V(T) = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \iint_S y\, dz\, dx$;
$\mathbf{F} = [0, 0, z],\ \operatorname{div}\mathbf{F} = 1$,
$V(T) = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \iint_S z\, dx\, dy$;
$\mathbf{F} = \frac{1}{3}[x, y, z],\ \operatorname{div}\mathbf{F} = 1$,
$V(T) = \iiint_T dV = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$
$= \frac{1}{3}\iint_S (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$.

12. (a) $\operatorname{div}(g\nabla g) = \nabla g\cdot\nabla g + g\nabla^2 g = |\nabla g|^2$,
$\iiint_T |\nabla g|^2\, dV = \iiint_T \operatorname{div}(g\nabla g)\, dV$

$= \iint_S (g\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_S g \frac{\partial g}{\partial n}\, dA.$

(b) $\frac{\partial g}{\partial n} = 0 \Rightarrow \iiint_T |\nabla g|^2\, dV = 0,$
$A = \{ P \in T : \nabla g(P) = 0 \},$
$B = \{ P \in T : \nabla g(P) \neq 0 \},$
$B_n = \{ P \in T : |\nabla g(P)| \geq \frac{1}{n} \},$
$B_n \subset B,\ B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ V(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V(B_n),$
$\iiint_T |\nabla g|^2\, dV = \iiint_A |\nabla g|^2\, dV + \iiint_B |\nabla g|^2\, dV$
$= \iiint_B |\nabla g|^2\, dV \geq \iiint_{B_n} |\nabla g|^2\, dV$
$\geq \frac{1}{n^2} \iiint_{B_n} dV \geq \frac{1}{n^2} V(B_n),\ ^\forall n,$
$\Rightarrow V(B_n) = 0,\ ^\forall n,$
$\Rightarrow V(B) = 0 \Rightarrow \nabla g(P) = 0,\ ^\forall P \in T$
$\Rightarrow g(P) = \text{const.},\ ^\forall P \in T.$

(c) $\operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f)$
$= \nabla f \cdot \nabla g + f\nabla^2 g - \nabla g \cdot \nabla f - g\nabla^2 f$
$= f\nabla^2 g - g\nabla^2 f = 0,$
$\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$
$= \iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dA$
$= \iiint_T \operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f)\, dV = 0.$

(d) $h = f - g,\ \nabla^2 h = \nabla^2 f - \nabla^2 g = 0,$
$\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial n} = 0,$
$h(P) = \text{const.},\ ^\forall P \in T,$
$f(P) = g(P) + \text{const.},\ ^\forall P \in T.$

(e) 평균값 정리에 의해 T 에 한 점 $Q : (x_0, y_0, z_0)$ 이 있어서 다음과 같이 쓸 수 있다.
$\iiint_T \nabla^2 f\, dV = \nabla^2 f(x_0, y_0, z_0) V(T),$
$\nabla^2 f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V(T)} \iiint_T \nabla^2 f\, dV$
$= \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA,$
이제 T 내부에 한 점 $P : (x_1, y_1, z_1)$ 을 고정시키고 T 를 P 로 압축시키자. 즉 P 에서 T 의 임의의 점까지의 거리 중에서 가장 긴 거리인 $d(T)$ 가 0 으로 가면, 점 Q 는 점 P 에 반드시 도달한다. 따라서 다음과 같이 $\nabla^2 f(x_1, y_1, z_1)$ 에 대해 좌표계에 무관한 정의를 얻는다.
$\nabla^2 f(x_1, y_1, z_1) = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \frac{\partial f}{\partial n}\, dA.$

9.9. Stokes' Theorem

1. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, 1],\ 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1,$
$\mathbf{r}_u = [1, 0, 0],\ \mathbf{r}_v = [0, 1, 0],$
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, 1],$
$\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 2, 5],$
$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N} = 5,$
$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N}\, du\, dv$
$= \int_0^1 \int_0^1 5\, du\, dv = \int_0^1 5\, dv = 5,$
$\mathbf{r}(t) = [t, 0, 1],\ 0 \leq t \leq 1,\ \mathbf{r}' = [1, 0, 0],$
$\mathbf{r}(t) = [1, t-1, 1],\ 1 \leq t \leq 2,\ \mathbf{r}' = [0, 1, 0],$
$\mathbf{r}(t) = [3-t, 1, 1],\ 2 \leq t \leq 3,\ \mathbf{r}' = [-1, 0, 0],$
$\mathbf{r}(t) = [0, 4-t, 1],\ 3 \leq t \leq 4,\ \mathbf{r}' = [0, -1, 0],$
$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^4 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_0^1 dt + \int_1^2 5\, dt + \int_2^3 (-1)\, dt + \int_3^4 0\, dt = 5,$
그러므로, $\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$

2. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 0],\ 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq \pi,$
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0],\ \mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0],$
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, u],$
$\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 0, -2u(\cos v + \sin v)],$
$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N} = -2u^2(\cos v + \sin v),$
$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N}\, du\, dv$
$= \int_0^2 \int_0^\pi -2u^2(\cos v + \sin v)\, dv\, du$
$= \int_0^2 -4u^2\, du = -32/3,$
$\mathbf{r}(t) = [2t+2, 0, 0],\ -2 \leq t \leq 0,\ \mathbf{r}' = [2, 0, 0],$
$\mathbf{r}(t) = [2\cos t, 2\sin t, 0],\ 0 \leq t \leq \pi,$
$\mathbf{r}' = [-2\sin t, 2\cos t, 0],$
$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2}^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_{-2}^0 0\, dt - 8\int_0^\pi (\sin^3 t + \cos^3 t)\, dt = -32/3,$
그러므로, $\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$

3. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, v^2],\ 0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 2,$
$\mathbf{r}_u = [1, 0, 0],\ \mathbf{r}_v = [0, 1, 2v],$
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, -2v, 1],$
$\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, e^{v^2}, 0],$
$(\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N} = -2ve^{v^2},$
$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \iint_R (\operatorname{curl} \mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N}\, du\, dv$
$= \int_0^4 \int_0^2 -2ve^{v^2}\, dv\, du$
$= \int_0^4 (1 - e^4)\, du = 4(1 - e^4),$
$\mathbf{r}(t) = [t, 0, 0],\ 0 \leq t \leq 4,\ \mathbf{r}' = [1, 0, 0],$
$\mathbf{r}(t) = [4, t-4, (t-4)^2],\ 4 \leq t \leq 6,$
$\mathbf{r}' = [0, 1, 2t-8],$
$\mathbf{r}(t) = [10-t, 2, 4],\ 6 \leq t \leq 10,\ \mathbf{r}' = [-1, 0, 0],$
$\mathbf{r}(t) = [0, 12-t, (12-t)^2],\ 10 \leq t \leq 12,$
$\mathbf{r}' = [0, -1, 2t-24],$
$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{12} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
$= \int_0^4 dt$
$+ \int_4^6 e^{(t-4)^2} [\sin(t-4) + (2t-8)\cos(t-4)]\, dt$

$-\int_6^{10} e^4\,dt$
$+\int_{10}^{12} e^{(12-t)^2}[-\sin(12-t)+(2t-24)\cos(12-t)]\,dt$
$= 4(1-e^4)$,
그러므로, $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

4. $\mathbf{r}(u,v) = [\cos u, \sin u, v]$, $0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le \pi/4$,
$\mathbf{r}_u = [-\sin u, \cos u, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0,0,1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [\cos u, \sin u, 0]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, -\cos 2v, 0]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = -\sin u\cos 2v$,
$\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R (\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N}\,du\,dv$
$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi} -\sin u\cos 2v\,du\,dv$
$= \int_0^{\pi/4} -2\cos 2v\,dv = -1$,
$\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 0]$, $0 \le t \le \pi$,
$\mathbf{r}' = [-\sin t, \cos t, 0]$,
$\mathbf{r}(t) = [-1, 0, t-\pi]$, $\pi \le t \le \frac{5}{4}\pi$, $\mathbf{r}' = [0,0,1]$,
$\mathbf{r}(t) = [-\cos(t-\frac{5}{4}\pi), -\sin(t-\frac{5}{4}\pi), \frac{1}{4}\pi]$,
$\frac{5}{4}\pi \le t \le \frac{9}{4}\pi$, $\mathbf{r}' = [\sin(t-\frac{5}{4}\pi), -\cos(t-\frac{5}{4}\pi), 0]$,
$\mathbf{r}(t) = [1, 0, \frac{5}{2}\pi - t]$, $\frac{9}{4}\pi \le t \le \frac{5}{2}\pi$, $\mathbf{r}' = [0,0,-1]$,
$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{5}{2}\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$
$= \int_0^{\pi} 0\,dt + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \cos 2(t-\pi)\,dt$
$+ \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} 0\,dt - \int_{\frac{9}{4}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos 2(\frac{5}{2}\pi - t)\,dt = -1$,
그러므로, $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

5. $\mathbf{r}(u,v) = [v\cos u, v\sin u, v^2]$,
$0 \le u \le \pi$, $0 \le v \le 1$,
$\mathbf{r}_u = [-v\sin u, v\cos u, 0]$, $\mathbf{r}_v = [\cos u, \sin u, 2v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [2v^2\cos u, 2v^2\sin u, -v]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-2v^2, -2v\cos u, -2v\sin u]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = 2v^2(-2v^2\cos u - v\sin 2u + \sin u)$,
$\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R (\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N}\,du\,dv$
$= \int_0^1\int_0^{\pi} 2v^2(-2v^2\cos u - v\sin 2u + \sin u)\,du\,dv$
$= \int_0^1 4v^2\,dv = 4/3$,
$\mathbf{r}(t) = [-t, 0, t^2]$, $-1 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [-1, 0, 2t]$,
$\mathbf{r}(t) = [-\cos(t-1), \sin(t-1), 1]$, $1 \le t \le \pi+1$,
$\mathbf{r}' = [\sin(t-1), \cos(t-1), 0]$,
$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{\pi+1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$
$= \int_{-1}^{1} 2t^3\,dt + \int_1^{\pi+1} [\sin^3(t-1) + \cos(t-1)]\,dt$
$= 4/3$,
그러므로, $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

6. $\mathbf{r}(u,v) = [\cos v\cos u, \cos v\sin u, 1+\sin v]$,
$0 \le u \le \pi$, $-\frac{1}{2}\pi \le v \le 0$,
$\mathbf{r}_u = [-\cos v\sin u, \cos v\cos u, 0]$,
$\mathbf{r}_v = [-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [\cos^2 v\cos u, \cos^2 v\sin u, \sin v\cos v]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -2[1+\sin v, \cos v\cos u, \cos v\sin u]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = -2\cos^2 v[\cos u + \cos v\sin u\cos u$
$+ \sin v(\cos u + \sin u)]$,
$\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R (\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N}\,du\,dv$
$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0}\int_0^{\pi} -2\cos^2 v[\cos u + \cos v\sin u\cos u$
$+ \sin v(\cos u + \sin u)]\,du\,dv$
$= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} -4\cos^2 v\sin v\,dv = 4/3$,
$\mathbf{r}(t) = [\cos t, 0, 1-\sin t]$, $0 \le t \le \pi$,
$\mathbf{r}' = [-\sin t, 0, -\cos t]$,
$\mathbf{r}(t) = [\cos t, -\sin t, 1]$, $\pi \le t \le 2\pi$,
$\mathbf{r}' = [-\sin t, -\cos t, 0]$,
$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$
$= \int_0^{\pi} (-\cos^3 t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin^3 t)\,dt = 4/3$,
그러므로, $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

7. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 1]$,
$0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, u]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 0, 9]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = 9u$,
$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA$
$= \int_0^2\int_0^{2\pi} 9u\,dv\,du = \int_0^2 18\pi u\,du = 36\pi$.

8. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, b]$,
$0 \le u \le a$, $0 \le v \le 2\pi$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, 0]$, $\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, u]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 0, 1-4u\sin v]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = u(1-4u\sin v)$,
$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA$
$= \int_0^a\int_0^{2\pi} u(1-4u\sin v)\,dv\,du$
$= \int_0^a 2\pi u\,du = \pi a^2$.

9. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, u\sin v, 1+u\sin v]$,
$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, \sin v]$,
$\mathbf{r}_v = [-u\sin v, u\cos v, u\cos v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, -u, u]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, 4, -2]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = -6u$,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,dA$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} -6u\,dv\,du$$
$$= \int_0^1 -12\pi u\,du = -6\pi.$$

10. $\mathbf{r}(u,v) = [u\cos v, \sqrt{2}u\sin v, 3+u\cos v]$,
$0 \le u \le 3/\sqrt{2},\ 0 \le v \le 2\pi$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sqrt{2}\sin v, \cos v]$,
$\mathbf{r}_v = [-u\sin v, \sqrt{2}u\cos v, -u\sin v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \sqrt{2}u[-1,0,1]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [1,0,-1]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = -2\sqrt{2}u$,
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,dA$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} -2\sqrt{2}u\,du\,dv$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{-9}{\sqrt{2}}\,dv = -9\sqrt{2}\pi.$$

11. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, 1-u-v]$,
$0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1-u$,
$\mathbf{r}_u = [1,0,-1]$,
$\mathbf{r}_v = [0,1,-1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [1,1,1]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-uv, 0, v(1-u-v)]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = v(1-2u-v)$,
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,dA$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-u} v(1-2u-v)\,dv\,du$$
$$= \int_0^1 (1-4u+3u^2)/2\,du = 0.$$

12. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, v^2],\ -a \le u \le a,\ -V \le v \le V$,
$$V = \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a^2 - u^2}},$$
$\mathbf{r}_u = [1,0,0],\ \mathbf{r}_v = [0,1,2v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0,-2v,1]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0,0,0]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = 0$,
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,dA$$
$$= \int_{-a}^{a}\int_{-V}^{V} 0\,dv\,du = 0.$$

13. $\mathbf{r}(u,v) = [u, v, 1-u-v]$,
$0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1-u$,
$\mathbf{r}_u = [1,0,-1],\ \mathbf{r}_v = [0,1,-1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [1,1,1]$,
$\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, -3u^2, -3v^2]$,
$(\text{curl}\,\mathbf{F}(\mathbf{r}))\cdot\mathbf{N} = -3(u^2+v^2)$,
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\,dA$$
$$= \int_0^1\int_0^{1-u} -3(u^2+v^2)\,dv\,du$$
$$= \int_0^1 -[3u^2 + (1-u)^3]\,du = -5/4.$$

14. $\mathbf{r} = [\cos s, -\sin s, 0],\ \mathbf{r}' = [-\sin s, -\cos s, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\sin s, \cos s, 0]$,
$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'\,ds = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 s - \cos^2 s)\,ds = -2\pi;$$
주어진 벡터장이 원점에서 연속이 아니다.

15. $\int_C \nabla f\,dr = f(B) - f(A)$,
$A : C$ 의 시작점, $B : C$ 의 끝점,
$$\iiint_T \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA,$$
$$\iiint_T \nabla^2 f\,dV = \iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dA,$$
$$\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'\,ds,$$
$$\iint_S (\text{curl}\,\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \nabla f\cdot\mathbf{r}'\,ds = 0.$$

Chapter 9 Review

1. $$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt,$$
$$\int_C f(\mathbf{r})\,dt = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,dt.$$
2. 주어진 함수 (피적분 함수) 를 공간이나 평면위의 곡선을 따라 적분하는 것이 선적분이다.
3. 경로에 무관 : 시작점과 끝점이 서로 동일한 경로들에 대해 각 선적분의 결과는 같다 (보존).
경로에 의존 : 시작점과 끝점이 서로 동일한 경로들에 대해 각 선적분의 결과가 다르다 (비보존, 감쇄).
판별 정리에 의해 경로에 의존하는지를 쉽게 결정.
4. 선적분, 면적분, 이중 적분, 체적분, 삼중 적분.
5. $\iint_S (\text{curl}\,\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'\,ds$,
S 에서 연속이고 미분 가능한 벡터장일 때.
6. $\iiint_T \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA.$
7. 매우 중요한 역할을 담당.
8. $\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$, 면적분을 체적분으로 바꿀 때 사용.
9. 왼쪽이냐 오른쪽이냐에 따라 법벡터의 향이 바뀐다.
10. 가해진 힘에 의해 수행된 일을 계산 (선적분), 표면을 지나는 flux 를 계산 (면적분).
11. 영역 내부로 들어 오는지 또는 나가는지를 결정.
12. 곡면위의 임의의 점에서 단위 법벡터를 정할 수 있는 곡면.
13. $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$;
중력장, 전자력장을 구하는 데 쓰인다.
14. 조화 함수가 영역의 경계에서 0 이면 내부에서도 0 이다.
15. 실제로 방향성을 알아야 적분이 가능하므로 벡터장에 대해 먼저 정의하는 것이 바람직하다.
16. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, 적분이 경로에 무관,
$\mathbf{F} = \nabla f,\ f = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3$,
$$\int_{(4,2)}^{(-3,5)} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$$
$= f(-3,5) - f(4,2) = -325/3.$

17. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 적분이 경로에 무관,
$\mathbf{F} = \nabla f$, $f = \sin xy + e^z$,
$\int_{(\pi,1,0)}^{(\frac{1}{2},\pi,1)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(\frac{1}{2}, \pi, 1) - f(\pi, 1, 0) = e.$

18. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = [-1, 0, -x] \neq \mathbf{0}$, 적분이 경로에 의존,
$\mathbf{r}(t) = [t, 2t^2, t]$, $1 \le t \le 2$, $\mathbf{r}' = [1, 4t, 1]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [2t^3, t, 0]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_1^2 (2t^3 + 4t^2)\, dt = 101/6.$

19. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = [0, 0, \cos x] \neq \mathbf{0}$,적분이 경로에 의존,
경로가 평면 $z = 0$ 위에 있으므로, $\mathbf{n} = [0, 0, 1]$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_C (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA$
$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx\, dy = \int_0^2 dy = 2.$
답. 2 (반시계 방향), -2 (시계 방향).

20. $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 \neq 0$,
적분이 경로에 의존,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$
$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 3r^3\, d\theta\, dr = \int_0^2 6\pi r^3\, dr = 24\pi.$
답. 24π (반시계 방향), -24π (시계 방향).

21. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \pi[0, \sin \pi x, \cos \pi x + \sin \pi y] \neq \mathbf{0}$,
적분이 경로에 의존,
$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, u]$,
$0 \le u \le \frac{1}{2}$, $0 \le v \le 4$,
$\mathbf{r}_u = [1, 0, 1]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-1, 0, 1]$,
$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N} = \pi(\cos \pi u + \sin \pi v)$,
$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA$
$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^4 \pi(\cos \pi u + \sin \pi v)\, dv\, du$
$= \int_0^{\frac{1}{2}} 4\pi \cos \pi u\, du = 4.$
답. 4 (반시계 방향), -4 (시계 방향).

22. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = [-1, -1, 5] \neq \mathbf{0}$, 적분이 경로에 의존,
$\mathbf{r}(u, v) = [u \cos v, u \sin v, u \cos v + 2]$,
$0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 2\pi$,
$\mathbf{r}_u = [\cos v, \sin v, \cos v]$,
$\mathbf{r}_v = [-u \sin v, u \cos v, -u \sin v]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-u, u \sin 2v, u]$,
$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N} = u(6 + \sin 2v)$,
$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA$
$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} u(6 + \sin 2v)\, dv\, du$
$= \int_0^2 12\pi u\, du = 24\pi.$
답. 24π (반시계 방향), -24π (시계 방향).

23. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 적분이 경로에 무관,
$\mathbf{F} = \nabla f$, $f = 4x^2 y + \sin 2z$,
$\int_{(1,0,0)}^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}) - f(1, 0, 0) = 1 + \sqrt{2}.$

24. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 적분이 경로에 무관,
$\mathbf{F} = \nabla f$, $f = e^{xz} + \cosh 2y$,
$\int_{(-1,-1,1)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(1, 1, 1) - f(-1, -1, 1) = 2 \sinh 1.$

25. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 적분이 경로에 무관,
$\mathbf{F} = \nabla f$, $f = e^x + e^y + e^z$,
$\int_{(0,1,0)}^{(\ln 2, 2, \ln 2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$
$= f(\ln 2, 2, \ln 2) - f(0, 1, 0) = e^2 - e + 2.$

26. $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2ye^x - \frac{x}{y} \neq 0$, 적분이 경로에 의존,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$
$= \int_0^2 \int_1^2 \left(2ye^x - \frac{x}{y}\right) dy\, dx$
$= \int_0^2 (3e^x - x \ln 2)\, dx = 3e^2 - 2\ln 2 - 3.$
답. $3e^2 - 2\ln 2 - 3$ (반시계 방향),
$-3e^2 + 2\ln 2 + 3$ (시계 방향).

27. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, 적분이 경로에 무관,
$\mathbf{F} = \nabla f$, $f = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}e^{3y} - \frac{1}{3}e^{-3z}$,
$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$

28. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = [0, 0, y^2 - \sinh y] \neq \mathbf{0}$, 적분이 경로에 의존,
$\mathbf{r}(t) = [t, 3t, t^2]$, $0 \le t \le 1$, $\mathbf{r}' = [1, 3, 2t]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cosh 3t, 9t^3, t^2]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^1 (\cosh 3t + 29t^3)\, dt = \frac{1}{3}\sinh 3 + \frac{29}{4}.$

29. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = [-1, 0, 0] \neq \mathbf{0}$, 적분이 경로에 의존,
$\mathbf{r}(u, v) = [u, v, 0]$,
$0 \le u \le 1$, $0 \le v \le u$,
$\mathbf{r}_u = [1, 0, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0, 1, 0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 0, 1]$,
$(\operatorname{curl}\mathbf{F}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{N} = 0$,
$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA$
$= \int_0^1 \int_0^u 0\, dv\, du = 0.$

30. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = [2xy, -y^2, 0] \neq 0$, 적분이 경로에 의존,
$\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t, 3t]$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,
$\mathbf{r}' = [-\sin t, \cos t, 3]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos^2 t, \sin^2 t, \cos t \sin^2 t]$,
$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'\, dt$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t \sin t + 4\sin^2 t \cos t)\, dt = 1.$

31. $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x$,
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x xy\,dy\,dx$
$= \int_0^1 \frac{1}{2}x^3\,dx = \frac{1}{8}$,
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dx\,dy$
$= 8\int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx$
$= \int_0^1 4x^4\,dx = \frac{4}{5}$,
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dx\,dy$
$= 8\int_0^1\int_0^x xy^2\,dy\,dx$
$= \int_0^1 \frac{8}{3}x^4\,dx = \frac{8}{15}$.

32. $-1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1$,
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_{x^2}^1 x^2y\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2(1-x^4)\,dx = \frac{4}{21}$,
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{21}{4}\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 x^3y\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^1 \frac{21}{8}x^3(1-x^4)\,dx = 0$,
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{21}{4}\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 x^2y^2\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^1 \frac{7}{4}x^2(1-x^6)\,dx = \frac{7}{9}$.

33. $1 \le x \le 2, 0 \le y \le \ln x$,
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_0^{\ln x} dy\,dx$
$= \int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1$,
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{1}{2\ln 2 - 1}\int_1^2\int_0^{\ln x} x\,dy\,dx$
$= \frac{1}{2\ln 2 - 1}\int_1^2 x\ln x\,dx = \frac{8\ln 2 - 3}{2\ln 2 - 1}$,
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{1}{2\ln 2 - 1}\int_1^2\int_0^{\ln x} y\,dy\,dx$
$= \frac{1}{4\ln 2 - 2}\int_1^2 \ln^2 x\,dx = \frac{(\ln 2 - 1)^2}{2\ln 2 - 1}$.

34. $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \pi$,
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^\pi r\,d\theta\,dr$
$= \int_0^a \pi r\,dr = \frac{\pi}{2}a^2$,
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dr\,d\theta$
$= \frac{2}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^\pi r^2\cos\theta\,d\theta\,dr = 0$,
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dr\,d\theta$
$= \frac{2}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^\pi r^2\sin\theta\,d\theta\,dr$
$= \frac{4}{\pi a^2}\int_0^a r^2\,dr = \frac{4a}{3\pi}$.

35. $-1 \le x \le 2, x^2 \le y \le x+2$,
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} x^2\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^2 x^2(x+2-x^2)\,dx = \frac{63}{20}$,
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{20}{63}\int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} x^3\,dy\,dx$
$= \frac{20}{63}\int_{-1}^2 x^3(x+2-x^2)\,dx = \frac{8}{7}$,
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dx\,dy$
$= \frac{20}{63}\int_{-1}^2\int_{x^2}^{x+2} x^2y\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^2 \frac{10}{63}x^2[(x+2)^2 - x^4])\,dx = \frac{118}{49}$.

36. $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$,
$M = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\,d\theta\,dr$
$= \int_0^a \frac{\pi}{2}r^3\,dr = \frac{\pi}{8}a^4$,
$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)\,dr\,d\theta$
$= \frac{8}{\pi a^4}\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos\theta\,d\theta\,dr$
$= \frac{8}{\pi a^4}\int_0^a r^4\,dr = \frac{8a}{5\pi}$,
$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)\,dr\,d\theta$
$= \frac{8}{\pi a^4}\int_0^a\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin\theta\,d\theta\,dr$
$= \frac{8}{\pi a^4}\int_0^a r^4\,dr = \frac{8a}{5\pi}$.

37. $\mathbf{r} = [u, v, 2u+5v]$, $0 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 1$,
$\mathbf{r}_u = [1,0,2]$, $\mathbf{r}_v = [0,1,5]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [-2,-5,1]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [u, v, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} = -2u - 5v$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv$
$= \int_0^2\int_{-1}^1 (-2u-5v)\,dv\,du$
$= \int_0^2 -4u\,du = -8$.

38. $\mathbf{r} = [v, 2\cos u, 2\sin u]$, $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{1}{2} \le v \le \frac{1}{2}$,
$\mathbf{r}_u = [0, -2\sin u, 2\cos u]$, $\mathbf{r}_v = [1,0,0]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [0, 2\cos u, 2\sin u]$,

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [\sin v, 2\sin u, 2\cos u]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{N} = 4\sin 2u$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv$
$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin 2u\,du\,dv$
$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 4\,dv = 4.$

39. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 20 + 6z^2$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$
$= \int_0^6\int_0^1\int_0^y (20+6z^2)\,dz\,dy\,dz$
$= \int_0^6\int_0^1 (20y + 2y^3)\,dy\,dx = \int_0^6 \frac{21}{2}\,dx = 63.$

40. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3(x^2+y^2+z^2)$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$
$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3r^4\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr$
$= \int_0^2\int_0^{2\pi} 6r^4\,d\phi\,dr = \int_0^2 12\pi r^4\,dr = \frac{384\pi}{5}.$

41. $\mathbf{r} = [u, u^2, v]$, $0 \le u \le 1$, $-2 \le v \le 2$,
$\mathbf{r}_u = [1, 2u, 0]$, $\mathbf{r}_v = [0,0,1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [2u, -1, 0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [0, u^2, -uv]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{N} = -u^2$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv$
$= \int_{-2}^2\int_0^1 -u^2\,du\,dv = \int_{-2}^2 -\frac{1}{3}\,dv = -\frac{4}{3}.$

42. $\mathbf{r} = [u, 2u, v]$, $-1 \le u \le 1$, $0 \le v \le 3$,
$\mathbf{r}_u = [1,2,0]$, $\mathbf{r}_v = [0,0,1]$,
$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [2,-1,0]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [e^{2u}, 0, ve^u]$,
$\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{N} = 2e^{2u}$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iint_R \mathbf{F}[\mathbf{r}(u,v)]\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv$
$= \int_0^3\int_{-1}^1 2e^{2u}\,du\,dv = \int_0^3 2\sinh 2\,dv = 6\sinh 2.$

43. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 0.$

44. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2z$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$
$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^2 2zr\,dr\,d\phi\,dz$
$= \int_0^2\int_0^{2\pi} 4z\,d\phi\,dz = \int_0^2 8\pi z\,dz = 16\pi.$

45. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2$,
$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dA = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$
$= \int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr$
$= \int_0^3\int_0^{2\pi} 4r^2\,d\phi\,dr = \int_0^3 8\pi r^2\,dr = 72\pi.$

CHAPTER 10

Fourier Series, Integrals, and Transforms

Fourier series[1] (Sec. 10.2) are series of cosine and sine terms and arise in the important practical task of representing general periodic functions. They constitute a very important tool in solving problems that involve ordinary and partial differential equations. In the present chapter we discuss these series and their engineering use from a practical viewpoint. Further applications follow in the next chapter on partial differential equations.

The *theory* of Fourier series is rather complicated, but the *application* of these series is simple. Fourier series are, in a certain sense, more universal than Taylor series, because many *discontinuous* periodic functions of practical interest can be developed in Fourier series, but, of course, do not have Taylor series representations.

The last four sections (10.8–10.11) concern **Fourier integrals and Fourier transforms,** which extend the ideas and techniques of Fourier series to nonperiodic functions defined for all x. (Corresponding applications to partial differential equations will be considered in the next chapter, in Sec. 11.6.

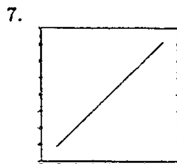
Prerequisite for this chapter: Elementary integral calculus.
Sections that may be omitted in a shorter course: 10.5–10.10.
References: Appendix 1, Part C.
Answers to problems: Appendix 2.

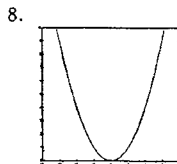
---

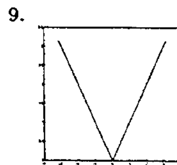
[1]JEAN-BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768—1830), French physicist and mathematician, lived and taught in Paris, accompanied Napoleon to Egypt, and was later made prefect of Grenoble. He utilized Fourier series in his main work *Théorie analytique de la chaleur* (*Analytic Theory of Heat,* Paris 1822), in which he developed the theory of heat conduction (heat equation, see Sec. 11.5). These new series became a most important tool in mathematical physics and also had considerable influence on the further development of mathematics itself; see Ref. [9] in Appendix 1.

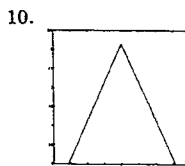
10.1. Periodic Functions.Trigonometric Series.

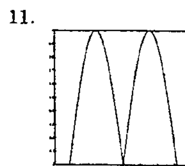
1. $2\pi,\ 2\pi,\ \pi,\ \pi,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1$
2. $\frac{2\pi}{n},\ \frac{2\pi}{n},\ k,\ k,\ \frac{k}{n},\ \frac{k}{n},$
3. $h(x+p) = af(x+p) + bg(x+p)$
   $= af(x) + bg(x) = h(x),$
4. $f(x+np) = f(x+(n-1)p+p)$
   $= f(x+(n-1)p) = \cdots = f(x),$
5. $\forall p > 0,\ const = f(x+p) = f(x),$
6. f(a(x+ p/a))=f(ax + p) =f(ax) : f(ax)는 주기 p/a의 주기함수이다.
   f((x+bp)/b) =f(x/b + p) =f(x/b):f(x/b)는 주기 bp의 주기함수이다.
   $\cos x$: 주기 2π
   $\cos x/2$: 주기 4π
   $\cos 2x$: 주기 π

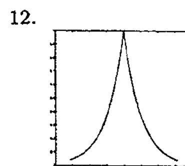
7.


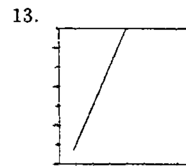
8.


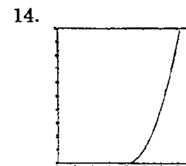
9.


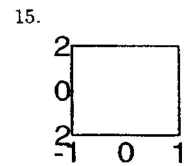
10.


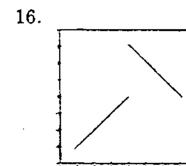
11.


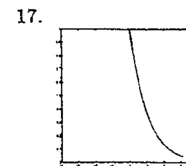
12.


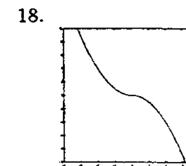
13.


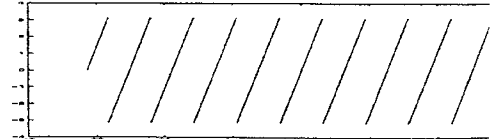
14.


15.


16.


17.


18.


19. 문제 7을 $-10\pi < x < 10\pi$에서 나타내면


다음은 matlab에서 위의 그림을 그린 프로그램이다.

```
for i=-4:4
x=x+2*pi;
f=x;
plot(x,f-2*i*pi);
hold on;
end
x=-10*pi:0.01*pi:-9* pi;
f=x;
```

```
plot(x,f+10*pi);
hold on;
x=9*pi:0.01*pi:10*pi;
f=x;
plot(x,f-10*pi);
hold off
```

문제 7에서 문제 12까지는 f만 바꾸어 주면 되고 문제 13에서 문제 18까지도 비슷하다.

20. 첫번째급수는 x^2를
두번째 급수는 문제 15의 함수를,
세번째 급수는 x를 나타낸다.

10.2. Fourier Series

1번부터 16번까지 '$m \geq 0$'라 가정하자.

1. $a_0 = \frac{1}{2}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos nx dx$
$= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{if } n = 4m+3 \\ 0 & \text{if } n = 4m+2, 4m+4 \end{cases}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin nx dx$
$= 0$
$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots)$

2. $a_0 = \frac{1}{4}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx dx$
$= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ -\frac{1}{n\pi} & \text{if } n = 4m+3 \\ 0 & \text{if } n = 4m+2, 4m+4 \end{cases}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin nx dx$
$= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1, 4m+3 \\ \frac{2}{n\pi} & \text{if } n = 4m+2 \\ 0 & \text{if } n = 4m+4 \end{cases}$
$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots)$
$+ \frac{1}{\pi}(\sin x + \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{2}{6}\sin 6x + \cdots)$

3. $a_0 = \frac{k}{2}$
$a_n = \frac{k}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx = 0$
$b_n = \frac{k}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$
$= \begin{cases} \frac{2k}{n\pi} & \text{if } n = 2m+1 \\ 0 & \text{if } n = 2m+2 \end{cases}$
$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

4. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2}\cos nx dx$
$- \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\cos nx dx$
$= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ \frac{2}{n\pi} & \text{if } n = 4m+3 \\ 0 & \text{if } n = 4m+4, 4m+2 \end{cases}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2}\sin nx dx$
$- \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\sin nx dx$
$= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{if } n = 4m+2 \\ 0 & \text{if } n = 4m+4, 4m+1, 4m+3 \end{cases}$
$f(x) = -\frac{2}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots)$
$+ \frac{2}{\pi}(\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

5. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx$
$= \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{if } n = 2m+2 \\ \frac{2}{n} & \text{if } n = 2m+1 \end{cases}$
$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots)$

6. $a_0 = \pi$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{n}$
$f(x) = \pi - 2(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots)$

7. $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx dx$
$= \begin{cases} \frac{4}{n^2} & \text{if } n = 2m+2 \\ -\frac{4}{n^2} & \text{if } n = 2m+1 \end{cases}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx dx = 0$
$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + \cdots)$

8. $a_0 = \frac{4\pi^2}{3}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx dx = \frac{4}{n^2}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx dx = (-1)^n\frac{4\pi}{n}$
$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4(\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + \cdots)$
$- 4\pi(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots)$

9. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\cos nx dx = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\sin nx dx$
$= 2(\frac{\pi^2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{6(-1)^n}{n^3})$
$f(x) = 2((\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3})\sin x - (\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3})\sin 2x + (\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{3^3})\sin 3x + \cdots)$

10. $a_0 = \frac{\pi}{2}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos nx dx$
$= \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2m+2 \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{if } n = 2m+1 \end{cases}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\sin nx dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$
$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$
$+ 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots)$

11. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx$
$= \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2m+2 \\ -\frac{4}{n\pi} & \text{if } n = 2m+1 \end{cases}$
$f(x) = -\frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

12. $a_0 = -\frac{1}{4}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} - \cos nx dx$

$= \begin{cases} 0 & \text{if } n = 4m+4, 4m+2 \\ -\frac{1}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ \frac{1}{n\pi} & \text{if } n = 4m+3 \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} -\sin nx dx$

$= \begin{cases} -\frac{1}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1, 4m+3 \\ -\frac{2}{n\pi} & \text{if } n = 4m+2 \\ 0 & \text{if } n = 4m+4 \end{cases}$

$f(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots)$
$- \frac{1}{\pi}(\sin x + \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$

13. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos nx dx$
$= \begin{cases} 0 & \text{if } n = 4m+4, 4m+2 \\ \frac{4}{n\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ -\frac{4}{n\pi} & \text{if } n = 4m+3 \end{cases}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sin nx dx = 0$

$f(x) = \frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots)$

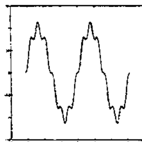
14. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi - x)\cos nx dx$
$= 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(\pi - x)\sin nx dx$
$= \begin{cases} 0 & \text{if } n = 4m+4, 4m+2 \\ \frac{4}{n^2\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{if } n = 4m+3 \end{cases}$
$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x + \cdots)$

15. $a_0 = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos nx dx = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx dx$
$= \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{if } n = 4m+4 \\ \frac{2}{n^2\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ \frac{1}{n} & \text{if } n = 4m+2 \\ -\frac{2}{n^2\pi} & \text{if } n = 4m+3 \end{cases}$
$f(x) = \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots)$

16. $a_0 = \frac{\pi^2}{6}$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\pi^2}{4}\cos nx dx$
$= \begin{cases} \frac{2}{n^2} & \text{if } n = 4m+4 \\ -\frac{4}{n^3\pi} & \text{if } n = 4m+1 \\ -\frac{2}{n^2} & \text{if } n = 4m+2 \\ \frac{4}{n^3\pi} & \text{if } n = 4m+3 \end{cases}$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{\pi^2}{4}\sin nx dx$
$= 0$
$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{2^2}\cos 2x + \frac{4}{3^3\pi}\cos 3x + \frac{2}{4^2}\cos 4x - \frac{\pi}{5^3}\cos 5x + \cdots$

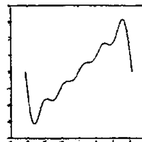
17. f(x)의 급수전개 s(x) 는
$s(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{(4m+1)\pi}\cos(4m+1)x - \frac{2}{(4m+3)\pi}\cos(4m+3)x$
이므로
$s(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = \frac{f(-\frac{1}{2}-0)+f(-\frac{1}{2}+0)}{2}$
$s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = \frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}$

18. 적분값은 $\sin a - \frac{1}{7}\sin 7a$이다. 그래프로 그려보면



그림에서와 같이 $a = \pi$에서의 값이 0이다.

19. 문제5에서
$f(x) = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x$
의 그래프를 그리면



20. 부분적분.
$\int_{-L}^{L} f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} f(x)g'(x)dx$
우함수와 기함수의 적분에는 적분구간 역시 중요하다.

10.3. Functions of Any period p=2L

1. $a_0 = 0$
$a_n = -\int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx + \int_0^1\cos n\pi x dx = 0$
$b_n = -\int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx + \int_0^1\sin n\pi x dx$
$= \frac{-2+2(-1)^n}{n\pi}$
$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\cos 5\pi x + \cdots)$

2. $a_0 = 0$
$a_n = \int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx - \int_0^1\cos n\pi x dx = 0$
$b_n = \int_{-1}^{0}\sin n\pi x dx - \int_0^1\sin n\pi x dx = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
$f(x) = -\frac{4}{\pi}(\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\cos 5\pi x + \cdots)$

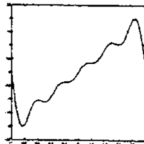
3. $a_0 = 1$
$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 2\cos\frac{n\pi}{2}x dx = 0$
$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 2\sin\frac{n\pi}{2}x dx = \frac{2-2(-1)^n}{n\pi}$
$f(x) = 1 + \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi x + \frac{1}{5}\sin\frac{5}{2}\pi x + \cdots)$

4. $a_0 = 1$
$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\cos\frac{n\pi}{2}x dx = \frac{4(-1)^n - 4}{n^2\pi^2}$
$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\sin\frac{n\pi}{2}x dx = 0$
$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi}(\cos\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{9}\cos\frac{3}{2}\pi x + \frac{1}{25}\cos\frac{5}{2}\pi x + \cdots)$

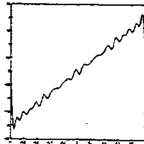
5. $a_0 = 0$
$a_n = \int_{-1}^{1} 2x\cos n\pi x dx = 0$
$b_n = \int_{-1}^{1} 2x\sin n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$
$f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \cdots)$

6. $a_0 = \frac{2}{3}$
$a_n = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\cos n\pi x dx = \frac{-4(-1)^n}{n^2\pi^2}$
$b_n = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)\sin n\pi x dx = 0$
$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots)$

7. $a_0 = 1$
$a_n = \int_{-1}^{1} 3x^2 \cos n\pi x dx = \frac{12(-1)^n}{n^2\pi^2}$
$b_n = \int_{-1}^{1} 3x^2 \sin n\pi x dx = 0$
$f(x) = 1 - \frac{12}{\pi^2}(\cos\pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \cdots)$
8. $a_0 = \frac{1}{4}$
$a_n = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(\frac{1}{2} + x)\cos 2n\pi x dx$
$+ 2\int_0^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2} + x)\cos 2n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2\pi^2}$
$b_n = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(\frac{1}{2} + x)\sin 2n\pi x dx$
$+ 2\int_0^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2} + x)\sin 2n\pi x dx = 0$
$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}(\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 6\pi x + \frac{1}{25}\cos 10\pi x + \cdots)$
9. $a_0 = \frac{1}{4}$
$a_n = \int_0^1 x\cos n\pi x dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$
$b_n = \int_0^1 x\sin n\pi x dx = \frac{(-1)^n}{n\pi}$
$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}(\cos\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \frac{1}{25}\cos 5\pi x + \cdots)$
$+ \frac{1}{\pi}(\sin\pi x - \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \cdots)$
10. $a_0 = 0$
$a_n = \int_0^1 x\cos n\pi x dx + \int_1^2 (1-x)\cos n\pi x dx$
$= \frac{2(-1)^n - 2}{n^2\pi^2}$
$b_n = \int_0^1 x\sin n\pi x dx + \int_1^2 (1-x)\sin n\pi x dx$
$= \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$
$f(x) = -\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x + \frac{1}{25}\cos 5\pi x + \cdots)$
$+ \frac{2}{\pi}(\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \cdots)$
11. $a_0 = 2$
$a_n = 2\int_0^1 \pi\sin\pi x\cos 2n\pi x dx = \frac{4n}{4n^2-1}$
$b_n = 2\int_0^1 \pi\sin\pi x\sin 2n\pi x dx = 0$
$f(x) = 2 - 4(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\pi x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\pi x + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\pi x + \cdots)$
12. $a_0 = 0$
$a_n = \int_{-1}^{1} \frac{\pi x^3}{2}\cos n\pi x dx = 0$
$b_n = \int_{-1}^{1} \frac{\pi x^3}{2}\sin n\pi x dx = (-1)^{n+1}(\frac{1}{n} - \frac{6}{n^3\pi^2})$
$f(x) = (1 - \frac{6}{\pi^2})\sin\pi x - (\frac{1}{2} - \frac{6}{2^3\pi^2})\sin 2\pi x + (\frac{1}{3} - \frac{6}{3^3\pi^2})\sin 3\pi x + \cdots)$
13. $\cos(\frac{n\pi(x+2L)}{L}) = \cos(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi) = \cos(\frac{n\pi x}{L})$
$\sin(\frac{n\pi(x+2L)}{L}) = \sin(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi) = \sin(\frac{n\pi x}{L})$
이므로 $\cos(\frac{n\pi x}{L}), \sin(\frac{n\pi x}{L})$는 주기 L의 주기 함수이다.
14. $b_n = 0, a_0 = \frac{V_0}{\pi}$
$a_n = 100\int_{-1/200}^{1/200} V_0\cos 100\pi t\cos 100n\pi t dt$
$= 50V_0\int_{-1/200}^{1/200}\cos 100(n+1)\pi t dt +$
$50V_0\int_{-1/200}^{1/200}\cos 100(n-1)\pi t dt$
$V(t) = \frac{V_0}{\pi} + \frac{V_0}{2}\cos 100\pi t + \frac{2V_0}{\pi}(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 200\pi t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 400\pi t + \frac{1}{5\cdot 7}\cos 600\pi t - \cdot + \cdots)$
15. $\tilde{f}(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$
이라하면 10.2절의 Ex1에 의해 $\tilde{f}(t)$의 급수전개는
$\tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots)$
이제 $t = \pi x$라 하면
$f(x) = \tilde{f}(\pi x) = \frac{4}{\pi}(\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \cdots)$.
16. 10.2절의 문제7에서, x 대신 t를 대입하면
$\tilde{f}(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t + - \cdots)$
$t = \pi x$라 하면 $\tilde{f}(t) = \pi^2 x^2$이다.양변에 $\frac{3}{\pi^2}$을 곱하면
$f(x) = 3x^2 = 1 - \frac{12}{\pi^2}(\cos\pi x - \frac{1}{4}\cos 2\pi x + - \cdots)$.
17. $\tilde{f}(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$
이라 하면 10.2절의 Ex1에 의해 $\tilde{f}(t)$의 급수전개는
$\tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots)$
$t = \frac{\pi x}{2}$라 하면
$f(x) = \tilde{f}(\frac{\pi x}{2}) + 1 = 1 + \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \cdots)$
18. 우선 $0 < a < 2L$이라 가정하자.
$f(x), \cos(\frac{n\pi x}{L}), \sin(\frac{n\pi x}{L})$이 모두 주기2L의 주기함수라는 사실을 이용하면
$\frac{1}{2L}\int_{a-L}^{a+L} f(x)dx$
$= \frac{1}{2L}\int_{a-L}^{L} f(x)dx + \frac{1}{2L}\int_{L}^{a+L} f(x)dx$
$= \frac{1}{2L}\int_{a-L}^{L} f(x)dx + \frac{1}{2L}\int_{-L}^{a-L} f(x)dx$
$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = a_0$
$\frac{1}{L}\int_{a-L}^{a+L} f(x)\cos n\pi x dx$
$= \frac{1}{L}\int_{a-L}^{L} f(x)\cos n\pi x dx + \frac{1}{L}\int_{L}^{a+L} f(x)\cos n\pi x dx$
$= \frac{1}{L}\int_{a-L}^{L} f(x)\cos n\pi x dx + \frac{1}{L}\int_{-L}^{a-L} f(x)\cos n\pi x dx$
$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos n\pi x dx = a_n$
$\frac{1}{L}\int_{a-L}^{a+L} f(x)\sin n\pi x dx$
$= \frac{1}{L}\int_{a-L}^{L} f(x)\sin n\pi x dx + \frac{1}{L}\int_{L}^{a+L} f(x)\sin n\pi x dx$
$= \frac{1}{L}\int_{a-L}^{L} f(x)\sin n\pi x dx + \frac{1}{L}\int_{-L}^{a-L} f(x)\sin n\pi x dx$
$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin n\pi x dx = b_n$
만약 a= 2kL + b 이고 $0 < b < 2L$이라 하면 ,
$\int_{a-L}^{a+L} f(x)dx = \int_{b-L}^{b+L} f(x)dx$
$\int_{a-L}^{a+L} f(x)\cos n\pi x dx = \int_{b-L}^{b+L} f(x)\cos n\pi x dx$
$\int_{a-L}^{a+L} f(x)\sin n\pi x dx = \int_{b-L}^{b+L} f(x)\sin n\pi x dx$
그러므로 $a \leq 0$ 또는 $a \geq 2L$일 때도 성립한다.
19. 문제5의 함수 $2x(-1 < x < 1)$을 근사해보면
$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin\pi x - \frac{2}{\pi}\sin 2\pi x + \frac{4}{3\pi}\sin 3\pi x - \frac{1}{\pi}\sin 4\pi x + \frac{4}{5\pi}\sin 5\pi x$



20. $2x(-1 < x < 1)$를 N=20까지의 푸리에 급수로 근사하면 다음의 그래프를 얻는다.



x=-1,1에서 보는 바와 같이 불연속점에서 푸리에 급수가 심하게 진동하는 깁스 현상을 볼 수 있다.

10.4. Even and Odd Functions. Half range Expansions

1. 우함수:$|x^3|, x^2\cos nx, \cosh x$
   기함수: $x\cos nx, \sinh x, x|x|$
   우함수도 기함수도 아닌 함수: $\sin x + \cos x$
2. 우함수:$|x|, e^{x^2}, sin^2 x, x\sin x, e^{-|x|}$,
   기함수:$x\cos x$
   우함수도 기함수도 아닌 함수:$x + x^2, e^x, lnx$
3. 우함수도 기함수도 아니다
4. 우함수도 기함수도 아니다
5. 우함수
6. 우함수
7. 기함수
8. 우함수도 기함수도 아니다
9. 우함수도 기함수도 아니다
10. (a)
   우함수의 합과 곱:우함수
   기함수의 합:기함수
   기함수의 짝수번 곱:우함수
   기함수의 홀수번 곱:기함수
   우함수와 기함수의 곱:기함수
   기함수의 절대값:우함수
   f(x) + f(-x):우함수
   f(x) -f(-x):기함수
   (b)
   $e^k x = \cosh x + \sinh x$
   $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}$
   $\sin(x+k) = \sin k\cos x + \cos k \sin x$
   $\cosh(x+k) = \cosh k\cosh x + \sinh k \sinh x$
   (c)
   f(-x)=f(x) 과 f(-x)=f(x) 을 동시에 만족하는 것은 f=0 뿐이다.
   (d)
   $\cos^3 x$:우함수,
   $\sin^3 x$: 기함수
   $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$
   $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$
11. $\frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \cdots)$
12. $\pi - \frac{8}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$
13. $\frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \cdots)$
14. $-\frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$
   $+ 2(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots)$
15. $\frac{\pi^2}{6} - 2(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \cdots)$
16. $36(\frac{1}{1^3}\sin x - \frac{1}{2^3}\sin 2x + \frac{1}{3^3}\sin 3x - \cdots)$
17. x=0이라 하면
   $\frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots) = k$
   이다. 그러므로 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$
18. 우선 $x = \pi$이라 하면
   $\frac{\pi^2}{6} + 2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\cdots) = \frac{\pi^2}{2}$
   이다. 그러므로
   $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$
19. x=0이라 하면
   $\frac{\pi^2}{6} - 2(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \cdots) = 0$
   이다. 그러므로
   $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}$
20. 코사인 급수
   f(x)= 1
   사인 급수
   $f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{L} + \cdots)$
21. 코사인 급수
   $f(x) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots)$
   사인 급수
   $f(x) = \frac{2L}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\sin 2\pi x L + \frac{1}{3}\sin 3\pi x L$
   $- \frac{1}{4}\sin 4\pi x + \cdots)$
22. 코사인 급수
   $f(x) = \frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi x}{L}$
   $+ \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{16}\cos\frac{4\pi x}{L} + \cdots)$
   사인 급수
   $f(x) = \frac{2L^2}{\pi}[(1 - \frac{\pi^2}{4})\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{L}$
   $+ (\frac{1}{3} - \frac{4}{3^3\pi^2})\sin\frac{3\pi x}{L} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi x}{L} + \cdots]$
23. 코사인 급수
   $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$
   사인 급수
   $f(x) = 2(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots]$
24. 코사인 급수
   $f(x) = \frac{L^3}{4} + \frac{6L^3}{\pi^2}[(\frac{4}{\pi^2} - 1)\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{L}$
   $+ (\frac{4}{3^4\pi^2} - \frac{1}{3^2})\cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots]$
   사인 급수
   $f(x) = \frac{2L^3}{\pi^3}[(\frac{\pi^2}{1} - \frac{6}{1^3})\sin\frac{\pi x}{L} - (\frac{\pi^2}{2} - \frac{6}{2^3})\sin 2\pi x L$
   $+ (\frac{\pi^2}{3} - \frac{6}{3^3})\sin\frac{3\pi x}{L} - + \cdots]$
25. 코사인 급수
   $f(x) = \frac{e^L - 1}{L} - [\frac{2L}{\pi^2 + L^2}(1 + e^L)\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{2L}{4\pi^2 + L^2}(1 - e^L)\cos\frac{2\pi x}{L} + \frac{2L}{9\pi^2 + L^2}(1 + e^L)\cos\frac{3\pi x}{L} + \cdots]$
   사인 급수
   $f(x) = \frac{2\pi}{\pi^2 + L^2}(1 + e^L)\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{4\pi}{(2\pi)^2 + L^2}(1 - e^L)\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{6\pi}{(3\pi)^2 + L^2}(1 + e^L)\sin\frac{\pi x}{L} + \cdots$

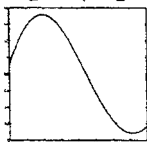
10.5. Complex Fourier Series. Optional

1. 먼저 $r=\sqrt{x^2+y^2}, \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ 이라 하면
$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$이다.
2. $-\frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(2n+1)ix}$
3. $i\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}$
4. $\frac{1}{2}-\frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{(2n+1)ix}$
5. $\pi+\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}$
6. $\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$
7. f(x)가 우함수이면
$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx+\frac{1}{2L}\int_{-L}^0 f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx+\frac{1}{2L}\int_0^L f(-x)e^{\frac{in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx+\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)[e^{\frac{-in\pi x}{L}}+e^{\frac{in\pi x}{L}}]dx$
이다. 그런데 $e^{\frac{-in\pi x}{L}}+e^{\frac{in\pi x}{L}}$가 실함수이므로, c_n도 실수이다.
f(x)가 기함수이면
$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx+\frac{1}{2L}\int_{-L}^0 f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx+\frac{1}{2L}\int_0^L f(-x)e^{\frac{in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}}dx-\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)e^{\frac{in\pi x}{L}}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_0^L f(x)[e^{\frac{-in\pi x}{L}}-e^{\frac{in\pi x}{L}}]dx$
이다. 또한 $e^{\frac{-in\pi x}{L}}-e^{\frac{in\pi x}{L}}$ 순허수 값을 갖는 함수이므로 c_n도 순허수이다.
8. 문제 5를 이용하면
$f(x)=\pi+\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}$
$=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{-n}e^{-inx}$
$=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}(e^{inx}-e^{-inx})$
$=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n}(2i\sin nx)$
$=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n}\sin nx$
$=\pi-2(\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots)$
9. $c_0=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=a_0$
c_n+c_{-n}
$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-inx}dx+\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{inx}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)(e^{-inx}+e^{inx})dx$
$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)2\cos nxdx$
$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos nxdx=a_n$
$i(c_n-c_{-n})$
$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)ie^{-inx}dx-\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)ie^{inx}dx$
$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)i(e^{-inx}-e^{inx})dx$
$=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)i(-2i\sin nx)dx$
$=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin nxdx=b_n$
10. n=m 이면
$\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}1dx=2\pi$
그리고$n\neq m$ 이면
$\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)x}dx$
$=\frac{1}{i(n-m)}(e^{i(n-m)\pi}-e^{-i(n-m)\pi})$
$=\frac{1}{i(n-m)}2i\sin(n-m)\pi=0$
그러므로
$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}dx=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-m)x}dx$
$=2\pi c_m$
에 의해 $c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}dx$ 이다.

10.6. Forced Oscilations

1. 임의의 k와 c에 대해
$A_n=\frac{4(k-n^2)}{n^2\pi D}, B_n=\frac{4c}{n\pi D}$, 이때 $D=(k-n^2)^2+(cn)^2$이다.
$C_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}=\frac{4}{n^2\pi\sqrt{D}}$
이므로 C_n이 n에서 최대값을 가질 필요 충분 조건은 $n\times D$이 n에서 최소값을 갖는 것이다. 만약 $c=0.02$이고 $k=9$이라면 , $n\times D$은 $n\geq 3$일 때 증가함수이다. 그러므로 $n\times D$는 $n=1$이나 $n=3$일 때 최소값을 갖는다.
$1(9-1)^2+1(0.02\cdot 1)^2=64.0004$
$3(9-9)^2+3(0.02\cdot 9)^2=0.0972$
이므로 $n\times D$는 $n=3$일 때 최소값을 갖는다.
만약 $c=0.02$이고 $k=49$이면 또한 $n\times D$는 $n\geq 7$일 때 증가함수 이므로 $1\leq n\leq 7$일 때 최소값을 갖는다. 첫번째 부분은 $1\leq n\leq 7$에서 감소함수이고, 두번째 부분은 $1\leq n\leq 7$에서 $7(0.02\cdot 49)^2<7$이므로7보다 작다. 하지만 첫번재 부분의 차이는 적어도 $5(49-25)^2-7(49-49)^2=2880$이상이므로 $n\times D$는 $n=7$에서 최소값을 갖는다.
위에서 본 바와 같이 c가 k에 비해 상대적으로 작으면, C_n은 $\sqrt{k}$ 근처에서 최대값을 갖는다. 한편 c가 k에 비해 작지 않다해도 C_n은 $n\leq\sqrt{k}+1$에서 최대값을 갖는다.
2. 먼저 $r'(t)=\frac{-4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots)$
이므로 $y''+cy'+ky=\frac{-4}{n\pi}\sin nx\ (n=1,3,5,\cdots)$
이다. 이 때 $y=A_n'\cos nx+B_n'\sin nx$라 하면
$A_n'=\frac{-4c}{\pi D}, B_n'=\frac{-4(k-n^2)^2}{n\pi D}$ 이다. 이때 $D=(k-n^2)^2+(nc)^2$이다.
$C_n'=\frac{4}{n\pi\sqrt{D}}$이므로 $C'n=n\cdot C_n$이다.
만약 $c=0.02$이고 $k=25$이라면 $C'n$ 도 $n=5$에서 최대값을 갖는다. 하지만 최대값은 C_5의 5배이다.
3. $y=\frac{1}{\omega^2-1}\sin t+C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$
$\omega=0.5: y=-1.33\sin t+C_1\cos 0.5t+C_2\sin 0.5t$
$\omega=0.7: y=-1.96\sin t+C_1\cos 0.7t+C_2\sin 0.7t$
$\omega=0.9: y=-5.3\sin t+C_1\cos 0.9t+C_2\sin 0.9t$
$\omega=1.1: y=4.8\sin t+C_1\cos 1.1t+C_2\sin 1.1t$
$\omega=1.5: y=0.8\sin t+C_1\cos 1.5t+C_2\sin 1.5t$
$\omega=2: y=0.33\sin t+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$
$\omega=10: y=0.01\sin t+C_1\cos 10t+C_2\sin 10t$
4. $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$
$+\frac{1}{\omega^2-\alpha^2}\cos\alpha t+\frac{1}{\omega^2-\beta^2}\cos\beta t$
5. $y=\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{\omega^2-n^2}\sin nt+C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$

6. $y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{1}{\omega^2-1}\sin t + \frac{1}{9(\omega^2-9)}\sin 3t + \frac{1}{25(\omega^2-25)}\sin 5t$
$\omega = 0.5 : y = C_1\cos 0.5t + C_2\sin 0.5t - 1.33\sin t - 0.013\sin 3t - 0.002\sin 5t$
$\omega = 0.9 : y = C_1\cos 0.9t + C_2\sin 0.9t - 5.3\sin t - 0.014\sin 3t - 0.002\sin 5t$
$\omega = 1.1 : y = C_1\cos 1.1t + C_2\sin 1.1t + 4.8\sin t - 0.014\sin 3t - 0.002\sin 5t$
$\omega = 2.0 : y = C_1\cos 2.0t + C_2\sin 2.0t + 0.33\sin t - 0.02\sin 3t - 0.002\sin 5t$
$\omega = 2.9 : y = C_1\cos 2.9t + C_2\sin 2.9t + 0.13\sin t - 0.19\sin 3t - 0.002\sin 5t$
$\omega = 3.1 : y = C_1\cos 3.1t + C_2\sin 3.1t + 0.12\sin t + 0.18\sin 3t - 0.003\sin 5t$
$\omega = 4.0 : y = C_1\cos 4.0t + C_2\sin 4.0t + 0.07\sin t + 0.02\sin 3t - 0.004\sin 5t$
$\omega = 4.9 : y = C_1\cos 4.9t + C_2\sin 4.9t + 0.04\sin t + 0.01\sin 3t - 0.04\sin 5t$
$\omega = 5.1 : y = C_1\cos 5.1t + C_2\sin 5.1t + 0.04\sin t + 0.01\sin 3t + 0.04\sin 5t$
$\omega = 6.0 : y = C_1\cos 6.0t + C_2\sin 6.0t + 0.03\sin t + 0.004\sin 3t + 0.004\sin 5t$
$\omega = 8.0 : y = C_1\cos 8.0t + C_2\sin 8.0t + 0.02\sin t + 0.002\sin 3t + 0.001\sin 5t$
7. $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\omega^2-1}\cos t + \frac{1}{9(\omega^2-9)}\cos 3t + \cdots\right)$
8. $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{1\cdot 3(\omega^2-4)}\cos 2t - \frac{1}{3\cdot 5(\omega^2-16)}\cos 4t + \cdots$
9. 문제 3에서 $\omega = 0.5$일 때 $C_1 = C_2 = 1$로 하고 그래프를 그려보면



10. 2.11절의 그림57과 같다.
11. $y = A_1\cos t + B_1\sin t + A_2\cos 2t + B_2\sin 2t + \cdots + A_N\cos Nt + B_N\sin Nt$,
$A_n = \frac{1}{D}((1-n^2)a_n - cnb_n)$,
$B_n = \frac{1}{D}(cna_n + (1-n^2)b_n)$,
$D = (n^2-1) + c^2n^2$
12. $y = A_1\cos t + B_1\sin t + A_3\cos 3t + B_3\sin 3t + \cdots$,
$A_n = \frac{-cnb_n}{D}$,
$B_n = \frac{(1-n^2)b_n}{D}$,
$D = (1-n^2)^2 + n^2c^2$,
$b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = \frac{-1}{9}, b_4 = 0, b_5 = \frac{1}{25}, \cdots$.
13. $y = A_1\cos t + B_1\sin t + A_2\cos 2t + B_2\sin 2t + \cdots$,
$A_n = \frac{(-1)^n c}{n^2 D}$,
$B_n = \frac{(-1)^{n+1}(1-n^2)}{n^3 D}$,
$D = (1-n^2)^2 + (cn)^2$
14. $I = A_1\cos t + B_1\sin t + A_3\cos 3t + B_3\sin 3t + {}+A_5\cos 5t + B_5\cos 5t \cdots$,
$A_n = \frac{80(10-n^2)}{\pi n^2 D}$,
$B_n = \frac{800}{n\pi D}$,
$D = (10-n^2)^2 + 100n^2$
$I = 1.266\cos t + 1.406\sin t + 0.003\cos 3t + 0.094\sin 3t - 0.006\cos 5t + 0.019\sin 5t - 0.003\cos 7t + 0.006\sin 7t + \cdots$.
15. $I = A_1\cos t + B_1\sin t + A_2\cos 2t + B_2\sin 2t + \cdots$,
$A_n = (-1)^{n+1}\frac{240(10-n^2)}{n^2 D}$
$B_n = (-1)^{n+1}\frac{2400}{nD}$
$D = (10-n^2)^2 + 100n^2$

10.7. Approximation by Trigonometric Polynomials

1. $f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x \cdots)$
$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2]$
$= 2\pi - \frac{16}{\pi}(1 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{5})^2 + \cdots)$
$N = 1,2 : 1.19$
$N = 3,4 : 0.62$
$N = 5,6 : 0.42$
$N = 7,8 : 0.31$
$N = 9,10 : 0.25$
$N = 11,12 : 0.21$
$N = 13,14 : 0.18$
2. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$
$E^* = \frac{2\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{2} - \frac{4^2}{\pi}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots)$
$N = 1,2 : 0.075$
$N = 3,4 : 0.012$
$N = 5,6 : 0.0037$
3. $f(x) = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \cdots$
$E^* = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots)$
$N = 1 : 8.104$
$N = 2 : 4.963$
$N = 3 : 3.567$
$N = 4 : 2.781$
$N = 5 : 2.279$
4. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + \cdots)$
$E^* = \frac{2\pi^5}{5} - \frac{2\pi^6}{9} - 16\pi(1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots)$
$N = 1 : 4.14$,
$N = 2 : 1.00$,
$N = 3 : 0.38$,
$N = 4 : 0.18$,
$N = 5 : 0.10$
5. $f(x) = 2(\pi^2-6)\sin x + \frac{2}{2^3}(-2^2\pi^2+6)\sin 2x + \frac{2}{3^3}(3^2\pi^2-6)\sin 3x + \cdots$
$E^* = \frac{2}{7}\pi^7 - \pi[\frac{4}{1^6}(1^4\pi^4 + 36 - 12\cdot 1^2\pi^2) + \frac{4}{2^6}(2^4\pi^4 + 36 - 12\cdot 2^2\pi^2) + \frac{4}{3^6}(3^4\pi^4 + 36 - 12\cdot 3^2\pi^2) + \cdots]$
$N = 1 : 863$
$N = 2 : 675$
$N = 3 : 455$

$N = 4 : 326$
$N = 5 : 266$ $N = 6 : 219$

6. $f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x + \cdots)$
$E^* = \frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4}\cdots)$
$N = 1, 2 : 0.075,$
$N = 3, 4 : 0.012,$
$N = 5 : 0.0037$

7. $f(x) = \frac{2}{1^2\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{3^2\pi}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \cdots$
$E^* = \frac{\pi^3}{12} - \pi(\frac{4}{1^4\pi^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3^4\pi^2} + \frac{1}{4^2}\cdots)$
$N = 1 : 1.31,$
$N = 2 : 0.525,$
$N = 3 : 0.509,$
$N = 4 : 0.313,$
$N = 5 : 0.311$

8. $f(x) = \frac{1}{1^3}\sin x - \frac{1}{2^3}\sin 2x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \cdots$
$E^* = \frac{\pi^7}{945} - \pi(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \cdots)$
$N = 1 : 0.054,$
$N = 2 : 0.0054,$
$N = 3 : 0.0011,$
$N = 4 : 0.00032,$
$N = 5 : 0.00012$

9. 먼저 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2]$ 라고 정의하자. 이 때
$E^*_{N+1} - E^*_N = -\pi[a^2_{N+1} + b^2_{N+1}] \le 0$ 이므로 E_N은 N에 대한 감소함수이다. 문제1에서
$E^*_N = 2\pi - \pi[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\cdots]$
이므로 E^*_N이 0.2 보다 작아지는 N을 찾으면 N=13 이다.

10. (a)
깁스현상 때문에, Problem set 10.3을 보시오.
(b)
문제4에서 연속함수에 대한 E^*의 근사값을 구해보면
4.14,1.00,0.38,0.18,0.10,0.060,0.039,
0.027,0.019,0.014,0.011,0.0086,0.0068,
0.0055,0.0045,0.0037,···
한편 Example1에서 불연속 함수에 대한 E^*의 근사값을 구하면
8.10,4.96,3.57,2.78,2.28,1.93,1.67.1.48.1.32,1.20
그러므로 불연속 함수에대한 푸리에 계수는 $1/n$에 비례하고 연속함수에 대한 푸리에 계수는 $1/n^2$ 나 $1/n^3$에 비례한다.

11. 10.2절의 문제 7에 의해 $f(x) = x^2$ $(-\pi \le x \le \pi)$의 푸리에 급수는
$\frac{\pi^2}{3} + 4(-\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x(-\frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots)$
Parseval's identity를 쓰면
$2(\frac{\pi^2}{3})^2 + 16(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)^2 dx = \frac{2\pi^4}{5}$
그러므로
$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}$

12. 10.2절의 문제 13에 의해 $f(x) = 1$ $(-\pi \le x \le \pi)$의 푸리에 급수는
$\frac{4}{\pi}(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \cdots)$
Parseval's identity를 쓰면
$(\frac{4}{\pi})^2(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2$
그러므로
$4\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$

13. 10.4절의 문제 13에 의해 $f(x)$의 푸리에 급수는
$\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1^4}\sin x - \frac{1}{3^4}\sin 3x + \frac{1}{5^4}\sin 5x + \cdots)$
Parseval's identity를 쓰면
$(\frac{4}{\pi})^2(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2 dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x)^2 dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\pi - x)^2 dx = \frac{\pi^3}{6}$
그러므로
$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$

14. 우선 $f(x) = \cos^2 x$라고 놓으면 삼각함수의 배각공식을 이용하여 다음과 같이 쉽게 푸리에 급수를 얻을 수 있다.
$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$
Parseval's identity를 쓰면
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x dx$
그러므로
$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4 x dx = \frac{3\pi}{4}$

15. 문제 14와 마찬가지로 $f(x) = \cos^3 x$라고 놓으면 삼각함수의 삼배각공식을 이용하여 다음과 같이 쉽게 푸리에 급수를 얻을 수 있다.
$f(x) = \cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$
Parseval's identity를 쓰면
$\frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6 x dx$
그러므로
$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^6 x dx = \frac{5\pi}{8}$

10.8. Fourier Integrals

1. 다음과 같은 함수 $f(x)$를 생각해보자. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \pi e^{-x} & \text{if } x > 0 \end{cases}$
$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-x}\cos\omega x dx$
$= \frac{1}{\omega^2+1}$
$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-x}\sin\omega x dx$
$= \frac{\omega}{\omega^2+1}$
그러므로 정리1에 의해 $f(x) = \int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x + \omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$

2. 다음과 같은 함수 $f(x)$를 생각해보자. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$
$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos\omega x dx$
$= \frac{\sin\omega}{\omega}$
$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\pi}{2}\sin\omega x dx$
$= 0$
그러므로 정리1에 의해 $f(x) = \int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega$

3. 다음과 같은 함수 $f(x)$를 생각해보자. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{if } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{if } x > \pi \end{cases}$
$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\cos\omega x dx$
$= 0$
$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin\omega x dx$
$= \frac{1-\cos\omega\pi}{\omega}$
그러므로 정리1에 의해 $f(x) = \int_0^\infty \frac{(1-\cos\omega\pi)\cos\omega x}{\omega} d\omega$
4. 다음과 같은 함수 $f(x)$를 생각해보자. $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x & \text{if } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$
우함수이므로 (10),(11)을 이용하자. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\cos x\cos\omega x dx$
$= \frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})}{1-\omega^2}$
그러므로 정리1에 의해 $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{\pi\omega}{2})\cos\omega x}{1-\omega^2} d\omega$
5. 함수 $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}(x > 0)$를 생각해보자. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos\omega x dx$
$= \frac{1}{\omega^2+1}$
$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\sin\omega x dx$
$= 0$
그러므로 정리1에 의해 $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+\omega^2} d\omega$
6. 함수 $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x(x > 0)$를 생각해보자.
$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x\cos\omega x dx$
$= 0$
$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos x\sin\omega x dx$
$= \frac{\omega^3}{\omega^4+4}$
그러므로 정리1에 의해 $f(x) = \int_0^\infty \frac{\omega^3\sin\omega x}{\omega^4+4} d\omega$
7. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\omega x dx$
$= \frac{2\sin\omega}{\pi\omega}$
$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega\cos\omega x d\omega$
8. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 x^2\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}(\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{2\cos\omega}{\omega^2} - \frac{2\sin\omega}{\omega^3})$
$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(1-\frac{2}{\omega^2})\sin\omega + \frac{2}{\omega}\cos\omega]\frac{\cos\omega x}{\omega} d\omega$
9. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^a x\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}[\frac{a}{\omega}\sin\omega a + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega a - \frac{1}{\omega^2}]$
$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}[\frac{a}{\omega}\sin\omega a + \frac{1}{\omega^2}\cos\omega a - \frac{1}{\omega^2}]\cos\omega x d\omega$
10. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^a (a^2 - x^2)\cos\omega x dx$
$= \frac{4(\sin a\omega - a\omega\cos a\omega}{\pi\omega^3}$
$f(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty (\sin a\omega - a\omega\cos a\omega)\frac{\cos\omega x}{\omega^3} d\omega$
11. (15)를 이용하여 계산하면
$A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\cos\omega x dx$
$= e^{-\omega}$
$f(x) = \int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x d\omega$
12. $A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (e^{-x} + e^{-2x})\cos\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}(\frac{1}{\omega^2+1} + \frac{2}{\omega^2+4})$
$f(x) = \frac{6}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega^2+2}{\omega^4+5\omega^2+4}\cos\omega x d\omega$
13. $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^a \sin\omega x dx$
$= \frac{2(1-\cos a\omega)}{\pi\omega}$
$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}(1-\cos a\omega)\sin\omega x d\omega$
14. $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^a x\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}(-\frac{a}{\omega}\cos\omega a\frac{1}{\omega^2}\sin\omega a)$
$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega a - a\omega\cos\omega a}{\omega^2}\sin\omega x d\omega$
15. $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\sin\omega x dx$
$= \frac{2\sin\omega}{\pi(1-\omega^2)}$
$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin\omega}{\pi(1-\omega^2)}\sin\omega x d\omega$
16. $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi\omega^2}(\pi\omega - \sin\pi\omega)$
$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega^2}(\pi\omega - \sin\pi\omega)\sin\omega x d\omega$
17. $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^x\sin\omega x dx$
$= \frac{2\omega}{\pi(\omega^2+1)}(1 - e\cos\omega + \frac{e\sin\omega}{\omega})$
$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w}{w^2+1}(1 - e\cos w + \frac{e\sin w}{w})\sin wx dw$
18. $B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 e^{-x}\sin\omega x dx$
$= \frac{2}{\pi e(\omega^2+1)}(\omega - \frac{1}{e}(\omega\cos\omega + \sin\omega))$
$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{ew - w\cos w - \sin w}{e(w^2+1)}\sin wx dw$
19. $Si(u)$의 그래프는 그림 256에 있다.최대값을 갖는 값들은 $Si(\pi), Si(3\pi), Si(5\pi), \cdots$이고, 최소값을 갖는 값들은 $Si(2\pi), Si(4\pi), Si(6\pi), \cdots$이므로 그래프에서 보는 바와 같이 u가 ∞로 갈 때 $\frac{\pi}{2}$로 가는 것을 짐작 할 수 있다. 복소함수 적분에서 *contourintegration*을 이용하면 실제값이 $\frac{\pi}{2}$ 인 것도 보일 수 있다.
20. (a)
(a1)
$\omega a = p$로 놓으면, (11)로 부터 다음을 얻는다.
$f(ax) = \int_0^\infty A(\omega)\cos ax\omega d\omega = \int_0^\infty A(\frac{p}{a})\cos xp\frac{dp}{a}$
다시 p대신 ω를 쓰면 (a1)을 얻는다.
(a2)
(12)에서 $f(v)$대신 $vf(v)$를 쓰면
$B^*(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty vf(v)\sin\omega v dv = -\frac{dA}{d\omega}$
이다. 여기서 마지막 등식을 (10)으로부터 나온다.
(a3)
(a2)와 마찬가지로 (10)을 두번 미분하면
$\frac{d^2A}{d\omega^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f^*(v)\cos\omega v dv, f^*(v) = v^2f(v)$.
(b)
문제7에서

$A = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}$.
그러므로 두번 미분하면
$A'' = \frac{2}{\pi}(2\frac{\sin\omega}{\omega^3} - 2\frac{\cos\omega}{\omega^2} - \frac{\sin\omega}{\omega})$.
(a3)에 의해 위에서와 마찬가지로 다음의 결과를 얻는다.
$x^2 f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(-\frac{2}{\omega^3} + \frac{1}{\omega})\sin\omega$
$+ \frac{2}{\omega^2}\cos\omega]\cos x\omega d\omega$
(c)
문제 7과 비슷하게 풀면 $A(\omega) = \frac{2\sin a\omega}{\pi\omega}$ 이므로 미분에 의해
$B^* = -\frac{dA}{d\omega} = -\frac{2}{\pi}(\frac{a\cos a\omega}{\omega} - \frac{\sin a\omega}{\omega^2})$
이 식은 문제 14와 일치한다.
(d)
(a1),(a2),(a3)와 비슷하게 다음 식을 얻을 수 있다.
(d1)$f(bx) = \frac{1}{b}\int_0^\infty B(\frac{w}{b})\sin x\omega d\omega (b > o)$
(d2)$xf(x) = \int_0^\infty C^*(\omega)\cos x\omega d\omega, C^*(\omega) = \frac{dB}{d\omega}$,
(d3)$x^2 f(x) = \int_0^\infty D^*(\omega)\sin x\omega d\omega, D^*(\omega) - \frac{d^2B}{d\omega^2}$

10.9. Fourier Cosine and Sine Transform

1. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 f(x)\cos wx dx - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^2 f(x)\cos wx dx$
$= \frac{\sqrt{2}}{w\sqrt{\pi}}(2\sin w - \sin 2w)$
2. (3)과 문제 1을 이용하면
$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin w}{w}\cos wx dx$
$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2w}{w}\cos wx dx$
10.8절의 문제 2에 첫 번째 부분은 $0 < x < 1$ 이면 2이고, $x > 1$이면 0임을 알 수 있다. $2w = u$라고 하면 두번째 부분은 $0 < \frac{x}{2} < 1$ 즉 $0 < x < 2$이면 -1이고,$x > 2$이면 0임을 알 수있다. 이 사실을 종합하면 f(x)를 얻을 수 있다.
3. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a x\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{a}{w}\sin aw + \frac{1}{w^2}(1 - \cos aw))$
4. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-ax}\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w^2+a^2}$
5. 10.8절의 문제5를 이용하면
$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos wx}{1+x^2}dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\pi}{2}e^{-w}$
$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-w}(if\ w > 0)$
6. 직접 적분하거나 문제 5를 이용하면
$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-w}\cos wx dw$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}$
7. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 x^2\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\frac{\sin w}{w} + \frac{2\cos w}{w^2} - \frac{2\sin w}{w^3})$
8. $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos\frac{1}{2}\pi x}{1-x^2}\cos wx dx$
$= \begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos w & \text{if } |w| < \frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{if } |w| > \frac{\pi}{2}\end{cases}$
9. 10.8절의 예제 2를 이용하면 $\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cos wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{if } 0 \le w < 1\\ \frac{\pi}{4} & \text{if } w = 1\\ 0 & \text{if } w > 1\end{cases}$
5.3절의 결과를 이용하면
$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}u(1 - w)$
10. 왜냐하면
$\int_0^\infty \cos wx dx = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin wx}{w}$
$\int_0^\infty \sin wx dx = 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{\cos wx}{w}$
의 값이 고정된 w에 대하여 존재하지 않기 때문이다.
11. $\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int^\infty e^{-ax}\sin wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{w^2+a^2}$
12. $F_s((e^{-ax})'') = -w^2F_s(e^{-ax}) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}w$
$= (a^2 + w^2)F_s(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
그러므로
$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{w^2+a^2}$
13. $\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 x^2\sin wx dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\{(2 - w^2)\cos w + 2w\sin w - 2\}\frac{1}{w}^3$
14. 10.8절의 문제 3을 이용하면
$\hat{f}_s(\frac{1-\cos\pi x}{\lambda}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{1-\cos\pi x}{\lambda}\sin wx dx$
$= \begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{if } 0 < w < \pi\\ 0 & \text{if } w > \pi\end{cases}$
15. (8a)를 이용하면
$-F_c(e^{-x}) = F_c((e^{-x})')$
$= w\hat{f}_s(e^{-x}) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 1$
Table I의 3을 이용하면
$F_s(e^{-x}) = -\frac{1}{w}F_c(e^{-x}) + \frac{1}{w}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}$
16. (8b)와 Table I의 4 를 이용하면
$F_s(xe^{-x^2/2}) = -F_s((e^{-x^2/2})') = wF_s(e^{-x^2/2})$
$= we^{-w^2/2}$
17. 10.8절의 문제6을 이용하면
$F_s(\frac{x^3}{x^4+4}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{x^3}{x^4+4}\sin wx dx$
$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-w}cosw$
18. Table II의 4식과 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$라는 사실을 이용하면
$F_s(\frac{1}{\sqrt{x}}) = F_s(x^{1/2-1}$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(1/2)}{w^{1/2}}\sin\frac{\pi}{4}$
$= \frac{1}{\sqrt{w}}$

19. $\int_0^\infty e^x \cos wx dx = \frac{1}{w^2+1}[(\lim_{x\to\infty} e^x(w \sin wx + \cos wx) - 1]$과 $\int_0^\infty e^x \sin wx dx$
$= \frac{1}{w^2+1}[(\lim_{x\to\infty} e^x(-w\cos wx + \sin wx) + w]$ 의 값이 존재하지 않기 때문이다.

20. 이 방법에는 적분과 식 (8),(9) 와 10.11절의 Table들이 필요하다. 10.8절의 적분 들도 필요하다.푸리에 코사인 변환과 푸리에 사인 변환에 대한 체계적인 표시는 다른 변환에 대한 감각을 익히게 한다.

10.10. Fourier Transform

1. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-iwx}dx$
$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}w}(e^{-iwb} - e^{-iwa})$

2. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-kx}e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+wi)}$

3. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^x e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)}(e^{a(1-iw)} - e^{-a(1-iw)})$

4. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{kx}e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(k-wi)}$

5. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a xe^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{w^2\sqrt{2\pi}}\{(1+iwa)e^{-iwa} - 1\}$

6. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 x^2e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{w^3\sqrt{2\pi}}\{(w^2i + 2w - 2i)e^{-iw} + 2i\}$

7. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty xe^{-x}e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)^2}$

8. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^x e^{-iwx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x}e^{-iwx}dx +$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$

9. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{0} -e^{-iwx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{-iwx}dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i}{w}(\cos wa - 1)$

10. $\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{0} -xe^{-iwx}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 xe^{-iwx}dx$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{w^2}(cosw + wsinw - 1)$

11. Table III의 9식을 이용하면
$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-iwx}dx$
$= e^{-\frac{w^2}{2}}$

12. (9)를 이용하면
$F((1-x)e^{-x}) = F((xe^{-x})') = iwF(xe^{-x})$
그러므로
$F(xe^{-x}) = \frac{1}{1+iw}F(xe^{-x})$
문제7의 f(x)에 대해서도 같은 결과를 얻을 수 있으므로 Table III의 식 5 를 이용하면
$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)^2}$

13. Table III의 식 8에서 b대신 -b, c대신 b 를 넣으면
$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sinb(a-w)}{a-w}\ \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ib(a-w)} - e^{ib(a-w)}}{a-w}$ 이다.여기서
$e^{-ib(a-w)} - e^{ib(a-w)} = -2i\sin b(a-w)$ 를 이용하면
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin b(w-a)}{w-a}$ 즉 식 (7)을 얻을 수 있다.

14. g(x)를
$$g(x) = \begin{cases} e^x & if x > 0 \\ 0 & if x < 0 \end{cases}$$
라 하면 f(x)=g(x)+g(-x)이다. Table III의 식 5를 이용하면
$F(g(x)) = \frac{1}{(1+iw)\sqrt{2\pi}}$
이다.한편
$F(g(-x))(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^x e^{-iwx}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t}e^{-i(-w)t}dx$
$= F(g(x))(-w) = \frac{1}{(1-iw)\sqrt{2\pi}}$
그러므로
$F(f(x))(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$

15. $g(x) = h(x) = e^{-x}(x > 0)$라 하면
$(g * h)(x) = \int_0^\infty g(x-y)h(y)dy$
$= \int_0^x e^{-x+y}e^{-y}dy = xe^{-x}$
그러므로
$F(xe^{-x}) = F((g*h)(x)) = \sqrt{2\pi}F(g)F(h)$
Table III의 식 5를 이용하면
$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+wi)^2}$

16. (a)
$t = x - a$라 하고 t에 대해서 적분하라.
(b)
Table III의 식 2에서 $c = 3b$라 하면
$\frac{e^{-ibw} - e^{-i3bw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
-2b 만큼 평행이동하고 (a)를 이용하면
$e^{iw2b}\frac{e^{-ibw} - e^{-i3bw}}{iw\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{ibw} - e^{-ibw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin bw}{w}$
(c)
w를 w-a로 치환해 보라.
(d)
식 1의 함수에 e^{iax}를 곱하면 식7 의 함수가 되고, 푸리에 변환은 1의 함수를 a만큼 평행이동한 값이 된다.식 2도 마찬가지다.

Chapter 10. Review

1. 삼각함수 급수:주기함수를 삼각함수의 실수배의 합으로 표현하는 것이다.
   푸리에 급수:주기함수를 삼각함수급수로 표현할 때 삼각함수의 계수가 오일러 공식 (10.2절의 (6))형태로 표현되는 급수이다.
2. 주기 2π의 함수 f(x)를 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$
   로 표현했을 때, a_0, a_n, b_n이 10.2절의 식(6)과 같이 표현 되는 것을 푸리에 급수의 오일러 공식이라 하고
   $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi}(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx)\cos mx dx$
   를 풀어서 a_m을 얻는다.b_m도 마찬가지다.
3. f(x)가 주기 2L의 함수라면 $f(\frac{\pi}{L}x)$는 주기 2π함수이므로 $g(x) = f(\frac{\pi}{L}x)$를 급수전개한 뒤에 $t = \frac{\pi}{L}x$에 대한 식으로 고치면 10.3절의 (1),(2)와 같은 결과를 얻는다.
4. $\cos\frac{n\pi x}{L}, \sin\frac{n\pi x}{L}$대신 $\cos nx, \sin nx$를 다루는 잇점이 있기 때문이다.
5. 푸리에 급수는 주기함수가 조각적으로 연속이면 가능하다.그러나, 불연속 점에서는 푸리에 급수가 원래 함수의 좌극한과 우극한의 중점으로 수렴한다.(10.2절의 정리1)
6. 무한합이므로 가능하다.
7. 2π 주기함수를 삼각함수의 합으로 근사할 때 차이의 $L^2 norm$이 최소가 되려면 삼각함수의 계수가 푸리에 계수이어야 한다. (10.7절의 정리 1)
8. 해를 삼각함수의 합으로 표현했을 때, 가장 큰 계수를 가진 삼각함수의 주기가 이 해의 성질을 가장 잘 나타낸다.즉 진동 체계의 공명 주파수가 된다.그러므로 $\cos 5x, \sin 5x$의 계수가 가장 크다면 외부의 힘에 5배 빠르게 반응한것이 된다.
9. 실제 문제에서 우리는 유한한 구간에서만 함수값을 알게 되는데 이 함수가 우함수 혹은 기함수의 성질을 가진다는 것을 선험적으로 알 수 있다면, 예를 들어 $0 < x < L$ 의 정보만 가지고, 푸리에 코사인 급수 전개나 푸리에 사인 급수전개를 할 수 있다.
10. 코사인 항은 우함수의 성질을 가지고 있고, 사인 항은 기함수의 성질을 가지고 있다. 즉, 코사인항은 우함수 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ 를 푸리에 급수 전개한 것이고, 사인항은 기함수 $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$를 푸리에 급수 전개한 것으로 생각할 수 있다.
11. 조각적으로 연속이라 함은 연속은 아니지만 전체구간을 몇등분으로 나누었을 때 그 구간에서 연속임을 나타낸다. (자세한 정의는 5.1절을 참고.) 푸리에 급수 를 연속함수에만 국한시키는 것은 너무 제한적이므로, 조각적 연속에서 푸리에 급수를 생각하고 이것이 가능함을 알 수 있다.(10.2절의 정리 1)
12. 푸리에 적분은 주기함수에서만 가능한 푸리에 급수의 개념을 일반적인 함수에 확장 시킨것이다.그리고 적분 변환은 함수를 적분형태로 나타나는 다른 형태의 함수로 표현하는 것으로 상미분,편미분,적분 방정식등에 많이 쓰이는것으로 대표적인 것으로 라플라스 변환과 푸리에 변환이 있다. 푸리에 변환은 푸리에 적분으로 나타내어진다.
13. 불연속 함수를 푸리에 적분으로 근사시켰을 때, 불연속 점 주위에서 진동현상이 나타나는 것을 말한다.
14. 우함수나 기함수에서는 푸리에 적분표현이 쉬워지는데, 우함수인경우는 코사인함수 만으로 표현할 수 있으므로 코사인 함수에 대한 적분만을 생각하는데 이를 푸리에 코사인 변환이라한다. 푸리에 사인변환도 마찬가지다.
15. 주어진 구간에서의 함수값을 가지고 우함수 또는 기함수 라고 생각하고 확장할 수 있다. 이는 실생활에서 경험적으로 함수값,즉 정보가 우함수 또는 기함수를 알 수 있는 경우에 활용할 수 있다.
16. $f(x) = 2(sinx - \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x - \cdots)$
17. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(cosx - \frac{1}{4}cos2x + \frac{1}{9}cos3x - \cdots)$
18. $f(x) = \frac{4k}{\pi}(sin\pi x + \frac{1}{3}sin3\pi x + \frac{1}{5}sin5\pi x + \cdots)$
19. $f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos 3\pi x2 + \frac{1}{25}\cos 5\pi x2 + \cdots)$
20. $f(x) = 2 + \frac{16}{\pi^2}(cos\frac{\pi}{4}x + \frac{1}{9}cos\frac{3\pi}{4}x + \frac{1}{25}cos\frac{5\pi}{4}x + \cdots)$
21. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}(sin\pi x + \frac{1}{3}sin3\pi x + \frac{1}{5}sin5\pi x + \cdots)$
22. $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\cdot3}cos2x + \frac{1}{3\cdot5}cos4x + \frac{1}{5\cdot7}cos6x + \cdots)$
23. $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\cdot3}cos2x - \frac{1}{3\cdot5}cos4x + \frac{1}{5\cdot7}cos6x - \cdots)$
24. $f(x) = 2(sinx + \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x + \cdots)$
25. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(cosx + \frac{1}{9}cos3x + \frac{1}{25}cos5x + \cdots)$
26. $f(x) = \pi - 2(sinx + \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x + \cdots)$
27. $f(x) = \frac{8}{\pi}(\cos x + \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{25}\cos 5x + \cdots)$
28. $f(x) = \frac{2}{\pi^3}[(\pi^2 - 6)\sin\pi x - \frac{4\pi^2-6}{2^3}\sin 2\pi x + \frac{9\pi^2-6}{3^3}\sin 3\pi x \cdots]$
29. $\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x + \frac{1}{4}\cos 2\pi x + \frac{1}{9}\cos 3\pi x \cdots)$
    $- \frac{4}{\pi}(\sin\pi x + \frac{1}{2}\sin 2\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x \cdots)$
30. 문제 23에서 x=0를 넣으면 된다.
31. 문제 19에서 x=0를 넣으라.
32. 문제 17에서 x=0을 넣으라.
33. $E^* = \frac{2}{3}\pi^3 - \pi(2(\frac{\pi}{2})^2 + \frac{4^2}{\pi^2 1^4} + \frac{4^2}{\pi^2 3^4} + \frac{4^2}{\pi^2 5^4} + \cdots)$
    $N = 1,2 : 5.16771$
    $N = 3,4 : 0.074755$
    $N = 5,6 : 0.011879$
34. $E^* = \frac{2}{5}\pi^5 - \frac{2\pi^5}{9} - \pi(\frac{4^2}{1^4} + \frac{4^2}{2^4} + \frac{4^2}{3^4} + \cdots)$
    $N = 1 : 54.403, N = 2 : 4.318$
    $N = 3 : 0.996, N = 4 : 0.376$
    $N = 5 : 0.180, N = 6 : 0.099,$
    $N = 7 : 0.060, N = 8 : 0.039$
    $N = 9 : 0.027, N = 10 : 0.019$
35. $y = C_1\cos wt + C_2\sin wt + \frac{\pi^2}{12w^2} - \frac{1}{w^2-1}\cos t + \frac{1}{4(w^2-4)}\cos 2t \cdots$
36. $y = C_1\cos wt + C_2\sin wt + \frac{1}{w^2-1}\sin t - \frac{1}{2^3(w^2-4)}\sin 2t \cdots$
37. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos aw - \cos w + aw\sin aw - w\sin w}{w^2}$
38. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w + \sin w - 2w\cos w}{w^2}$
39. $\frac{1}{(2+iw)\sqrt{2\pi}}$
40. $k\frac{(ibw+1)e^{-ibw} - (iaw+1)e^{-iaw}}{w^2\sqrt{2\pi}}$

CHAPTER 11

Partial Differential Equations

Partial differential equations arise in connection with various physical and geometrical problems when the functions involved depend on two or more independent variables, usually on time t and on one or several space variables. It is fair to say that only the simplest physical systems can be modeled by ***ordinary*** differential equations, whereas most problems in fluid mechanics elasticity, heat transfer, electromagnetic theory, quantum mechanics, and other areas of physics lead to ***partial*** differential equations. Indeed, the range of application of the latter is enormous, compared to that of ordinary differential equations.

In this chapter we consider some of the most important partial differential equations occurring in engineering applications. We derive these equations as models of physical systems and develop methods for solving **initial** and **boundary value problems,** consisting of such an equation and additional physical conditions.

In Sec. 11.1 we define the notion of a solution of a partial differential equation. Sections 11.2–11.4 concern the one-dimensional wave equation, governing the motion of a vibrating string. The heat equation is considered in Secs. 11.5 and 11.6, the two-dimensional wave equation modeling vibrating membranes, in Secs. 11.7–11.10, and Laplace's equation in Sec. 11.11.

In Secs. 11.6 and 11.12 we see that partial differential equations can also be solved by Fourier transform or Laplace transform methods.

Numerical methods for partial differential equations are presented in Secs. 19.4–19.7.

Prerequisites for this chapter: Ordinary linear differential equations (Chap. 2) and Fourier series (Chap. 10).

Sections that may be omitted in a shorter course: 11.6, 11.9–11.12.

References: Appendix 1, Part C.

Answers to problems: Appendix 2.

11.1. Basic Concepts

1. u_1, u_2를 second-order equation
$\mathcal{L}(u) = au'' + bu' + cu = 0$ 의 해라고 하면, 이 때 다음이 성립한다.
$\mathcal{L}(c_1u_1 + c_2u_2)$
$= a(c_1u_1'' + c_2u_2'') + b(c_1u_1' + c_2u_2') + c(c_1u_1 + c_2u_2)$
$= c_1(au_1'' + bu_1' + cu_1) + c_2(au_2'' + bu_2' + cu_2)$
$= c_1\mathcal{L}(u_1) + c_2\mathcal{L}(u_2)$

2. $u_{tt} = 2$이고, $u_{xx} = 2$ 따라서 $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

3. $u_{tt} = -81\sin 9t \sin\frac{x}{4}$이고, $u_{xx} = -\frac{1}{16}\sin 9t \sin\frac{x}{4}$ 따라서 $u_{tt} - (16 \times 81)u_{xx} = 0$.

4. $u_{tt} = -16\cos 4t \sin 2x$이고,
$u_{xx} = -4\cos 4t \sin 2x$
따라서 $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$.

5. $u_{tt} = -c^2 \sin ct \sin x$이고, $u_{xx} = -\sin ct \sin x$
따라서 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

6. $u_t = -e^{-t}\sin x$이고, $u_{xx} = -e^{-t}\sin x$
따라서 $u_t - u_{xx} = 0$.

7. $u_t = -4e^{-4t}\cos 3x$이고, $u_{xx} = -9e^{-4t}\cos 3x$
따라서 $u_t - \frac{4}{9}u_{xx} = 0$.

8. $u_t = -9e^{-9t}\cos\omega x$이고, $u_{xx} = -\omega^2 e^{-9t}\cos\omega x$
따라서 $u_t - \frac{9}{\omega^2}u_{xx} = 0$.

9. $u_t = -\omega^2 c^2 e^{-\omega^2 c^2 t}\sin\omega x$이고,
$u_{xx} = -\omega^2 e^{-\omega^2 c^2 t}\cos\omega x$
따라서 $u_t - c^2 u_{xx} = 0$.

10. $u_{xx} = 0$이고, $u_{yy} = 0$
따라서 $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

11. $u_{xx} = e^x \sin y$이고, $u_{yy} = -e^x \sin y$
따라서 $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

12. $u_{xx} = -\cos x \sinh y$이고, $u_{yy} = \cos x \sinh y$
따라서 $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

13. $u_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $u_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$이고, $u_y = \frac{x}{x^2+y^2}$,
$u_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
따라서 $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

14. a)Poisson Equation
i) $u_{xx} = 2$ $u_{yy} = 2$ 따라서 $u_{xx} + u_{yy} = 4$
ii)$u_{xx} = -y^2\cos(xy)$ $u_{yy} = -x^2\cos(xy)$ 따라서
$u_{xx} + u_{yy} = -(x^2 + y^2)\cos(xy)$
iii)$u_{xx} = \frac{2xy}{x^3}$ $u_{yy} = 0$ 따라서 $u_{xx} + u_{yy} = \frac{2xy}{x^3}$
b) Laplace Equation
$u_x = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$
$u_{xx} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$
따라서 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} = 0$
c)
i)$u_x = v_x(x)$ $u_{xy} = 0$
ii)$u_x = v_x(x)w(y)$ $u_y = v(x)w_y(y)$ $u_{xy} = v_x(x)w_y(y)$
따라서 $uu_{xy} = v(x)w(y)v_x(x)w_y(y) = u_x u_y$
iii)$u_{tt} = 4v'(x + 2t) - 4w'(x - 2t)$ $u_{xx} = v'(x + 2t) + w'(x - 2t)$
따라서 $u_{tt} = 4u_{xx}$

15. $u(x, y) = v(x)e^y$

16. $u(x, y) = w_1(y)\sin(3x) + w_2(y)\cos(3x)$

17. $u(x, y) = v_1(x)y + v_2(x)$

18. $u(x, y) = v(x)e^{-y^2}$

19. $u_x(x, y) = v(x)e^y$ 따라서 $u(x, y) = \tilde{v}(x)e^y$

20. $u(x, y) = v_1(x)e^y + v_2(x)e^{-y}$

21. $u(x, y) = v(x)e^{-xy^2}$

22. $u_y(x, y) = v(x)e^y$ 따라서 $u(x, y) = \tilde{v}(x)e^y$

23. $u_{xx} = a\frac{-2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$와 $u_{yy} = a\frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 따라서 $u_{xx} + u_{yy} = 0$. u 를 극좌표로 바꾸면 $u(r, \theta) = a\log r^2 + b$ 이다. 따라서 주어진 조건에 따라 $u(1, \theta) = 1 = a\log 1 + b$이고 $u(2, \theta) = 3 = a\log 4 + b$ 이다. 따라서 $b = 1$ 이고 $a = \frac{2}{\log 4}$ 이다.

24. 변수분리에 의해 $\frac{z_x}{x} = \frac{z_y}{y} = const$일 것이고, 이때 $z_x = cx$의 해로서 $z(x, y) = \frac{c}{2}x^2 + w(y)$이고, 마찬가지로 $z(x, y) = \frac{c}{2}y^2 + v(x)$이다. 따라서 , $z(x, y) = \frac{c}{2}(x^2 + y^2)$ 형태이다. 이를 극좌표로 바꾸면 $z(r, \theta) = \frac{c}{2}r^2$ 이고, 이때 $z_\theta = 0$ 이다.

25. $u_{xx} = 0$으로 부터 $u(x, y) = w(y)x$이고, 마찬가지로 $u_{yy} = 0$으로 부터 $u(x, y) = v(x)$의 형태를 갖는다. 따라서, $u(x, y) = const$이다.

11.3. Separation of Variables, Use of Fourier Series

1. Frequency$=\frac{cn}{2L}=\frac{\sqrt{T}n}{2\sqrt{\rho}L}$이므로 string의 길이가 길수록, 단위길이당 질량이 늘어날수록 Frequency는 작아지고, 장력이 2배가 늘면 $\sqrt{2}$배가 는다.

2. $f(x)=0.01\sin 3x$이고 초기속도가 0 이므로
$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nt \sin nx$의 형태를 갖는다.
$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$
$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0.01\sin 3x \sin nx\ dx$
$=\frac{0.01}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n-3)x-\cos(n+3)x)\ dx.$
따라서 $B_3 = 0.01$이고 나머지는 모두 0 이다.
$u(x,t)=0.01\cos(3t)\sin(3x)$.

3. $u(x,t)=k(\cos t\sin x-\frac{1}{2}\cos(2t)\sin(2x))$

4. $B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$
$=\frac{0.2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x-x^2)\sin nx\ dx$

5. $B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0.1x(\pi^2-x^2)\sin nx\ dx$

6. $B_n=\frac{2}{\pi}\Big\{\int_0^{a}\frac{k}{a}\sin nx\ dx$
$+\int_a^{\pi}(\frac{k}{a-\pi}x-\frac{k\pi}{a-\pi})\sin nx\ dx\Big\}$

7. $B_n=\frac{2}{\pi}\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\sin nx\ dx+$
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\frac{1}{\pi}x-1)\sin nx\ dx\Big\}$

8. $B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$
$=\frac{2}{\pi}\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{10}\sin nx\ dx$
$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(-\frac{x}{10}+\frac{\pi}{20})\sin nnx\ dx$
$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}(\frac{x}{10}-\frac{\pi}{10})\sin nx\ dx\Big\}$

9. $B_n=\frac{2}{\pi}\Big\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{4}{5\pi}x-\frac{1}{5})\sin nx\ dx$
$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(-\frac{4}{5\pi}x+\frac{3}{5})\sin nx\ dx\Big\}$

10. zero initial displacement $\Rightarrow B_n=0$.
$B_n^*=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\ dx$
$=\frac{2}{n\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0.01x\sin nx\ dx$
$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0.01x(\pi-x)\sin nx\ dx\Big)$

11. CAS project

12. $\frac{v_x}{v}=-\frac{w_y}{w}$ implies
$v_x-\lambda v=0$
$w_y+\lambda w=0.$
$v(x)=e^{\lambda x}\ w(y)=e^{-\lambda y}.$
따라서 $u(x,y)=Ce^{\lambda x}e^{-\lambda y}.$

13. $u(x,y)=Ce^{\lambda x}e^{\lambda y}$

14. $y^2u_xv=x^2uv_y$ 이므로
$\frac{u_x}{x^2u}=\frac{v_y}{y^2v}=\lambda$이다.따라서 ,
$u_x-\lambda x^2u=0$과 $v_y-\lambda y^2v=0$으로 부터
$v(x)=Ce^{\frac{\lambda}{3}x^2},\ w(y)=Ce^{\frac{\lambda}{3}y^3}.$
따라서 $u(x,y)=Ce^{\frac{\lambda}{3}x^3}e^{\frac{\lambda}{3}y^3}.$

15. $u(x,y)=F(x)G(y)$라 놓으면
$F'G+FG'=(x+y)FG$
$\frac{F'}{F}+\frac{G'}{G}=x+y$
$\Rightarrow\quad \frac{F'}{F}-x=-\frac{G'}{G}+y=k$
$\Rightarrow\quad F'-xF-kF=0,\ -G'-kG+yG=0$
$\Rightarrow\quad u(x,y)=Ce^{\frac{1}{2}x^2+kx}d^{\frac{1}{2}y^2-ky}$

16. $\frac{v_{xx}}{v}=\frac{w_{yy}}{w}=\lambda$
여기선 λ가 양수인 경우만 보자.
$v(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$
$w(y)=C_1\cos\sqrt{\lambda}y+C_2\sin\sqrt{\lambda}y.$
따라서 $u(x,y)=(C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x})\cos\sqrt{\lambda}y+$
$+(C_1'e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2'e^{-\sqrt{\lambda}x})\sin\sqrt{\lambda}y.$

17. $v_xw_y=vw$이고
$\frac{v_x}{v}=\frac{w}{w_y}=\lambda$에서 $v_x-\lambda v=0$과 $w_y-\frac{1}{\lambda}w=0$을 얻는다. 따라서 $u(x,y)=Ce^{\lambda x}e^{\frac{1}{\lambda}y}.$

18. $\lambda>0$인 경우
$u(x,y)=(C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x})e^{\sqrt{\lambda}y}$
$+(C_1'e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x})e^{-\sqrt{\lambda}y}.$

19. $xv_xw_y+2yvw=0$이고 $\frac{xv_x}{v}=-\frac{2yw}{w_y}=\lambda$에서,
$v_x-\frac{\lambda}{w}v=0$과 $w_y+\frac{2y}{\lambda}w=0$을 얻는다.
따라서 $u(x,y)=Cx^{\lambda}e^{-\frac{y^2}{\lambda}}.$

20. a)$u_{tt}=\sum_{n=1}^{\infty}G_n''(t)\sin\frac{n\pi}{L}x$
$u_{xx}=-\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)(\frac{n\pi}{L})^2\sin(\frac{n\pi x}{L}).$
따라서 $u_{tt}-C^2u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}(G_n''(t)+(\frac{Cn\pi}{L})^2)\sin(\frac{n\pi x}{L}).$
따라서 $G_n''+\lambda_n^2G=0,\ \lambda_n=\frac{Cn\pi}{L}.$
b) 11.2절의 식 2)에서 $\tan\beta-\tan\alpha=\frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{P}{\rho}\Delta x$가 된다. 따라서 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C^2u_{xx}+\frac{P}{\rho}$
c) $G_n''(t)+\lambda_n^2G_n(t)=\frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin wt.$
$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_nt+B_n^*\sin\lambda_nt+\frac{2A(1-\cos n\pi)}{n\pi(\lambda_n^2-w^2)}\sin\frac{n\pi x}{L}.$ $u_t(x,0)=0$으로 부터 $B_n^*=0.$
$$B_n=\frac{1}{\int_0^L\sin\frac{2n\pi}{L}x\ dx}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\ dx.$$
d)만약 $\lambda_n=w$이면 특수해 $G_{np}(t)=At\cos wt$의 형태를 가지고, 이 때,
$G_{np}'(t)=A\cos wt-Awt\sin wt$과 $G_{np}''(t)=$

$-2Aw\sin wt - Aw^2 t\cos wt$.
따라서 $G''_{np}(t) + w^2 G_n = -2Aw\sin wt = \frac{2A}{n\pi}(1-\cos n\pi)\sin wt$로 부터 A를 구한다.
e)$w(x,t)$를 $w(0,t) = 0$과 $w(L,t) = h(t)$가 되는 C^2함수로 잡으면, 이때 $w_{tt} - C^2 w_{xx} = k(x,t)$가 될것이고 $\Delta v - C^2 v = k(x,t)$이고 $v(x,0) = f(x) - w(x,0)$, $v_t(x,0) = g(x) - w_t(x,0)$인것을 풀면 $u = v + w$가 원하는 해가 된다.

11.4. D'Alembert's Solution of the Wave Equation

1. $\psi(x-ct)$에서 ψ의 위상은 시간이 t이고 x가 ct일 때 일정하다. 이 말은 ψ는 시간이 흘러감에 따라 시간의 C 배만큼 양의 방향으로 가는 wave 임을 나타내고 같은 원리로 $\phi(x+ct)$는 음의 방향쪽의 wave이다.

2. $C^2 = \frac{T}{\rho} = 500$ 따라서 $C = 10\sqrt{5}$.

3. frequency $\frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{10\sqrt{5}}{22}$ cycles per unit time.

4. $u(0,t) = \frac{1}{2}(f(ct) + f(-ct) = 0$
$\Rightarrow f(ct) = -f(-ct)\forall t$따라서 f는 odd 함수이다.
$u(L,t) = \frac{1}{2}(f(L+ct) + f(L-ct) = 0$
$f(2L+ct) = f(L+L+ct) = f(L+(\frac{L}{ct}+1)ct)$
$= -f(L-(\frac{L}{ct}+1)ct) = -f(-ct) = f(ct)$
따라서 f의 주기는 $2L$이다.

5. $f(x) = 0.01\sin\pi x$ 고, $L = 1$, $C = 1$이므로
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(n\pi t)\sin(n\pi x)$,
$B_n = 2\int_0^1 0.01\sin(\pi x)\sin(n\pi x)\ dx$이다.

6. 5번 문제에서
$B_n = 2\int_0^1 0.01x(1-x)\sin(n\pi x)\ dx$이다.

7. 5번 문제에서
$B_n = 2\int_0^1 0.01(x-x^3)\sin(n\pi x)\ dx$이다.

8. 5번 문제에서
$B_n = 2\int_0^1 0.01(1-\cos 2\pi x)\sin(n\pi x)\ dx$이다.

9. a) $A = 1$, $C = 1$. 따라서 $AC - B^2 = 1 > 0 \Rightarrow$ elliptic
b) $A = C^2$, $B = 0$, $C = 0 \Rightarrow$ parabolic
c) $A = C^2$, $B = 0$, $C = -1 \Rightarrow AC - B^2 = -C^2 < 0 \Rightarrow$ hyperbolic
d) $y > 0 \Rightarrow AC - B^2 = y > 0$ 따라서 elliptic
$y < 0 \Rightarrow AC - B^2 = y < 0$ 따라서 hyperbolic.

10. $u(x,y) = F(x)G(y)$
따라서 $yF''G + FG'' = 0$.
따라서 $\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{yG} = const$이고 $const = -1$일때 $G'' - yG = 0$식을 얻는다.

11. $v = \Phi(x+ct)$, $z = \Psi(x-ct)$인 함수들은 $\Phi'' - C^2\Phi = 0 = \Psi'' - C^2\Psi$을 만족한다. 그리고 $u_{vz} = 0$이다.

12. $u_{xx} = u_{vv}$
$u_y = u_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$
$u_{yy} = u_{zz}(\frac{\partial z}{\partial y})^2 + u_z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
$u_{xy} = (u_x)_z\frac{\partial z}{\partial y}$
따라서 $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy}$
$= u_{vv} + 2u_{vz}\frac{\partial z}{\partial y} + u_{zz}(\frac{\partial z}{\partial y})^2 + u_z(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})$

13. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$
변수 변환의 개념은
$z = ax + by, v = cx + dy$로 놓고
$u_x = au_z + cu_v$
$u_{xx} = a^2u_{zz} + 2acu_{zv} + c^2u_{vv}$
$u_{xy} = abu_{zz} + (bc+ad)u_{zv} + cdu_{vv}$
$u_{yy} = b^2u_{zz} + 2bdu_{zv} + d^2u_{vv}$
$\Rightarrow$
$(a^2 + 4ab + 4b^2)u_{zz} + (2ac + 4bc + 4ad + 8bd)u_{zv} + (c^2 + 4cd + 4d^2)u_{vv}$에서 개수를 0로 만들도록 하면된다. 따라서 ,
$z = -2x + y, v = x$
$\Rightarrow u_{vv} = 0$
$u(x,y) = f(-2x+y)x + g(-2x+y)$형태의 함수들이 해이다.

14. $v = x + y$, $z = -2x + y \quad \Rightarrow \quad u_{vz} = 0$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(x+y) + g(x+y)$

15. $v = 3x + y$, $z = x + y$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(3x+y) + g(x+y)$

16. $z = x + y, v = x$
$\Rightarrow u(x,y) = f(x+y)x + g(x+y)$

17. $4a^2 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2a-b)(2a+b) = 0$
$v = x + 2y$, $z = x - 2y$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(x+2y) + g(x-2y)$

18. $u_{tt} = C^2u_{xx} - v^2u$
$u(x,t) = F(x)G(t)$라 놓으면 $FG'' = C^2F''G - \gamma^2FG$ 따라서
$\frac{G''}{C^2G} + \frac{\gamma^2}{C^2} = \frac{F''}{F} = -p^2$
따라서 $G'' + C^2(\gamma^2 + p^2)G = 0$과 $F'' + p^2F = 0$
따라서 $G'' + \lambda_n^2 G = 0$, where $\lambda_n = \sqrt{(\frac{Cn\pi}{L})^2 + (C\gamma)^2}$.

19. $G'' + C^2p^2F = 0$과 $F'' + p^2F = 0$을 얻는데 $F(0) = 0$과 $F'(L) = 0$을 사용하면

$F(x) = C_1 \sin px + C_2 \cos px$의 형태에서 $F(0) = C_2 = 0$이고 $F'(x) = -p\cos pL = 0$은 $PL = \frac{(2n+1)\pi}{2}$에서 0이므로 우리는 $P_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}$로 잡아야 하고, 따라서 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_n \sin P_n x \cos P_n Ct + B_n \sin P_n Ct\right\}$의 형태인데 initial velocity 가 zero 이므로 B_n은 0이어야 한다. initial displacement $f(x)$를 이용하여 $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin P_n x\, dx$를 얻는다.

20. a) $u(x,t) = F(x)G(t)$라 놓으면
$FG'' + C^2F^{(4)}G = 0$
$\Rightarrow \quad \frac{F^{(4)}}{F} = -\frac{G''}{C^2G} = \beta^4$
$\Rightarrow \quad F(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x$
$\Rightarrow \quad G(t) = a\cos C\beta^2 t + b\sin C\beta^2 t$
b) $u(x,0) = x(1-x)$
$\frac{F^{(4)}}{F} = \beta^4, \ -\frac{G''}{C^2G} = \beta^4.$
$u(0,t) = 0, \ u(L,t) = 0 \Rightarrow F(0) = F(L) = 0$ and $u_{xx}(0,t) = 0, \ u_{xx}(L,t) = 0. \Rightarrow$
$F''(x) = -A\beta^2\cos\beta x - \beta^2 B\sin\beta x + C\beta^2\cosh\beta x + D\beta^2\sinh\beta x.$
$F''(0) = F''(L) = 0 \ \Rightarrow A = C = 0.$
$F(L) = 0$ and $F''(L) = 0$은 $B\sin L\beta + D\sinh L\beta = 0$ 와 $-\beta^2 B\sin L\beta + D\beta^2\sinh L\beta = 0$으로부터 $\sin L\beta = 0$이 되는 $\beta_n = \frac{n\pi}{L}, \ n = 1, 2, \cdots$이되고, $\sinh L\beta = 0$이되는 β는 0 밖에 없으므로 D는 0 일수 밖에 없다. 따라서 $F_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{L}x$이고, 이 때, $G_n(t) = a_n\cos(\sqrt{C^2(\frac{n\pi}{L})^4}t) + b_n\sin(\sqrt{C^2(\frac{n\pi}{L})^4}t)$이다.
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}(a_n\cos(\sqrt{C^2(\frac{n\pi}{L})^4}t) + b_n\sin(\sqrt{C^2(\frac{n\pi}{L})^4}t)$이고 초기 velocity=0 dms b_n이 0 임을 의미하고 따라서 $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{L}x = x(L-x)$가 되도록 a_n을 정한다.
c) $F(0) = 0, \ F_x(0) = 0, F(L) = 0, F_x(L) = 0$
$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + C = 0$
$F_x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B + D = 0$
$F(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos\beta L + B\sin\beta L + C\cosh\beta L + D\sinh\beta L = 0$
$F_x(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad -A\sin\beta L + B\cos\beta L + C\sinh\beta L + D\cosh\beta L = 0$
$-A(\sin\beta L + \sinh\beta L) - D(\cos\beta L - \cosh\beta L) = 0$
$A(\cos\beta L - \cosh\beta L) - D(\sin\beta L - \sinh\beta L) = 0$
$(\cos\beta L - \cosh\beta L)(\cos\beta L - \cosh\beta L) + (\sin\beta L - \sinh\beta L)(\sin\beta L + \sinh\beta L) = 0$
$\Rightarrow \quad \cos\beta L\cosh\beta L = 1$
d) $F(0) = 0 = F_x(0) \Rightarrow A + C = 0 = B + D$
$F_{xx}(L) = 0 \Rightarrow -A\cos\beta L - B\sin\beta L + C\cosh\beta L + D\sinh\beta L = 0$
$F_{xxx}(L) \ \Rightarrow \ A\sin\beta L - B\cos\beta L + C\sinh\beta L + D\cosh\beta L = 0$
$\Rightarrow \cosh\beta L\cos\beta L = -1$

11.5. Heat Equation: Solution by Fourier Series

1. 열전도 방정식은 시간에대한 일차미방으로 초기상태의 열은 시간에대해 일차미방의 해의 형태인 exponential 하게 decay 하는 형태이고, wave 방정식은 시간에 대한 2차 미방의 해를 일반적으로 sin, cos함수의 결합으로 표현된다.

2. $u_n(x,t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2 t}, \ \lambda_n = \frac{Cn\pi}{L}$ 이다. 첫번째 eigen function $u_1(x,t) = \sin\frac{\pi x}{L}e^{-(\frac{C\pi}{L})^2 t}$이므로 20초 이내에 절반으로 줄어 들려면, $\sin\frac{\pi x}{L}e^{-(\frac{C\pi}{L})^2 20} \le \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{L}$, 따라서 $e^{-(\frac{c\pi}{L})^2 20} \le \frac{1}{2}$이되도록 C^2를 정하면 된다. $C^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$이므로 thermal conductivity K 가 클수록, specific heat σ가 작을 수록, density ρ가 작을 수록 decay 가 빠르다.

3. $\rho = 10.6, \ \sigma = 1.04, \ K = 0.056, \ L = 10$
따라서 $C^2 = \frac{0.056}{10.6 \times 1.04}$. 양 쪽끝이 0 이므로 $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{10})e^{-(\frac{Cn\pi}{10})^2 t}$이고
$B_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{10})\, dx$로 계산함으로써 결정된다.따라서 ,
$B_n = \frac{1}{5}\int_0^{10}\sin(0.1\pi x)\sin\frac{n\pi x}{10}\, dx$

4. 3번에서
$B_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} 1.04\sin(0.2\pi x)\sin\frac{n\pi x}{10}\, dx$

5. 3번에서
$B_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} x(10-x)\sin\frac{n\pi x}{10}\, dx$

6. 3번에서
$B_n = \frac{1}{5}\int_0^{10} 2 - 0.4|x-5|\sin\frac{n\pi x}{10}\, dx$

7. 시간에 상관없는 정상상태의 해는
$u''(x) = 0$
$u(0) = U_1, \quad u(L) = U_2$
$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{U_2 - U_1}{L}x + U_1$

8. $u(x,t) = v(x) + w(x,t),$
$v(x) = \frac{U_2 - U_1}{L}x + U_1$이고 $w(x,t)$는 다음을 만족한다.
$w_t - C^2 w_{xx} = 0$
$w(0,t) = 0 = w(L,t)$
$\Rightarrow \quad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2 t}$

$,\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$에서 B_n은 초기상태로서 정해진다.

9. (8)의 $F(x) = A\cos px + B\sin px$에서
$F_x(0) = 0, F_x(L) = 0 \Rightarrow B = 0$
$F_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{L}$의 형태이다.
따라서 , $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{n\pi x}{L})e^{-\lambda_n^2 t}$,
$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$

10. $F(x) = C_1\cos px + C_2\sin px$.
$F'(x) = -C_1 p\sin px + C_2 p\cos px$.
$F'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$
$F'(L) = 0 \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L}$
따라서 $F_n(x) = A_n\cos\frac{n\pi}{L}x$ and $G_n(t) = e^{-C^2p^2t}$.
따라서 $u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L}e^{-(\frac{cn\pi}{L})^2 t}$.
A_0, A_n은 $u(x,0)f(x)$로 부터 결정된다.
$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx e^{-n^2t}$
$u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx = f(x) = x$
$\Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx$
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx$로 결정.

11. 10번에서
$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} k\, dx$
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k\cos nx\, dx$로 결정.

12. 10번에서
$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\, dx$
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\cos nx\, dx$로 결정.

13. 10번에서
$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - \frac{x}{\pi})\, dx$
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1 - \frac{x}{\pi})\cos nx\, dx$로 결정.

14. $-C^2 w_{xx} = Ne^{-\alpha x}$, $w(0) = 0, w(L) = 0$을 만족하는 $w(x)$를 구한다음 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$로서 $v_t - C^2 v_{xx} = 0$, $v(0,t) = 0 = v(L,t)$ $v(x,0) = f(x) - w(x)$이면 u는 전체 조건을 만족한다.

15. 가정으로 부터 $-u_x(\pi,t) = u(\pi,t)$, $u(0,t)$ 일때 $F(x) = C_1\cos px + C_2\sin px$에서 $F(0) = 0$으로 부터 $C_1 = 0$이고 $F'(\pi) + F(\pi) = C_2 p\cos p\pi + C_2\sin p\pi = 0$으로 부터 $\tan p\pi = -p$를 만족해야한다. 그래프 상으로 이를 만족하는 p는 무한개이다.

16. $u_x(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{L}B_n e^{-\lambda_n^2 t} \to 0$ as $t \to \infty$.

17. $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(0,y) = u(x,0) = u(24,y) = 0$, $u(x,24) = 20$.
Put $u(x,y) = F(x)G(y)$ 따라서 $F''G + FG'' = 0$으로부터 $\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -p^2$
따라서 $F(x) = C_1\cos px + C_2\sin px$인데 $F(0) = 0$, $F(24) = 0$. 따라서 $C_1 = 0$, $24p = n\pi$ 따라서 $p_n = \frac{n\pi}{24}$. 우리는 $F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{24}$의 eigen function 들을 갖는다. $G_n''(y) - (\frac{n\pi}{24})^2 G_n(y) = 0$으로 부터 $G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{24}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{24}y}$, $G_n(0) = 0$

18. Cas project

19. 먼저 $v(x,y)$를 $v(0,y) = 0$, $v_y(x,0) = v_y(x,24) = 0$, $v(24,y) = f(y)$가
되는 함수를 하나 잡는다. 다음에 $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$가 되는 $w(x,y)$를 잡는데 $w_{xx} + w_{yy} = -v_{xx} - v_{yy}$
$w(0,y) = 0 = w(24,y)$, $w_y(x,0) = w_y(x,24) = 0$가 되는 $w(x,y)$를 잡으면 된다.

20. $u(x,y) = F(x)G(y)$로 놓고
$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -k^2$
$\Rightarrow \quad F'' + k^2F = 0 \Rightarrow F(x) = C_1\cos kx + C_2\sin kx$
여기서 $u_x(0,y) = 0$이므로 $C_2 = 0$이고
$F_x(a) + hF(a) = -kC_1\sin ka + hC_1\cos ka$
$C_1(h\cos ka - k\sin ka)$
$\Rightarrow \quad \tan ka = \frac{h}{k}$가 되는 k_n을 잡는다.
$F_n(x) = \cos k_n x$일 것이고 이 k_n에 대해 G에 대한 2차 방정식을 푼다.

11.6. Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms

1. Cas Project
2. $u(x,t) = \int_0^{\infty}[A(p)\cos px + B(p)\sin px]e^{-c^2p^2t}dp$
$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\, dv$
$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\, dv$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$이므로
$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\cos pv\, dv$
$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\sin pv\, dv$

3. 2번에서
$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos pv\, dv$
$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sin pv\, dv$

4. 2번에서
$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos pv}{e^{|v|}}\, dv$
$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin pv}{e^{|v|}}\, dv$

5. 2번에서
$A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin v}{v}\cos pv\, dv$

$B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin v}{v} \cos pv \, dv$

6. $u(x,t) = \int_0^{\infty}(A(p)\cos px + B(p)\sin px)e^{-C^2p^2t}\,dp$, $u(x,0) = \int_0^{\infty}(A(p)\cos px + B(p)\sin px)\,dp = f(x)$, $A(p) = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(v)\cos pv \, dv$, $B(p) = \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(v)\sin pv \, dv$.

7. $u(x,t) = \frac{1}{2C\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-v)^2}{4C^2t}}\,dv$,
$z = \frac{(x-v)}{2C\sqrt{t}}$으로 놓으면 $dz = -\frac{dv}{-2C\sqrt{t}}$.
$u(x,t) = \frac{1}{2C\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{x}{2C\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-z^2}(-2C\sqrt{t})\,dz$
$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2C\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$가 된다.

8. $w = z\sqrt{2}$일 때
$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2Cz\sqrt{t})e^{-z^2}\,dz$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} f(x + Cw\sqrt{2t})e^{-\frac{w^2}{2}}\,dw.$

9. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\,ds$에서
$\omega = \frac{s}{\sqrt{2}}$로 놓으면
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-\omega^2}\sqrt{2}\,d\omega$
$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-\omega^2}\,d\omega$
$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\int_{-\infty}^{0} e^{-\omega^2}d\omega + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-\omega^2}\,d\omega)$
$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-\omega^2}\,d\omega)$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-\omega^2}\,d\omega$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}erf(\frac{x}{\sqrt{2}})$

11.8. Rectangular Membrane, Use of Double Fourier Series

1. (13)식에서 frequency $= \frac{C}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$으로 주어지고 $C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$이므로 장력 T가 클수록 frequency는 증가한다.

2. $B_{mn} = \frac{1}{20}\int_0^4(4x - x^2)\sin\frac{m\pi}{4}x \, dx\int_0^2(2y - y^2)\sin\frac{n\pi}{2}y\,dy$이다. 첫번째,
$\int_0^4(4x - x^2)\sin\frac{m\pi x}{4}\,dx$
$= -\frac{4}{m\pi}(4x - x^2)\cos\frac{m\pi x}{4}|_0^4$
$+\int_0^4 \frac{4(4-2x)}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{4}\,dx$
$= \frac{4^2(4-2x)}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{4}|_0^4 + \int_0^4\frac{32}{(m\pi)^2}\sin\frac{m\pi x}{4}dx$
$= -\frac{32}{(m\pi)^2}\frac{4}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{4}|_0^4 = \frac{128}{(m\pi)^3}(1-(-1)^m)$.

3. $\int_0^4(4x - x^2)\sin\frac{m\pi x}{4}dx$ 와 $\int_0^2(2y - y^2)\sin\frac{n\pi y}{2}dy$ 두 적분의 곱으로 나타내어 지는데 첫번째 적분은 $t = \frac{\pi x}{4}$라 놓으면
$\int_0^4(4x - x^2)\sin\frac{m\pi x}{4}dx$
$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{16}{\pi}t - \frac{16}{\pi^2}t^2)\sin mt dt$
$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{32}{\pi}t - \frac{32}{\pi^2}t^2)\sin mt dt$이고
이는 $\frac{32t}{\pi} - \frac{32t^2}{\pi^2}$을 Fourier 전개 했을 때의 계수이다.

4. $u_{11}(x,y,t)$
$= (B_{11}\cos(c\pi\sqrt{m^2+n^2}t) + B_{11}^*\sin(C\pi\sqrt{m^2+n^2}t))$
$\sin(m\pi x)\sin(n\pi y)$
$= (B_{11}\cos(C\pi\sqrt{2}t) + B_{11}^*\sin(C\pi\sqrt{2}t))$
$\sin(\pi x)\sin(\pi y) \Rightarrow$ nodal line ; 없음
$u_{12}(x,y,t) = (B_{12}\cos(c\pi\sqrt{5}t) + B_{12}^*\sin(C\pi\sqrt{5}t))$
$\sin(\pi x)\sin(2\pi y) \Rightarrow$ nodal line ; $y = \frac{1}{2}$일때.

5. eigenvalue $\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2+n^2}, m = 1, 2, \cdots, n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 eigenfunction $u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^*\lambda_{mn}t)\sin m\pi x\sin n\pi y$이 대응 된다.

6. $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin mx\sin ny = f(x,y)$이므로
$B_{mn} = \frac{4}{\pi^4}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mn\sin nydxdy$따라서 ,
$B_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin mx\sin nydxdy$

7. 6번에서
$B_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} y\sin mx\sin nydxdy$

8. 6번에서
$B_{mn} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy\sin mx\sin nydxdy$

9. 6번에서
$B_{mn} =$
$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} xy(\pi - x)(\pi - y)\sin mx\sin nydxdy$

10. $u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin mx\sin ny$이고, $B_{mn} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx\sin ny \, dxdy$로 주어진다.

11. 초기속도가 0이므로 $B_{mn}^* = 0$이다.따라서 ,
$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\cos\lambda_{mn}t\sin m\pi x\sin n\pi$
$,\lambda_{mn} = \pi\sqrt{m^2+n^2}$

$B_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 0.1\sin 3\pi x \sin 4\pi y \sin mx \sin ny dx dy$

12. $B_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 k\sin \pi x \sin \pi y \sin mx \sin ny dx dy$

13. $B_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 kxy(1-x)(1-y)\sin mx \sin ny dx dy$

14. $B_{mn} = 4\int_0^1\int_0^1 k\sin^2 \pi x \sin^2 \pi y \sin mx \sin ny dx dy$

15. $u_{11} = (B_{11}\cos(C\pi\sqrt{\frac{1}{9}+1}t) + B^*_{11}\sin(\frac{\pi x}{3})$
$\sin(\pi y)$이고 nodal line 은 rectangular 영역에서 없다.
$u_{31} = (B_{31}\cos(C\pi\sqrt{1+1}t)$
$+ B^*_{31}\sin(C\pi\sqrt{2}t)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$이고
이때 nodal line 은 $x=1, x=2$인 선위에서 있다.

16. frequency 는 $\frac{C\pi}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$이므로 $ab = k$가 일정할때 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$이 작게 되는 경우는 $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 = 0$ 이 되는 $a = b$일 때이다.

17. 임의의 m, n에 대해서는 $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}$이 작아지는 경우, 즉, $a^2n^2+b^2m^2-2abnm = (an-bm)^2$이 작아지는 경우이므로
$an = bm$ 비율이 만족되는 a, b일 때 가장 작다.

18. $\cos\lambda_{mn}t \sin\frac{m\pi x}{2}\sin n\pi y$와
$\sin\lambda_{mn}t\sin\frac{m\pi x}{2}\sin n\pi y, \lambda_{mn} c\pi\sqrt{\frac{m^2}{4}+n^2}$일 때
임의의 m, n에 대해 2개의 다른 eigenfunction이 있다.

19. $u(x,y,t) = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty B_{mn}\cos\lambda_{mn}t\sin m\pi x \sin n$
$, \lambda_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$
$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a \sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dx$

20. 19번 에서
$B_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a xy(a-x)(b-y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxd$

11.9. Laplace in Polar Coordinates

1. $u_x = u_r r_x + u_\theta\theta_x$
$= u_r\frac{x}{r} + u_\theta(-\frac{y}{r^2})$
$u_{xx} = (u_{rr}r_x + u_{r\theta})r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r}r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + u_\theta\theta_{xx}$
$= u_{rr}(\frac{x^2}{r^2}) - 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r + u_{\theta\theta}\frac{y^2}{r^4} + u_\theta\theta_{xx}$

2. $u_r = u_x x_r + u_y y_r$
$= u_x\cos\theta + u_y\sin\theta$
$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta$
$= u_x(-r\sin\theta) + u_y(r\cos\theta)$
$u_{rr} = u_{xr}\cos\theta + u_{yr}\sin\theta$
$= (u_{xx}\cos\theta + u_{xy}\sin\theta)\cos\theta + (u_{xy}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)\sin\theta$
$= u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\sin\theta\cos\theta + u_{yy}\sin^2\theta$
$u_{\theta\theta} = -r\cos\theta u_x - r\sin\theta u_y$
$+ (u_{xx}(-r\sin\theta) + u_{xy}(r\cos\theta))(-r\sin\theta)$
$+ (u_{xy}(-r\sin\theta) + u_{yy}(r\cos\theta))(r\cos\theta)$ 따라서 ,
$u_{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = u_{xx} + u_{yy}$

3. $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$
$= \frac{1}{r}(\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$
$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

4. u가 θ에 상관하지 않으면 $\frac{\partial u}{\partial\theta} = 0$이므로
$u_x - u_r r_x + u_\theta r_x + u_\theta\theta_x = u_r r_x$
$u_{xx} = (u_r r_x)_x = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx}$
$= u_{rr}r_x + u_r r_{xx}$
$\frac{x^2}{r^2}u_{rr} + \frac{y^2}{r^3}u_r$이 된다.따라서
$\Delta u = u_{rr}(\frac{x^2+y^2}{r^2})^2 + \frac{(x^2+y^2)}{r^3}u_r$
$= u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$

5. $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$이면
$u_r = ae^{-\log r} = \frac{a}{r}$이고 따라서
$u(r) = a\log r + b$ with constant a and b.

6. a) $u_n = r^n\cos n\theta$이면
$(u_x)_{rr} = n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta$
$(u_n)_r = nr^{n-1}\cos n\theta$
$(u_n)_{\theta\theta} = -n^2r^n\cos n\theta$이므로
$\Delta u = n(n-1)r^{n-2}\cos n\theta + nr^{n-2}\cos n\theta - n^2r^{n-2}\cos n\theta = 0$
b) $r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta$가 Laplace equation 을 만족하므로 $u(R,\theta) = f(\theta)$고 이에 Fourier 전개식이 $u(R,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = f(\theta)$이면 $r < R$에대해
$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty(a_n(\frac{r}{R})^n\cos n\theta + b_n(\frac{r}{R})^n\sin n\theta)$가 Laplace 이면서 경계조건 $u(R,\theta) = f(\theta)$가 된다.
c) 먼저 $a_0 + \sum_{n=1}^\infty(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = f(\theta)$, $f(\theta) = -100, -\pi < \theta < 0$, $f(\theta) = 100, 0 < \theta < \pi$ 이되도록 a_n, b_n을 결정한다. $\{\cos n\theta, \sin n\theta\}$가 $(0, 2\pi)$사이에서 orthonormal system 이므로
$a_0 = \frac{1}{2\pi}(\int_0^\pi 100\, d\theta + \int_{-\pi}^0 -100\, d\theta) = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^\pi 100\cos n\theta\, d\theta + \int_{-\pi}^0 -100\cos n\theta\, d\theta)$
$b_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^\pi 100\sin n\theta\, d\theta + \int_{-\pi}^0 -100\sin n\theta\, d\theta)$로 결정된다. 이때 $u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty(a_n r^n\cos n\theta + b_n r^n\sin n\theta)$이다.
d) $u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$가

Laplace 방정식을 만족하고
$u_n(R,\theta) = f(\theta)$
$= \sum_{n=1}^{\infty} nR^{n-1}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$이므로
$\pi n R^{n-1} a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$
$\pi n R^{n-1} b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$을 만족하고, 따라서, $a_n = \frac{1}{\pi} nR^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta \, d\theta$,
$b_n = \frac{1}{\pi} nR^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta \, d\theta$이다.

7. $u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta)$로 주어지므로
$u(\theta) = \sin^3\theta$로 부터
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cos n\theta d\theta$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \sin n\theta d\theta$

8. $a_0 = \frac{10}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta$
$a_n = \frac{10}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cos n\theta d\theta$
$b_n = \frac{10}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin n\theta d\theta$

9. $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta d\theta$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta \cos n\theta d\theta$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta \sin n\theta d\theta$

10. $a_0 = \frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi} \theta d\theta + \int_{-\pi}^{0} -\theta d\theta)$
$a_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi} \theta \cos n\theta d\theta + \int_{-\pi}^{0} -\theta \cos n\theta d\theta)$
$b_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi} \theta \sin n\theta d\theta + \int_{-\pi}^{0} -\theta \sin n\theta d\theta)$

11. x축의에서 (1,0)에서 0 이고 (-1,0)에서 π값을 갖는다. 따라서 , $u''(x) = 0, u(1) = 0, u(-1) = \pi$인 함수를 구하면
$u(x) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$이다.

12. 7번의 해에서 100을 곱한것이다.

13. $u_0 = -const = -k$ on $y < 0$을 잡으면
$a_0 = \frac{1}{2\pi}(\int_0^{\pi} k d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} -k d\theta) = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi} k\cos n\theta d\theta - \int_{-\pi}^{0} k\cos\theta d\theta) = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}(\int_0^{\pi} k\cos n\theta d\theta - \int_{-\pi}^{0} k\sin\theta d\theta) = 0$인 해, 즉, $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \sin n\theta$이다.

14. $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 10\theta(\pi-\theta)d\theta$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 10\theta(\pi-\theta)\cos n\theta d\theta$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 10\theta(\pi-\theta)\sin n\theta d\theta$ 로 이루어지는 해

15. $x^* = x + a,\ y^* = y + b$이면
$u_{x^*} = u_x,\ u_{y^*} = y_x$이므로 Δu는 변하지 않는다.
$x^* = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ y^* = x\sin\alpha + y\cos\alpha$일 때는
$u_x = u_{x^*}(x^*)_x + u_{y^*}(y^*)_x$
$= u_{x^*}\cos\alpha + u_{y^*}\sin\alpha$
$u_{xx} = (u_x)_{x^*}\cos\alpha + (u_x)_{y^*}\sin\alpha$
$= (u_{x^*}\cos\alpha + u_{y^*}\sin\alpha)_{x^*}\cos\alpha$
$+ (u_{x^*}\cos\alpha + u_{y^*}\sin\alpha)_{y^*}\sin\alpha$
$= u_{x^*x^*}\cos^2\alpha + 2u_{x^*y^*}\sin\alpha\cos\alpha + u_{y^*y^*}\sin^2\alpha$
$u_{yy} = u_{x^*x^*}\sin^2\alpha - 2u_{x^*y^*}\sin\alpha\cos\alpha + u_{y^*y^*}\sin^2\alpha$ 이므로 $u_{xx}+u_{yy} = u_{x^*x^*}+u_{y^*y^*}$이다.

11.10. Circular Membrane, Use of Fourier-Bessel Series

1. frequency $\frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{C\alpha_m}{R}$로 표현되고 α_m은 $J_0(s)$의 zero 점들이다. 따라서 , R이 작을수록 frequency는 크다.

2. $\frac{\lambda_1}{2\pi} = \frac{ck_1}{2\pi} = \frac{c\alpha_1}{2\pi R} = \frac{2.40483c}{2\pi R}$

3. $C^2 = \frac{T}{\rho}$이므로 원하는 frequency $\frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{\sqrt{T}\alpha_m}{R\sqrt{\rho}}$이므로 $\sqrt{T} = \frac{R\sqrt{\rho}}{\alpha_m}\frac{\lambda_m}{2\pi}$이 되도록 장력을 주면된다.

4. 원형의 영역에서 파동 방정식을 변수분리법으로 해결하기 위해서이다.

5. frequency 는 $\sqrt{T}$에 비례한다.

6. Cas project

7. $u(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m \cos\lambda_m t + b_m \sin\lambda_m t)J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)$ 이므로 $u_t(r,0) = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda_m b_m J_0(\frac{\alpha_m}{R}r) = g(r)$이어야 한다.
따라서
$b_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)\lambda_m}\int_0^R rg(r)J_0(\frac{alpha_m}{R}r)\ dr$이다.

8. $u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\lambda_m t J_0(\frac{\alpha_m r}{R})$,
$\lambda_m = ck_m = \frac{c\alpha_m}{R}$
$b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rg(r)J_0(\frac{\alpha_m r}{R})dr$이므로
$R = 1, c = 1, g(r) = 1$이면
$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\alpha_m t J_0(\alpha_m r)$,
$b_m = \frac{2}{\alpha_m J_1^2(\alpha_m)}\int_0^R rJ_0(\alpha_m r)dt$이다.

9. nodal line은 λ_m에대해 $J_0(k_m r)$에서 $k_m r$이 J_0함수의 0이되는 r이다. 따라서 $m = 2$일 때는 $r = \frac{a_1 R}{a_2}$에서 생기고 $m = n$이면 $n-1$개의 지점에서 nodal

line이 있다.

10. 식 (12)로 부터 초기속도가 0 인해는 $u(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty}(a_m \cos\lambda_m t)J_0(\frac{alpha_m}{R}r)$인데 Example 1에서 $f(r) = 1 - r^2$이므로 $f(0) = 1$이고 $u(r,0) = \sum_{m=0}^{\infty}$이므로 1 이다.

11. $FG'' = C^2(F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta})G$
$\frac{G''}{C^2G} = \frac{1}{F}(F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}) = -k^2$.따라서 $G'' + \lambda^2 G = 0$, where $\lambda = Ck$
$F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + k^2F = 0$

12. $F(r,\theta) = W(r)Q(\theta)$로 놓으면
$W''Q + \frac{1}{r}W'Q + \frac{1}{r^2}WQ'' + k^2WQ = 0$
따라서 $\frac{W''}{W} + \frac{W'}{rW} + \frac{Q''}{r^2Q} + k^2 = 0$
$r^2W'' + rW' + k^2r^2 = -\frac{Q''}{Q} = const$인데 Q는 θ에 대한 함수이고 $Q(0) = Q(2\pi) = Q(4\pi)\cdots$인 조건을 만족해야 하므로 $const = n^2$형태여야한다. 고로 $Q'' + n^2Q = 0$
$r^2W'' + rW' + (k^2r^2 - n^2)W = 0$이다.

13. $Q_n = \cos n\theta$, $Q_n^* \sin n\theta$이고, $s = kr$로 놓으면
$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial s}k$
$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}k^2$이다.
$r^2\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + r\frac{\partial W}{\partial r} + (k^2r^2 - n^2)W$
$= s^2\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + s\frac{\partial W}{\partial s} + (s^2 - n^2)W = 0$이므로 $W(s) = J_n(s)$를 만족한다.

14. $u(R,\theta,t) = 0$인 경계조건으로 부터 $J_n(kR) = 0$이되는 $kR = \alpha_{nm}$인 $k_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$이다.

15. $G_{mn}(t) = A_{mn}\cos Ck_{mn}t + B_{mn}\sin Ck_{mn}t$이다. 따라서 , $u_{mn} = (A_{mn}\cos Ck_{mn}t + B_{mn}\sin Ck_{mn}t)J_n(k_{mn}r)\cos n\theta$.

16. 15번으로 부터 $u_t(r,\theta,0) = 0$은 $B_{mn} = 0$과 $B_{mn}^* = 0$을 의미한다.

17. u_{m0}^*는 $\sin 0\theta = 0$이므로 0 이고 $u_{m0} = (A_{m0}\cos Ck_{m0}t + B_{m0}\sin CK_{m0}t)J_n(k_{m0}r)$이다.

18. $u_{11} = (A_{11}\cos Ck_{11}t + B_{11}\sin Ck_{11}t)J_1(k_{11}r)\cos\theta$은 $\cos\theta$가 역할을 이루는 진동을 준다. $C^2 = 1$이고 $R = 1$인 상태에서 frequency는 $\frac{k_{11}}{2\pi} = \frac{\alpha_{11}}{2\pi}$ 이다. 즉, J_1함수의 첫번때 0 인점 α_{11}을 2π로 나눈 것이다.

11.11. Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential

1. 2차원에서의 형태와 같다. 따라서, 11.9절의 2번과 동일.

2. $x = r\cos\theta\sin\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\phi$
$u_x = u_r\cos\theta\sin\phi + u_\theta(-r\sin\theta\sin\phi) + u_\phi(r\cos\theta\cos\phi)$
$u_{xx} = (u_x)_r\cos\theta\sin\phi + (u_x)_\theta(-r\sin\theta\sin\phi) + (u_x)_\phi(r\cos\theta\cos\phi)$
$= (u_{rr}\cos\theta\sin\phi + u_{r\theta}(-r\sin\theta\sin\phi) - u_\theta(\sin\theta\sin\phi)$
$+ u_{r\phi}(r\cos\theta\cos\phi) + u_\phi(\cos\theta\cos\phi) - u_\phi(\cos\theta\cos\phi))$
$\cos\theta\sin\phi$
$+(u_{r\theta}\cos\theta\sin\phi - u_r\sin\theta\sin\phi + u_{\theta\theta}(-r\sin\theta\sin\phi)$
$+ u_\theta(-r\cos\theta\sin\phi) + U_{\phi\theta}(r\cos\theta\cos\phi) + u_\phi(-r\sin\theta\cos\phi))$
$(-r\sin\theta\sin\phi)$
$+(u_{r\phi}\cos\theta\sin\phi + u_r(\cos\theta\cos\phi) + u_{\theta\phi}(-r\sin\theta\sin\phi)$
$+ u_\theta(-r\sin\theta\cos\phi) + u_{\phi\phi}(r\cos\theta\cos\phi) + u_\phi(-r\cos\theta\sin\phi))$
$(r\cos\theta\cos\phi)$
$= u_{rr}(\cos^2\theta\sin^2\phi) + u_{\theta\theta}(r^2\sin^2\theta\sin^2\phi) + u_{\phi\theta}(r^2\cos^2\theta\cos^2\phi)$
$+ u_{r\theta}(-2r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi)$
$+ u_{r\phi}(2r\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi)$
$+ u_{\theta\phi}(-2r^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\cos\phi)$
$+ u_r(r\sin^2\theta\sin^2\phi + r\cos^2\theta\cos^2\phi)$
$+ u_\theta(-\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi - r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi)$
$+ u_\phi(\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi + r^2\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - r^2\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi)$
마찬가지 방법으로 u_{yy}, u_{zz}을 계산하여 더한다.

3. $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = 0$이면 $v = u_r$이라 놓으면
$v(r) = e^{-\int\frac{1}{r}dr} = e^{-\log r} = \frac{c}{r}$
$u = C\log r + k$ with constant C and k

4. $u(2) = C\log 2 + k = 220$
$u(4) = C\log 4 + k = 140$
$C(\log 4 - \log 2) = -80$로 부터 C k가 결정된다.

5. $u = \frac{C}{r}$이면 $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{C}{r^2}$ $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{2C}{r^3}$ 이고
$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$
$= \frac{2C}{r^3} + \frac{2}{r}(-\frac{C}{r^2}) = 0$이다.

6. $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r = 0$
$u_r = \frac{C}{r^3}$ 따라서 , $u = \frac{C}{r} + k$형태이다.

7. $u(2) = \frac{C}{2} + k = 220$

$u(4) = \frac{C}{4} + k = 140.$

8. $u(r) = \frac{C}{r}$를 $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$에 대입하면

$u_x = u'(r)r_x = u'(r)\frac{x}{r}$

$u_{xx} = u''(r)\frac{x^2}{r^2} + u'(r)\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2}$

$u''(r)\frac{x^2}{r^2} + u'(r)\frac{x^2+z^2}{r^3}$ 따라서 , $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

$= u''(r)(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}) + u'(r)\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{r^3}$

$= u''(r) + 2\frac{u'}{r} = 0$

9. $u_t = C^2(u_{rr} + 2\frac{u_r}{r})$

$u(R,t) = 0,\ u(r,0) = f(r)$

이때 $v = ru$라 놓으면

$v_r = u + ru_r$

$v_{rr} = u_r + u_r + ru_{rr}$

$= ru_{rr}2u_r$

$v_t = ru_t = C^2(ru_{rr} + 2u_r)$

C^2v_{rr} 이고

$v(R,t) = 0,\ v(r,0) = rf(r),\ v(0,t) = 0$

$v(r,t) = F(r)G(t)$일 때

$FG' = C^2F''G$

$\frac{G'}{C^2G} = \frac{F''}{F} = -k^2$

$F(r) = C_1\cos kr + C_2\sin kr$

$F(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\sin kR = 0 \ \Rightarrow\ k_n = \frac{n\pi}{R}$ 따라서 $F_n(r) = \sin\frac{n\pi}{R}r$이고, 이때 $G_n(t) = e^{-\int C^2k_n^2dt} = e^{-C^2k_n^2t}$

10. $u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nr^nP_n(\cos\phi),$

$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$

$= \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\cos\phi P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$

11. $A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$

12. $A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$

13. $A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\phi P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$

14. $A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}(10\cos^3\phi - 3\cos^2\phi - 5\cos\phi - 1)$ $\phi P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$

15. 원점에서 주어진 point charge로 $\frac{1}{r}$식으로 주어지고 이는 $R = 1$에서 1 을 만족하고 무한에서 0 이다. 이런 식을 만족하는 것은 유일하고 따라서, 11 번 식을 만족하는 exterior potential은

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi),$

$B_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\phi)\sin\phi d\phi$와 $\frac{1}{r}$은 일치한다.

16. $u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\varphi),$

$B_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$

17. 10번 문제에서

$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} wP_n(w)dw$이고 $P_1(w) = w$, $P_n(w)$는 (-1,1)구간에서 orthogonal 하므로 $A_1 = 1, A_n = 0(n > 1)$이다. 따라서, $u(r,\phi) = r\cos\phi$식을 만족한다. 따라서, xz 평면에서 equipotential line 은 $\phi = 0$일 때 $r = k$ 값에서 $\phi = \frac{\pi}{2}$로 가면서 $\cos\phi$는 0 으로 가므로 r은 ∞를 가야한다. 이는 x축을 점근선으로 갖는 그래프의 형태를 준다.

18. $A_n =$

$\frac{55(2n+1)}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!}$

따라서 ,

$A_4 = \frac{55\cdot 9}{24}\sum_{m=0}^{2}(-1)^m\frac{(8-2m)!}{m!(4-m)!(4-2m+1)!}$

$= \frac{55\cdot 9}{16}(\frac{8!}{4!5!} - \frac{6!}{3!3!} + \frac{4!}{4})$

19. θ에 independent 한 해

$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nr^nP_n(\cos\varphi)$이고

$A_n = \frac{2n+1}{2}\int^{\pi} -0f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\ \ d\varphi$인데 f가 $0 < \frac{\pi}{2}$는 0 이고, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$에서 20 이다. 따라서 ,

$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 20P_n(\cos\varphi)\sin\varphi\ d\varphi$

$= 10(2n+1)\int_0^{-1} P_n(\omega)d\omega$

$10(2n+1)\int_{-1}^{0} P_n(\omega)d\omega$

20. $v_r = \frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r}(-\frac{1}{r^2}u_{r^*}, r^* = 1/r,$

$v_{rr} = \frac{2}{r^3}u + \frac{1}{r^4}u_{r^*} + \frac{3}{r^4}u_{r^*} + \frac{1}{r^5}u_{r^*r^*}$

따라서 ,

$\frac{1}{r^5}u_{r^*r^*} + \frac{2}{r^4}u_{r^*} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$

$+ \frac{\cot\phi}{r^3}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{1}{r^3\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

$= r^{*5}(u_{r^*r^*} + \frac{2}{r^*}u_{r^*} + \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$

$+ \frac{\cot\phi}{r^{*2}}\frac{\partial u}{\partial\phi} + \frac{1}{r^{*2}\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})$

$= 0$

21. $v(r,\theta) = u(\frac{1}{r},\theta)$일 때 $r^* = \frac{1}{r}$라 놓고

$v_r = -\frac{1}{r^2}u_{r^*}$

$v_{rr} = \frac{2}{r^3}u_{r^*} + \frac{1}{r^4}u_{r^*r^*}$

따라서 , $v_{rr} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}$

$= r^{*4}u_{r^*r^*} + r^{*3}u_{r^*} + r^{*2}u_{\theta\theta}$

$= r^{*4}(u_{r^*r^*} + \frac{1}{r^*}u_{r^*} + \frac{1}{r^{*2}}u_{\theta\theta})$

$= 0$

22. $v(r,\theta) = \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}$가 되고 따라서,
$v(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$이다.

23. $u_n(r,\phi) = A_n r^n P_n(\cos\phi)$와
$u_n^*(r,\phi) = \dfrac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\phi)$
따라서 ,
$v_n(r,\phi) = \dfrac{A_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\phi), v_n^*(r,\phi)$
$= B_n P_n(\cos\phi)$가 된다.

24. a)Δx 양에서의 전압강하는 $-Ri\Delta x$와 $-L(\dfrac{\partial i}{\partial t})\Delta x$로 주어지고 그양은 $u_{x+\Delta x} - u_x$이다. 따라서 , Kirchoff 법칙에의해 $u_{x+\Delta x} - u_x = Ri\Delta x + L(\dfrac{\partial i}{\partial t})\Delta x$이므로 $\Delta x \to 0$에 의해 얻어진다.
b) 전류의 변화량
$i_{x+\Delta x} - i_x = -Gu\Delta x + C\dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta x$로 표현된다.
c)$-\dfrac{\partial u}{\partial x} = Ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t}$
$-u_{xx} = Ri_x + L\dfrac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$
$= Ri_x + L(-Gu - Cu_t) + L(-Gu_t - Cu_{tt})$
$= R(-Gu - Cu_t) + L(-Gu_t - Cu_{tt})$
$u_{xx} = LCu_{tt} + (RC + GL)u_t + RGu$
d)$u_t = \dfrac{1}{RC}u_{xx}$
$u(0) = 0, u(l) = 0, u(x,0) = U_0$인 해는
$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(\dfrac{n\pi x}{l})e^{\lambda_n^2 t}, \lambda_n^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2 RC}$
$B_n = \dfrac{1}{\int_0^l \sin^2(\frac{n\pi x}{l})dx} \int_0^l U_0 \sin(\dfrac{n\pi x}{l})dx$
e) $u_{tt} = \dfrac{1}{LC}u_{xx}$
$u(0,t) = u(l,t) = 0, u_t(x,0) = 0, u(x,0) = U_0\sin(\dfrac{\pi x}{l})$이므로
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\lambda_n t \sin\dfrac{n\pi x}{l}$,
$\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\sqrt{LC}}$
따라서 ,
$B_n = \dfrac{2}{l}\int_0^l U_0 \sin(\dfrac{\pi x}{l})\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$로 주어진다.

11.12. Solution by Laplace Transforms

1. $w(x,t) = f(t - \dfrac{x}{C})u(t - \dfrac{x}{C})$
$w_{tt} = f''(t - \dfrac{x}{C})u(t - \dfrac{x}{C})$
$w_{xx} = \dfrac{1}{C^2}f''(t - \dfrac{x}{C})u(t - \dfrac{x}{C})$ 따라서 , $w_{tt} = C^2 w_x x$
$w(0,t) = f(t)u(t)$
$= f(t),\ t \geq 0.$

2. $C^2 = \dfrac{T}{\rho}$이므로 속도 $C = \sqrt{T}$에 비례하고, 질량의 root에 반비례 한다. 즉, 질량이 작아질수록 속도는 커진다.

3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$ 이고 $C = 1$로 주어짐으로 Fig.287 처럼 주기가 2인 상태로 옮겨갈 것이다.

4. $W(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$라고 놓으면
$\dfrac{\partial W}{\partial x} + 2x(sW(x,s) - 1) = \dfrac{2x}{s}$가 되고 $W(0,s) = \dfrac{1}{s}$이 된다.
따라서 , $W(x,s) = e^{x^2 s}(\int e^{x^2 s}(2xs + 2x)dx + c)$
$= \dfrac{s+1}{s^2} - \dfrac{e^{-x^2 s}}{s^2}$
따라서 , $u(x,t) = t + 1 - (t - x^2)v(t - x^2)$, v는 단위 계단함수이다.

5. $xW_x + sW = \dfrac{x}{s^2}$
$W(0,s) = 0$
$W_x + \dfrac{s}{x}W = \dfrac{1}{s^2}$
$W(x,s) = \dfrac{1}{x^s}(\int x^s \dfrac{1}{s^2}dx + C)$
$= \dfrac{1}{x^s}(\dfrac{1}{(s+1)s^2}x^{s+1} + C)$
$= \dfrac{1}{s^2(s+1)}x + \dfrac{C}{x^s}$
$W(0) = 0 \Rightarrow C = 0$
$W(x,s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}x$
$= (-\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s+1})x$
$w(x,t) = x(e^{-t} + t - 1)$

6. $u = F(x)G(t)$
$xF'G = FG' = xt$
$\dfrac{xF'}{F} + \dfrac{G'}{G} = \dfrac{xt}{FG}$
이 때, $F(x) = x$ 가 식을 만족하고,
$1 + \dfrac{G'}{G} = \dfrac{t}{G} \Rightarrow G' + G = t$
$\Rightarrow G = Ce^{-t} + t - 1$
$u(x,0) = 0 \Rightarrow C = 1$
$u(x,t) = x(e^{-t} + t - 1)$

7. $u_t - C^2 u_{xx} = 0$
$u_x(0,t) = 0,$
$u(0,t) = f(t), f(0) = 0$
$sw - C^2 w_{xx} = 0$
$w(x,s) = C_1(s)e^{\frac{\sqrt{s}}{C}x} + C_2(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{C}x}$인데
$\lim_{x\to\infty} w(x,s) = 0$에 의해 $C_1(s) = 0$, 그리고
$w(0,s) = F(s)$이면
$w(x,s) = F(s)e^{\frac{sqrts}{C}x}$

8. $w(x,t) = f * \mathcal{L}^{-1}(e^{-\frac{\sqrt{s}}{C}x})$
$= \int_0^t f(t-\tau)\frac{k}{2\sqrt{\pi\tau^3}}e^{-\frac{k^2}{4\tau}}d\tau, k = \frac{x}{C}$

9. $w_0(x,t) = \frac{x}{2C\sqrt{\pi}}\int_0^t \tau^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4C^2\tau}}d\tau$
$w = \frac{x}{2C\sqrt{\tau}} \Rightarrow dw = \frac{x}{2C}(-\frac{1}{2}\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau)$
$\frac{x}{2C\sqrt{\pi}}\int_\infty^{\frac{x}{2C\sqrt{t}}} e^{-w^2} - \frac{4C}{x}dw$
$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^{\frac{x}{2C\sqrt{t}}} e^{-w^2}dw$
$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2C\sqrt{t}}}^\infty e^{-w^2}dw$
$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\int_0^\infty e^{-w^2}dw - \int_0^{\frac{x}{2C\sqrt{t}}} e^{-w^2}dw)$
$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x}{2C\sqrt{t}}} e^{-w^2}dw)$
$= 1 - erf(\frac{x}{2C\sqrt{t}})$

10. $w_0(x,s) = \frac{1}{s}e^{\frac{\sqrt{s}x}{C}}$
$w(x,s) = F(s)sw_0(x,s) = F(s)(sw_0(x,s) - w(s,0))$
$= F(s)\mathcal{L}(\frac{\partial w_0}{\partial t})$
$w(x,t) = f * \frac{\partial w_0}{\partial t}$
$= \int_0^t f(t-\tau)\frac{\partial w_0}{\partial \tau}d\tau$

Chapter 11. Review

1. 어떤 현상의 변화량을 다루고 그 양을 구할때 구하고자 하는 변수의 갯수에 따라 하나만 구할때는 상미분 방정식이 되고, 2개 이상의 변화량이 포함되어진 방정식은 편미분 방정식이 된다.

2. a) Laplace equation: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ 북의 진동, conductivity 문제 등...
   b) Parabolic equation: $u_t - \Delta u = f$ 열전도 방정식, 확산 방정식, finance 등...
   c) Wave equation : $u_{tt} - \Delta u = f$ 파동 방정식...

3. $F = ma$의 식을 사용하였다. 파동 방정식.

4. 구간 $(0,\pi)$사이에서 고정된 vibrating string은 eigenvalue $\lambda_n = n^2$ 와 eigenfunction $u_n = \sin nx$를 갖는다.

5. 원형이나 무한영역에서 다루는 문제는 극좌표를 사용하는것이 변수분리 하기가 용이하다.

6. 원형의 파동방정식 에서 Bessel equation이 보이고, 3차원 Laplace 구면좌표계를 사용하는 과정내서 Legendre equation이 보인다.

7. 원형이나 사각형 영역에서 편미분방정식을 다룰때 변수분리 방법을 쓴다.

8. 2차원 이상의 원형이나 사각형 영역에서 열전도 방정식이나 파동 방정식을 풀때 시간과 영역에서의 변수분리를 쓴다.

9. 일차원 무한영역에서 초기조건이 주어진 파동방정식에서 변수치환 방법이다.

10. a) Dirichlet condition: 경계조건이 미분이 없는 조건.
    b) Neumann condition : 경계조건이 경계의 outer normal의 미분으로 주어질 때.
    c) mixed boundary condition: a)와 b)가 조합된 경우.

11. eigenvalue 와 eigenfunction들로 주어진 해가 초기조건을 만족시켜야 할때 많은 경우 eigenfunction들이 삼각함수의 형태이고 이 때 초기조건을 eigenfunction들인 Fourier series로 나타내고 이에 맞는 계수들을 찾는다.

12. 시간이 흐를수록 해가 decay 한다.

13. 무한영역의 열전도방정식이나 Fourier transform으로 변수를 줄일때 사용한다.

14. 직사각형 영역이나 원형의 영역에 주어진 편미분방정식인 경우 대부분 변수분리를 통해 상미분 방정식의 형태로 바꾼다.

15. Laplace 변환의 두가지 중요성은 첫째, smooth 하지 않은 함수를 Laplace 변환을 통해 smooth하게 하는 성질이 있고, 둘째, 미분을 Laplace 변환하면 미분이 없어지는 성질이 있다.

16. 변수를 바꿈으로 우리가 아는 형태의 미분방정식이 되는 경우가 있다.

17. 2번 문제에서 다루었다.

18. 원형의 진동문제에서는 eigenfunction으로 Bessel function이 되고, 이때의 frequency는 J_0함수가 0이 되는 부분에 상관하는데 vibrating string에서는 sin함수가 0 이되는 것에 상관한다.

19. 열전도 방정식은 변수분리를 통하여 시간에 대한 1차 미방이되어 이에 대한 해는 시간에 대한 decay조건으로 exponential 해가되고, 파동 방정식에서는 시간에 대한 2차 미방이 되어 삼각 함수들의 조합이된다.

20. 일차원 부한영역에서 열전도 방정식의 해로 이는 통계에서의 정규분포 함수를 준다.

21. Put $u = e^{\lambda} \Rightarrow u = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$.

22. $u_y + u - \frac{1}{2}x^2$
$u(x,y) = e^{-y}(\int e^y - \frac{1}{2}x^2 dy + C(x))$
$= e^{-y}(-\frac{1}{2}x^2 e^y + C(x))$
$= -\frac{1}{2}x^2 + C(x)e^{-y}$

23. Put $u = e^{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$
$\Rightarrow \quad u_h(y) = C_1 e^y + C_2 e^{-4y}$
$u_p(y) = -3$. 따라서 , $u(y) = C_1 e^y + C_2 e^{-4y} - 3$

24. $\lambda^2 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, -1$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = C_1(y) + C_2(y)e^{-x}$
$u(0,y) = f(y) = C_1(y) + C_2(y)$
$u_x(0,y) = g(y) = -C_2(y)$
$\Rightarrow \quad C_1(y) = f(y) - C_2(y) = f(y) - g(y)$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(y) + g(y) - g(y)e^{-x}$

25. $u(x,y) = F(x)G(x)$라 놓으면
$F'G = yFG' \quad \Rightarrow \quad \frac{F'}{F} = \frac{yG'}{G} = k$
$F'(x) - kF(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = Ce^{-kx}$
$G' - \frac{k}{y}G = 0 \quad \Rightarrow \quad G(y) = Ce^{-\log y^k} = \frac{C}{yk}$
따라서 , $u(x,y) = \frac{C}{y^k}e^{-kx}$

26. Laplace equation 으로 부터 $F''G + FG'' = 0 \quad \Rightarrow$
$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = const$
a) $const = 0$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = (ax+b)(cy+d)$
b) $const = k^2 > 0$
$F(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \quad G(y) = C\cos ky + D\sin ky$
$\Rightarrow \quad u(x,y) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(C\cos ky + D\sin ky)$
c) $const = -k^2 < 0$
$u(x,y) = (A\cos ky + B\sin ky)(Ce^{kx} + De^{-kx})$

27. $z = -2x + y, v = 2x + y$
$u(x,y) = f(-2x+y) + g(2x+y)$

28. $z = -3x + y, v = x$
$u(x,y) = f(-3x+y)x + g(-3x+y)$

29. $z = x + y, v = x$
$u(x,y) = f(x+y) + g(x)$

30. $u(x,0) = \sin^2 x = f(x)$
$u_{tt} - 4u_{xx} = 0$. 따라서 ,
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(2nt)\sin(nx)$,
$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx$

31. $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 5x \sin nx\ dx$

32. $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}\pi - |x - \frac{1}{2}\pi|)\sin nx\ dx$

33. $u_t - 1.158u_{xx} = 0$
$u(o,t) = u(100,t) = 0$
$u(x,0) = \sin 0.01\pi x$
$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi x}{100})e^{-\lambda_n^2 t}$
$, \lambda_n = \frac{n\pi\sqrt{1.158}}{100}$
$B_n = \frac{1}{50}\int_0^{100} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{100}\ dx$

34. $B_n = \frac{1}{50}\int_0^{100}(50 - |50 - x|)\sin(\frac{n\pi x}{100}\ dx$

35. $B_n = \frac{1}{50}\int_0^{100}(\sin^3 0.01\pi x)\sin(\frac{n\pi x}{100}\ dx$

36. $u_t - u_{xx} = 0$
$u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t)$
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx)e^{-\lambda_n^2 t}$
$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\ dx$,
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx,\ n = 1, 2, \cdots$

37. $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 250\cos 2x\ dx$,
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 250\cos 2x\cos(nx)\ dx,\ n = 1, 2, \cdots$

38. $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi - 4|x - \frac{1}{2}\pi|)\ dx$,
$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2\pi - 4|x - \frac{1}{2}\pi|)\cos(nx)\ dx,\ n = 1, 2, \cdots$

39. 정상상태의 해는
$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi x}{)}12\sinh(\frac{n\pi y}{12})$,
$a_n \sinh(n\pi) = \frac{1}{6}\int_0^{12} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{12})\ dx$로 주어진다.

40. $a_n = \frac{1}{6\sinh(n\pi)}\int_0^{12} 100\sin(\frac{n\pi x}{12})dx$

41. $a_n = \frac{1}{6\sinh(n\pi)}\int_0^{12} \sin(\frac{\pi x}{4}\sin(\frac{n\pi x}{12})dx$

42. $\pi R^2 = 1 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$
$\frac{k_{11}}{2\pi} = \frac{\alpha_{11}}{R} = 0.6784$

43. $\frac{\lambda_m}{2\pi} = \frac{k_1}{2\pi} = \frac{\alpha_1}{2\pi R}$,
$\pi R^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
$\Rightarrow \quad \frac{\alpha_1}{2\sqrt{2}} = 0.6748$

44. $\frac{\lambda_{11}}{2\pi} = \frac{\sqrt{1+1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

45. $\frac{\lambda_{11}}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$

46. $\frac{\pi R^2}{2} = 1 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$
$\frac{k_{11}}{2\pi} = \frac{\alpha_{11}}{2\pi R} = \frac{3.832}{\sqrt{8\pi}}$

47. $\frac{\pi R^2}{4} = 1 \Rightarrow R = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

$\frac{k_{12}}{2\pi} = \frac{\alpha_{12}}{2\pi R} = \frac{\alpha_{12}}{4\sqrt{\pi}}$

48. $\Delta u = 0$

$u(r_0) = u_0, \quad u(r_1) = u_1$이므로

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$

$\Rightarrow u(r) = C_1 e^{-\int \frac{2}{r}\, dr} + C_2 = C_1 e^{-2\log r} + C_2$

$\Rightarrow \quad u(r) = \frac{C_1}{r^2} + C_2$

$u(r_0) = u_0 = \frac{C_1}{r_0^2} + C_2$

$u(r_1) = u_1 = \frac{C_1}{r_1^2} + C_2$

$\Rightarrow C_1(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2}) = u_0 - u_1$

$\Rightarrow C_1 = \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}(u_0 - u_1)$

49. Cylindrical coordinate에서는

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$이므로

$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$

$u(r_0) = u_0 = \frac{C_1}{r_0} + C_2$

$u(r_1) = u_1 = \frac{C_1}{r_1} + C_2$

$\Rightarrow C_1(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}) = u_0 - u_1$

$\Rightarrow C_1 = \frac{r_0 r_1}{r_1 - r_0}(u_0 - u_1)$

50. $g(\phi) = 4\cos^3\phi$이고

$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\phi)$,

$A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\phi)\sin\phi\, d\phi$로 계산한다.

CHAPTER 12

Complex Numbers and Functions. Conformal Mapping

Complex numbers and the complex plane are discussed in Secs. 12.1–12.2. Complex analysis is concerned with complex analytic functions, as defined in Sec. 12.3. In Sec. 12.4 we explain a check for analyticity based on the so-called Cauchy–Riemann equations. The latter are of basic importance. They are related to Laplace's equation (Sec. 12.4). In the remaining sections of Chap. 12 we study the most important elementary complex functions (exponential function, trigonometric functions, etc.), which generalize familiar real functions known from calculus. This includes discussions of geometric properties of these functions in connection with conformal mapping (defined in Sec. 12.5).

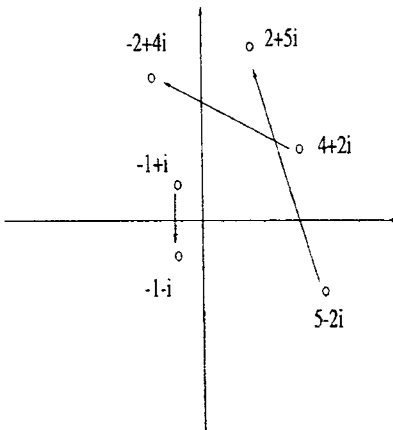
Prerequisites for this chapter: Elementary calculus.
References: Appendix 1, Part D.
Answers to problems: Appendix 2.

이 장에서 사용하는 각도 α, β, γ는 모두 삼각형의 내각을 표현하는 것으로 한다.

12.1. Complex Numbers.Complex Plane

1. 곱셈의 정의에 의하여 $i^2 = i \times i = (0,1) \times (0,1)$ 의 계산은 $(0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0)$ 과 같이 되어 $i^2 = -1$을 얻는다. 그리고 $i^3 = i^2 \times i$ 이고 $i^2 = -1$ 이므로 $i^3 = (-1) \times i = (-1,0) \times (0,1)$ 는 $(-1 \times 0 - 0 \times 1, -1 \times 1 + 0 \times 0) = (0,-1) = -i$ 가 된다. $i^4 = i^3 \times i = (0,-1) \times (0,1) = (0 \times 0 - (-1) \times 1, 0 \times 1 + (-1) \times 0)$ 를 계산하여 $(1,0) = 1$을 얻는다. $i^4 = 1$로부터 임의의 자연수 n에 대해 $i^{4n} = 1$임을 $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n$을 통하여 알 수 있고 $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$을 이용하면 다음의 결론을 얻을 수 있다. 즉, 임의의 자연수 m에 대하여 i^m은 m을 4로 나눈 나머지가 각각 0,1,2,3일 때 $1, i, -1, -i$ 가 된다.

2.



3. $z_1 z_2 = (4+3i)(2-5i) = 8+10+i(6-20) = 18-14i$.

4. $(3z_1 - z_2)^2 = (12+9i-2+5i)^2 = 100-196+280i = -96+280i$.

5. $1/z_1 = 1/(4+3i) = (4-3i)/[(4+3i)(4-3i)] = 4/25 - 3/25i$.

6. $25z_2/z_1 = 25/z_1 z_2 = (4-3i)(2-5i) = -7-26i$.

7. $Re(z_1^3) = Re(-44+117i) = -44$.

8. ???$(z_1 - z_2)/(z_1 + z_2) = (2+8i)/(6-2i) = 7/10 + 11/10i$.

9. $z_1 \overline{z_2} = (4+3i)(2+5i) = -7+26i$, $\overline{z_1} z_2 = (4-3i)(2-5i) = -7-26i$.

10. $1/z_1^2 = 1/(4+3i)^2 = 1/(7+24i) = (7-24i)/625$, $1/\overline{z_1}^2 = 1/(4-3i)^2 = (7+24i)/625$.

11. $\overline{z_1}/\overline{z_2} = (4-3i)/(2+5i) = [(4-3i)(2-5i)]/[(2+5i)(2-5i)] = (-7-26i)/29$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{(4+3i)/(2-5i)} = \overline{-7/29+26/29i} = -7/29 - 26/29i$.

12. ???$(z_2\overline{z_2})/(z_1\overline{z_1}) = [(4+3i)(4-3i)]/[(2-5i)(2+5i)] = 25/29$.

13. $1/z = (x-iy)/(x^2+y^2)$이므로 $Im(1/z) = -y/(x^2+y^2)$이다.

14. 먼저 $z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$임을 보면 $z^4 = (z^2)^2$의 Imaginary부분은 $2(x^2-y^2)(2xy) = 4xy(x^2-y^2)$임을 알 수 있다. 그리고 $Im(z^2) = 2xy$이니까 $(Im(z^2))^2 = 4x^2y^2$이다.

15. $(1+i)^2 = 1-1+2i$에서 $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$이고 계속 하면 $(1+i)^{16} = [(1+i)^4]^4 = (-4)^4 = 256$을 얻는다.

16. 먼저 $z/\overline{z} = z^2/(z\overline{z})$에서 분모는 실수 x^2+y^2 이고 분자는 $x^2-y^2-i(2xy)$라는 두 사실을 관찰하면 $Re(z/\overline{z}) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)$을 알 수 있다.

17. 16과 비슷한 방식으로 분모는 같고 분자는 z^3이므로 분자가 $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$임에 의하여 $Re(z^2/\overline{z}) = Re(z^3/(z\overline{z})) = (x^3-3xy^2)/(x^2+y^2)$.

18. z_1, z_2, z_3를 각각 $x_1+iy_1, x_2+iy_2, x_3+iy_3$로 여섯개의 실수 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$로 표현하기로 한다. $z_1+z_2 = (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) = (x_2+x_1)+i(y_2+y_1) = (x_2+iy_2)+(x_1+iy_1) = z_2+z_1$. $z_1z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2+x_2y_1) = x_2x_1 - y_2y_1 + i(x_2y_1+x_1y_2) = (x_2+iy_2)(x_1+iy_1) = z_2z_1$.
$(z_1+z_2)+z_3 = [(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)] + (x_3+iy_3) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)+x_3+iy_3 = [(x_1+x_2)+x_3]+i[(y_1+y_2)+y_3] = [x_1+(x_2+x_3)]+i[y_1+(y_2+y_3)] = x_1+iy_1+(x_2+x_3)+i(y_2+y_3) = x_1+iy_1+[x_2+iy_2+x_3+iy_3] = z_1+(z_2+z_3)$.
곱셈의 결합법칙도 이와 같은 방식으로 계산한다.
$z_1(z_2+z_3) = (x_1+iy_1)(x_2+x_3+iy_2+iy_3) = x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3) + ix_1(y_2+y_3) + iy_1(x_2+x_3) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2+y_1x_2) + x_1x_3 - y_1y_3 + i(x_1y_3+y_1x_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.
$0 + z = (0,0) + (x,y) = (x,y)(= z) = (x,y) + (0,0) = z + 0$.

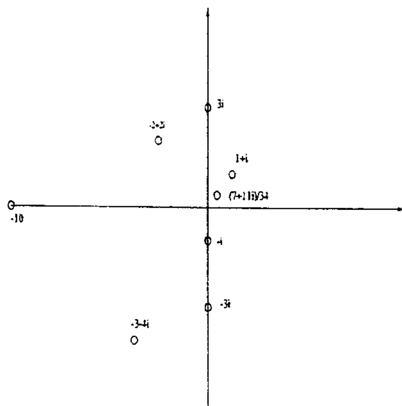
19. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{41 \pm 23i} = 41 \mp 23i$, $\overline{z_1} \pm \overline{z_2} = (38-18i)(3-5i) = 41 \mp 23i$.
$\overline{z_1 z_2} = \overline{24+244i} = 24-244i$, $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (38-18i)(3-5i) = 24-244i$.
$z_1/z_2 =$

20. 만일 $z_1z_2 = 0$이라면 $\overline{z_1z_2} = \overline{0} = 0$이다. 그리고 그 곱 $\overline{z_1z_2}z_1z_2$ 도 0이다. 그런데 $\overline{z_1z_2}z_1z_2 = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = 0$이고 각각은 실수이므로 $z_1\overline{z_1} = 0$이

거나 $z_2\overline{z_2} = 0$이다. 일반성을 잃지 않고 $z_1\overline{z_1} = 0$이라 해도 무방하다. $z_1 = x + iy(x, y$는 실수)라 하면 $z_1\overline{z_1} = x^2 + y^2 = 0$이 되고 x, y가 실수이므로 $x = y = 0$이 되고 $z = x + iy = 0$이다.

12.2. Polar Form of Complex Numbers Powers and Roots

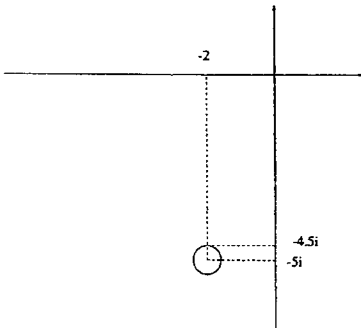
1. $\sqrt{2}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.
2. $2\sqrt{2}\,(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$.
3. $5\,(\cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha))\,, \tan(\alpha) = 4/3$.
4. $10\,(\cos(0) + i\sin(0))$.
5. $3\,(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))\,, 3\,(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$.
6. $(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$.
7. $4\,(\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha))\,, \tan(\alpha) = 3/4$.
8. $\frac{1}{3\sqrt{2}}\,(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.
9. $\frac{\sqrt{170}}{25}\,(\cos(\beta) + i\sin(\beta))\,, \tan(\beta) = 11/7$.
10. $\frac{\sqrt{74}}{4}\,(\cos(\pi+\gamma) + i\sin(\pi+\gamma))\,, \tan(\gamma) = 7/5$.



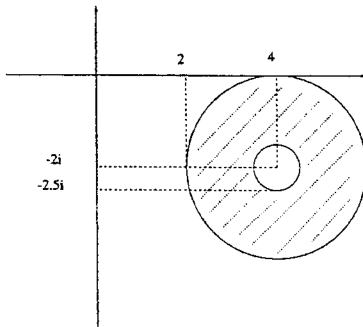
11. $-\pi/4$.
12. $\pi, \arctan(1/10) - \pi$.
13. $\pm\arctan(4/3)$.
14. $-(3\pi)/4$.
15. $-(3\pi)/4$.
16. $0 + i \times 1$.
17. $2 + i \times 2$.
18. $3 + i \times 3\sqrt{3}$.
19. $3 + i \times 3$.
20. (a) p661의 공식 15에 의한다. (b) $w_1 = \sqrt{r}[\sqrt{(1+\cos(\theta))/2} + i\sqrt{(1-\cos(\theta))/2}]$에서 $r = |z|$이고 $r\cos(\theta) = x$이므로 $\sqrt{z} = \pm w_1 = \pm[\sqrt{1/2(|z|+x)} + isign(y)i\sqrt{1/2(|z|-x)}]$. (c) $\sqrt{4i} = \pm\sqrt{2}(1+i)$, $\sqrt{20+48i} = \pm 2(3+2i)$, $\sqrt{23-5\sqrt{8}i} = \pm(5-\sqrt{2}i)$.
21. $2^{1/3}\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,, \alpha = \pi/12 + 2n\pi/3$.
22. $2\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,, \alpha = \pi/6 + 2n\pi/3$.
23. $6\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,, \alpha = 2n\pi/3$.
24. $\sqrt{2}\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,, \alpha = 2n\pi/4 + \pi/4$.
25. $\pm(3+4i)$.
26. $\pm(1+2i), \pm(-2+i)$.
27. $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\,, \alpha = 2n\pi/8$.
28. 2차 방정식의 근의 공식에 의하면 $\frac{1}{2}\,(5 + i \pm (1+3i))$.
29. 2차 방정식의 근의 공식에 의하면 $\frac{1}{2}\,(7 + i \pm (1-7i))$.
30. 2차 방정식의 근의 공식에 의하면 z^2은 $\frac{1}{2}\,(3 + 6i \pm (3+2i))$가 되고. 각각의 해 $3+4i, 2i$에 2차방정식의 해법을 적용해 주면
31.
32. $|z_1 + z_2| = |6 - 3.5i| = \sqrt{36+} \sim 6.95$. $|z_1| + |z_2| = \sqrt{4^2+6^2} + \sqrt{2^2+2.5^2} \sim 7.21 + 3.20 = 10.41$.
33. 좌우가 모두 음이아닌 실수이므로 양변을 제곱한 것을 증명하여도 된다. 그 제곱에서 같은 부분을 제외하면 $2|z_1z_2|$와 $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$의 비교로 문제가 귀착된다. 이 두수 모두 음이 아닌 실수이므로 다시 이의 제곱을 비교하면 된다. 네개의 실수 x_1, x_2, y_1, y_2에 대해 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$라 놓고 $4|z_1z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})^2 = 2|z_1z_2| - (z_1\overline{z_2})^2 - (z_2\overline{z_1})^2 = -(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})^2 \leq 0$.
34. $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)\overline{(z_1 \pm z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \pm z_1\overline{z_2} \pm z_2\overline{z_1}$, 즉 $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2, z_2\overline{z_2} = |z_2|^2$이므로 위의 두 식을 더하면 된다.
35.
36. z를 실수 x, y에 대해 $z = x + iy$라고 쓰면 $|Re(z)| = |v, |Im(z)| = |y|$ 그리고 $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$이다. 준 부등식은 제곱을 비교함으로써 구할 수 있다.

12.3. Derivative. Analytic Function

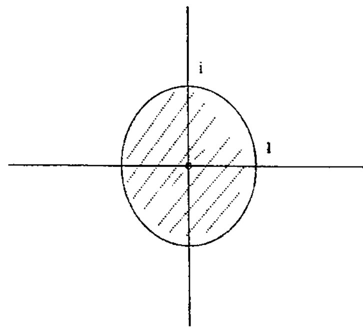
1.



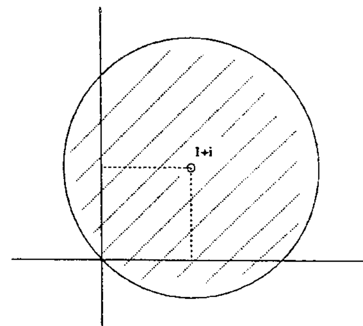
2.



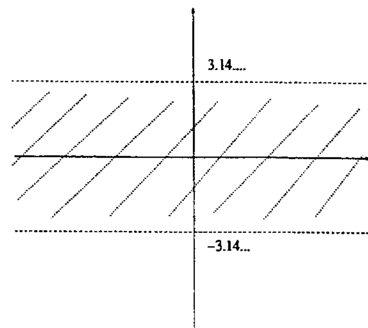
3.



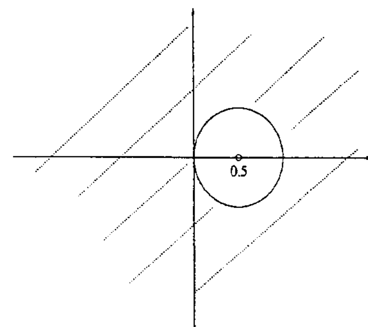
4.



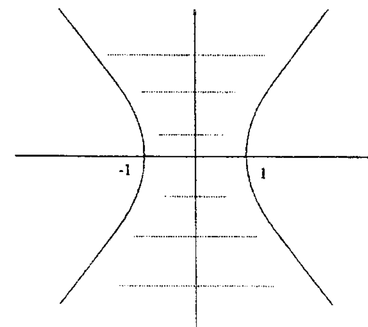
5.



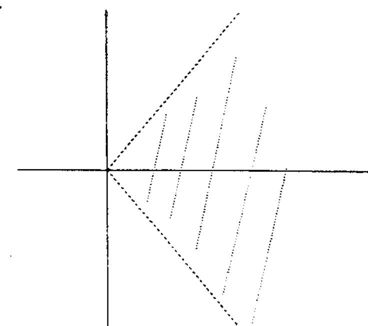
6.



7.



8.



9. interior:그 점을 중심으로 영역 내부에 disc를 잡을 수 있는 점 전체의 집합, limit point:특정한 집합내의 점들로 근사할 수 있는 점, closure: interior point와

limit point의 합집합. accumulation point:그 집합내부에 있지 않으며 그 집합의 점들로 근사될 수 있는 점.

10. $f(1-i) = (1-i+1)^2+1 = 4-2i$이므로 $Re(f)=4, Im(f)=-2$이다.

11. $f(7+2i) = 1/(-6-2i) = (-3+i)/20$이므로 $Re(f)=-3/20, Im(f)=1/20$이다.

12. $f(4i)=-20$이므로 $Re(f)=-20, Im(f)=0$이다.

13. z에 ki(k는 양의 실수)를 대입해 보면 f의 값은 항상 1이다. 즉, 불연속이다.

14. 준 함수 f에 대해 $f \le |z|$가 항상 성립한다. z가 0으로 가면 f도 0으로 간다. 연속이다.

15. z가 0으로 가면 분모는 1로 가고 분자는 0으로 간다. 연속이다.

16. z에 $k(2+i)$(k는 양의 실수)를 대입해 보면 f의 값은 $1/(5k)$이다. k를 0으로 보내면 이 값은 0으로 수렴하지 않는다. 불연속이다.

17. 미분이 $2z$이므로 대입하면 $2i$.

18. 미분이 $8(z-4i)^7$이므로 대입하면 8×5^7.

19. 미분이 $-3(5+3i)/z^4$이므로 대입하면 $-3(5+3i)/(-7+24i) = -3(40-146i)/25$.

20. 미분이 $36z^3+18iz^2-2z$이므로 대입하면 $-110+70i$.

21. 미분이 $4z^3-4/z^5$이므로 대입하면 $17/2(1-i)$.

22. 미분이 $3(3iz^2+6z)(iz^3+3z^2)^2$이므로 대입하면 0.

23. 분모와 분자를 나누면 $i/3$가 남는다. 즉 $z=2i$를 제외한 점에서 미분은 0이고 $z=2i$에서는 미분 불가이다.

24. (a) (1)을 가정하자. 그럼 $\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}f(z) = \mathrm{Re}l$이고 $\lim_{z\to z_0}\mathrm{Im}f(z) = \mathrm{Im}l$ 이다. 그리고 역으로 실수부와 허수부에 대한 위의 두 식이 성립한다면, $\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}f(z) + i\lim_{z\to z_0}\mathrm{Im}f(z) = \mathrm{Re}l + i\mathrm{Im}l$ 이고 따라서 $\lim_{z\to z_0}f(z) = \lim_{z\to z_0}(\mathrm{Re}f(z)+i\mathrm{Im}f(z)) = \mathrm{Re}l + i\mathrm{Im}l = l$를 얻는다. (b) 그 극한이 두개이고 l, m이라고 가정하자. 그럼 $\varepsilon = |l-m|/2 > 0$에 대해 적당한 δ_1, δ_2가 존재하여 $|z-z_0| \le \delta_1 \to |f(z)-l| \le \varepsilon$ 이고 $|z-z_0| \le \delta_2 \to |f(z)-m| \le \varepsilon$ 이다. 그럼 $\delta = \min\delta_1, \delta_2$에 대하여 $|z-z_0| \le \delta$이면 $|l-m| = |l-f(z)+f(z)-m| \le |f(z)-l|+|f(z)-m| \le 2\varepsilon$이다. 윗 식의 맨 앞과 뒤를 비교하면 $\varepsilon < \varepsilon$를 얻는다. (c) 임의의 주어진 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\delta > 0$가 있어서 $|z-a| \le \delta$이면 $|f(z)-f(a)| \le \varepsilon$이다. z_n이 a로 수렴하므로 N이 존재하여 $n > N$에 대하여 $|z_n - a| \le \delta$이다. $n > N$에 대해 $|z_n - a| \le \delta$이므로 $|f(z)-f(a)| \le \varepsilon$이다. 즉 $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$이다. (d) 미분가능이므로 p666의 식(4')에 $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)$를 곱한다. 극한의 곱은 각각의 극한이 존재하므로 곱의 극한과 같다. 그래서 $\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = 0$을 얻는다. $f(z_0)$를 극한 밖으로 뽑아내면 바로 그 식이 연속성을 말해준다. (e) z로 수렴하는 두 방식을 $z+ik$(k는 실수)와 $z+l$(l은 실수)로 잡자. 그럼 전자에 대한 기울기는 0인데에 반하여 후자에 대한 기울기는 1이다. 즉, 미분불가능이다.(역시 Im(z)도 같은 예가 된다) (f) $z = x+iy$와 $w = a+ib$에 대하여 $f(z+w)-f(w)$는 $2ax+2by$이다. $f(z+w)-f(w)/z = 2(ax+by)/(x+iy)$가 되고 a, b중 하나라도 0이 아니라면 실수 l에 대해 $z = l, il$로 잡을 때, 각각 $2a, -2bi$라는 극한을 갖는다. 즉 미분 불가능이다.

25. CAS PROJ

12.4. Cauchy-Riemann Equations. Laplace Equations

1. $u_x = 6x^5 - 60x^3y^2 + 30xy^4$, $v_y = 6x^5 - 60x^3y^2 + 30xy^5$ $u_y = 30x^4y - 60x^2y^3 + 6y^5$, $v_x = -30x^4y + 60x^2y^3 - 6y^5$가 된다. $u_x = v_y$이고 $u_y = -v_x$이므로 analytic이다.

2. $u_x = 3ix(x^2+y^2)^{1/2}$, $v_y = 3iy(x^2+y^2)^{1/2}$가 된다. $u_x \ne v_y$이므로 analytic이 아니다.

3. $u_x = e^x\cos y$, $v_y = e^x\cos y$ $u_y = -e^x\cos y$, $v_x = e^x\cos y$가 된다. $u_x = v_y$이고 $u_y = -v_x$이므로 analytic이다.

4. $u_r = -5/r^6\sin(5\theta)$, $v_\theta = -5/r^5\sin(5\theta)$ $v_r = -5/r^5\cos(5\theta)$, $u_\theta = 5/r^5\cos(5\theta)$가 된다. $u_r = 1/rv_\theta$이고 $v_r = -1/ru_\theta$이므로 analytic이다.

5. u의 x, y에 대한 미분은 x, y의 함수이지만 v는 0이다. 즉, analytic이 아니다.

6. $u_r = (1-1/r^2)\cos\theta$, $v_{th} = (r-1/r)\cos th$ $v_r = (1-1/r^2)\sin\theta$, $u_\theta = -(r-1/r)\sin\theta$가 된다. $u_r = 1/rv_\theta$이고 $v_r = -1/ru_\theta$이므로 analytic이다.

7. $u_r = 1/r$, $v_{th} = 1$, $v_r = 0 = u_\theta$가 된다. $u_r = 1/rv_\theta$이고 $v_r = -1/ru_\theta$이므로 analytic이다.

8. analytic 함수의 합성으로 보면 이 또한 analytic함수이다.

9. u의 x, y에 대한 미분은 x, y의 함수이지만 v는 0이다. 즉, analytic이 아니다.

10. u의 θ에 대한 미분은 1이지만 v_r는 0이다. 즉, analytic이 아니다.

11. u는 x, y의 함수이지만 v는 0이다. 즉, analytic이 아니다.

12. $u_x = 2x$, $v_y = -2x$이다. 즉, analytic이 아니다.

13. $u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x = v_y = v_r r_y + v_\theta \theta_y$ $u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y = -v_x = -(v_r r_x + v_\theta \theta_x)$ 여기서 $r_x = x/r = \cos\theta$, $r_y = \sin\theta$, $\theta_x = -sin\theta/r$, $\theta_y = \cos\theta/r$. 즉, $u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta/r = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta/r$, $u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta/r = -v_r \cos\theta + v_\theta \sin\theta/r$ 을 얻는다. 이 두식을 연립하여 풀면 된다.

14. (a) 코쉬-리만등식에 의거하여 $u_x = u_y = 0$으로부터 $v_y = v_x = 0$이다. 즉 $u = v = 0$이다. (b) 코쉬-리만등식에 의거하여 $v_x = v_y = 0$으로부터 $u_y = u_x = 0$이다. 즉 $u = v = 0$이다. (c) p670의 식(4)에 의해 $u_x = v_x = 0$이다. 코쉬-리만등식에 의거하여 $u_y = v_y = 0$이다. 즉 $u = v = 0$이다. (d) $u_r = u_\theta = 0$이므로 코쉬-리만등식에 의하여 $v_r = v_\theta = 0$이다. 즉 $u = v = 0$이다.

15. f가 미분가능이므로 임의의 z에 대해 $f' = Re(f') + Im(f')$이다. p670의 식 (4)에서 $Re(f')$을 (5)에서 $Im(f')$을 구하여 f'을 구하면 $f' = Re(f') + Im(f') = u_x - iu_y$가 구해지고 식 (4)에서 $Im(f')$을 (5)에서 $Re(f')$을 구하여 f'을 구하면 $f' = Re(f') + Im(f') = v_y - iv_x$가 구해진다.

16. $u = x^3 - 3xy^2$, $v = 3x^2y - y^3$이다. 각 미분은 $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_y = -6xy$, $v_x = 6xy$, $v_y = 3x^3 - 3y^2$로 주어지며 미분은 $f' = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$이다.

17. $u_x = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$이며 $u_{xx} = [2x(x^2 - 3y^2)]/(x^2 + y^2)^3$이다. $u_y = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$이며 $u_{yy} = [2y(y^2 - 3x^2)]/(x^2 + y^2)^3$이다. 즉, $u_{xx} + u_{yy} = 0$이고 조화함수이다. $u_x = v_y = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2$에서 $v = (-y)/(x^2 + y^2) + A(x)$이며 $u_y = v_x = (-2xy)/(x^2 + y^2)^2$에서 $A' = 0$을 알 수 있다. 결국 $v = (-y)/(x^2 + y^2)$이다.

18. $u_{xx} + u_{yy} = 4 \neq 0$이다. 조화함수가 아니다.

19. $u_x = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$이며 $u_{xx} = y^2/(x^2 + y^2)^{3/2}$이다. 대칭적으로 구하면 $u_{xx} + u_{yy} = 1/(x^2 + y^2)^{1/2} \neq 0$가 되고 조화함수가 아니다.

20. log함수는 analytic이고 Arg는 그 허수부분이다. 즉, harmonic이다.

21. $v_{xx} = v$, $v_{yy} = -v$이므로 조화 함수이다. $u_x = v_y = -e^{-x}\cos y$에서 $u = e^{-x}\cos y + B(y)$인데 $u_y = -v_x = e^{-x}\sin y$이므로 $B = 0$이다. 즉 $u = e^{-x}\cos y$이다.

22. $u_x = \cos x \cosh y$이고 $u_{xx} = -\sin x \cosh y$이다. $u_y = \sin x \sinh y$이고 $u_{yy} = \sin x \sinh y$이다. $u_{xx} + u_{yy} = 0$이고 조화함수이다. $u_x = v_y = \cos x \cosh y$에서 $v = \cos x \sinh y + C(x)$인데, $u_y = -v_x = \sin x \sinh y$에 의해 $C = 0$이다. 즉, $v = \cos x \sinh y$이다.

23. $v_{xx} + v_{yy} = 6x - 6$이므로 조화 함수가 아니다.

24. $v_x = 4x(x^2 - y^2)$에서 $v_{xx} = 4(3x^2 - y^2)$ $v_y = -4y(x^2 - y^2)$에서 $v_{yy} = -4(x^2 - 3y^2)$이므로 조화함수가 아니다.

25. $u_{xx} + u_{yy} = 6(ax + by) = 0$ 즉, $a = b = 0$이다. 그리고 v는 상수이다.

26. $u_{xx} + u_{yy} = 6a = 0$ 즉, $a = 0$이다. 그리고 $v = b(x^2 - y^2)/2$이다.

27. $u_{xx} + u_{yy} = (a^2 - 25)u = 0$ 즉, $a = \pm 5$이다. 그리고 $v_y = u_x = \pm 5e^{\pm 5x}\cos(5y)$와 $v_x = -u_y$에서 $v = \pm e^{\pm 5x}\sin(5y)$이다.

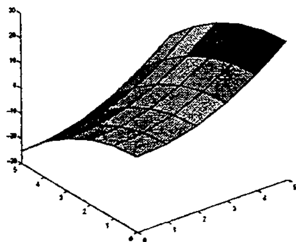
28. $u_{xx} + u_{yy} = (a^2 - 4)u = 0$ 즉, $a = \pm 2$이다. 그리고 $v_y = u_x = \pm 2\cos(\pm 2x)\cosh(2y)$와 $v_x = -u_y$에서 $v = \pm\cos(\pm 2x)\sinh(2y)$이다.

29. $(-v)_x = -v_x = u_y$이고 $(-v)_y = -v_y = u_x$이므로 u는 $-v$의 conjugate harmonocs이다.

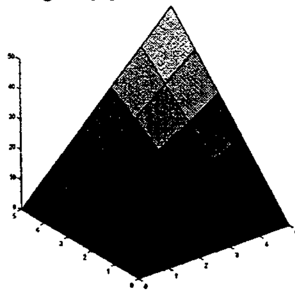
30. CAS PROJ

12.5. Geometry of Analytic Functions:Conformal Mapping

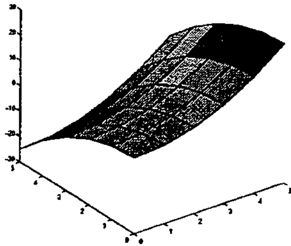
1. real part



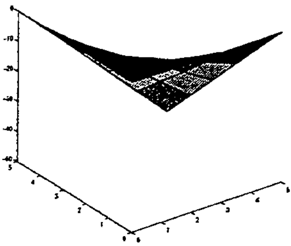
imaginary part



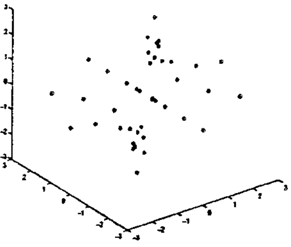
2. real part



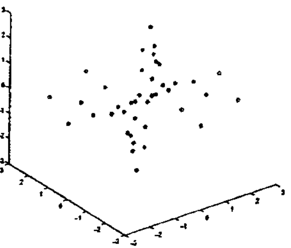
imaginary part



3. real part



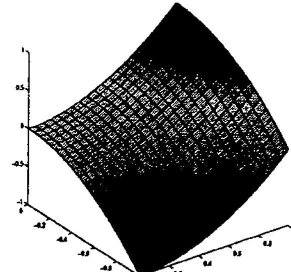
imaginary part



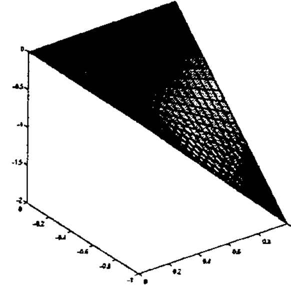
4. 각의 수치는 보존하되 각의 방향은 뒤집는다.

5. $u = x^2 - k^2$, $v = 2xk$에서 $v^2 = 4k^2(u + k^2)$.

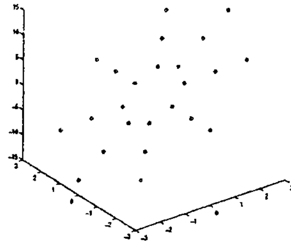
6. real part



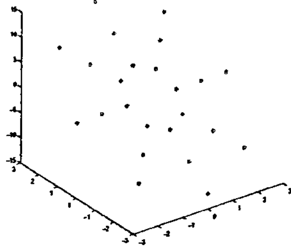
imaginary part



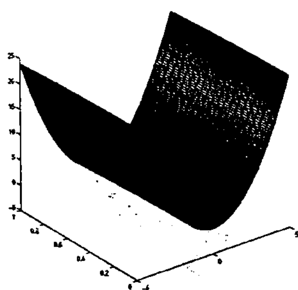
7. real part



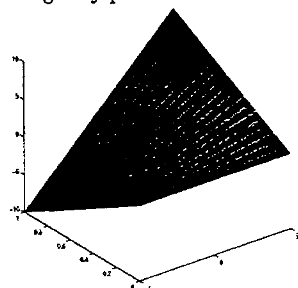
imaginary part



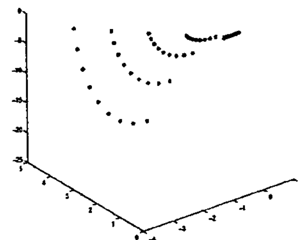
8. real part



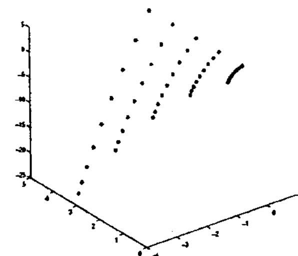
imaginary part



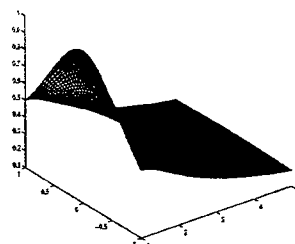
9. real part



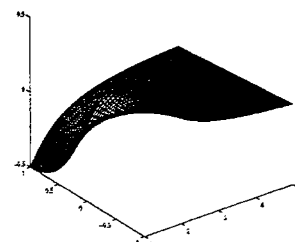
imaginary part



10. real part



imaginary part



11. a에서만 critical point이므로 그 이외의 점에서는 conformal이다.

12. 원점과 $z^3 = a$의 세 근을 제외한 모든 점에서 conformal이다.

13. $\pm 1, \pm i$를 제외한 모든 원점이외의 점에서 conformal이다. (원점은 정의역에 포함되지 않는다.)

14. 모든 원점이외의 점에서 conformal이다.

15. 모든 $z = -2/b$ 이외의 점에서 conformal이다.

16. $(x(t), y(t)) = (3\cos(t), \sin(t))$.

17. $(x(t), y(t)) = (2\cos(t) + 3, 2\sin(t) - 1)$

18. $(x(t), y(t)) = (t, kt^2)$

19. $(x(t), y(t)) = (4\cosh(t), 2\sinh(t))$

12.6. Exponential Function

1. $e^{2+3\pi i} = e^2(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -e^2$.

2. $e^{1+i} = e(\cos(1) + i\sin(1))$.

3. $e^{2\pi(1+i)} = e^{2\pi}$.

4. $e^{0.95-1.6i} = e^{0.95}(\cos(1.6) + i\sin(1.6))$.

5. $e^{-i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$.

6. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

7. $5e^{i\alpha}, \tan(\alpha) = 3/4$.

8. $r^{1/n}e^{i(2m\pi+\theta)/n}$.

9. $4e^{i\pi}$.

10. $e^{i\pi/2}, e^{-i\pi/2}$.

11. $z = 0$.

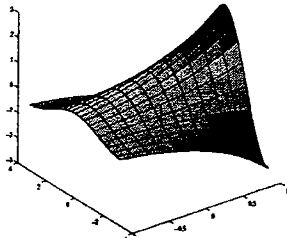
12. 양변에 로그를 잡으면 $z = 1/2\log_e$.

13. 양변에 로그를 잡으면 $z = \log 3 + i\pi$.

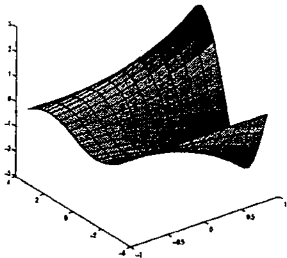
14. $z = \log(4+3i) = \log 5 + i\alpha, \tan\alpha = 3/4$.

15. 근이 없다!

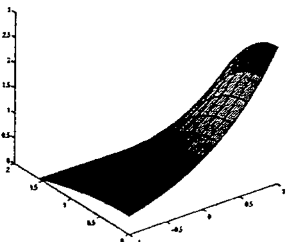
16. real part



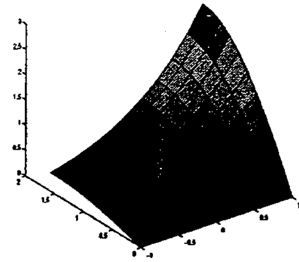
imaginary part



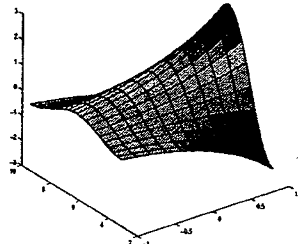
17. real part



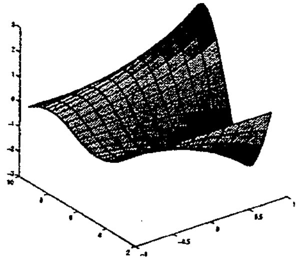
imaginary part



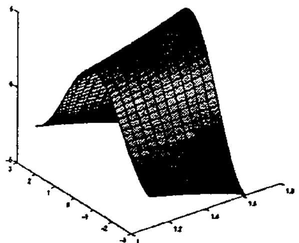
18. real part



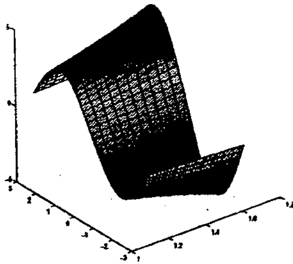
imaginary part



19. real part



imaginary part



20. (a) e^z is entire (b) (1) z의 허수부분이 π의 정수배이면 e^z는 실수이다. (2) z의 실수부분이 0보다 크면 $|e^{-z}| < 1$이다. (3) 항상 같다. (c) $u_x = ye^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2) - xe^{xy}\sin(x^2/2 - y^2/2)$, $u_{xx} = y^2e^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2) - 2xye^{xy}\sin(x^2/2 - y^2/2) - x^2e^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2)$이고 $u_y = xe^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2) + ye^{xy}\sin(x^2/2 - y^2/2)$, $u_{yy} = x^2e^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2) + 2xye^{xy}\sin(x^2/2 - y^2/2) - y^2e^{xy}\cos(x^2/2 - y^2/2)$이다. 합하면 조화함수가 됨이 보여진다. $u_x = v_y$에서 $v = -e^{xy}\sin(x^2/2 - y^2/2) + F(x)$이고 $u_y = -v_x$에서 $F = 0$이다. (d) $f'(z) = u_x + iv_x = u + iv = f(z)$에서 $u = u_x, v = v_x$이다. $u = a(y)e^x, v = b(y)e^x$가 되고 $u_x = v_y$에서 $a = b'$이다. $u_y = -v_x$에서 $a' = -b$이고 $a'' + a = 0$에서 $a = c\cos y + d\sin y$인데 $a(0) = 1, b(0) = a'(0) = 0$이다. 즉, $u = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z$이다.

12.7. Trigonometric Functions. Hyperbolic Functions

1. $z = x + iy$라 놓으면 $2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin y) + e^{y}(\cos x - i\sin y) = \cos x(e^y + e^{-y}) + i\sin y(e^y + e^{-y}) = 2(\cosh x cosy + i\sinh x\sin y)$, $2\sin z = e^{iz} - e^{-iz} = e^{-y}(\cos x + i\sin y) - e^{y}(\cos x - i\sin y) = \cos x(e^y - e^{-y}) + i\sin y(e^{+}e^{-y}) = 2(\sinh x cosy + i\cosh x\sin y)$

2. $4\cosh(z_1 + z_2) = 2e^{iz_1+iz_2} + 2e^{-iz_1-iz_2} = e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} + e^{iz_1-iz_2} - e^{-iz_1+iz_2} - e^{iz_1-iz_2} = (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})$ $4\sinh(z_1 + z_2) = 2e^{iz_1+iz_2} - 2e^{-iz_1-iz_2} = e^{iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2} - e^{-iz_1+iz_2} + e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} - e^{iz_1-iz_2} = (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})$.

3. $4\cosh z^2 - 4\sinh z^2 = (e^{2iz} + e^{-2iz} + 2) - (e^{2iz} + e^{-2iz} - 2) = 4$. $4\cosh z^2 + 4\sinh z^2 = (e^{2iz} + e^{-2iz} + 2) + (e^{2iz} + e^{-2iz} - 2) = 2(e^{2iz} + e^{-2iz})$.

4. $\cos(1 + i) = 1/2(e^{-1+i} + e^{1-i}) = 1/(2e)((1 + e^2)\cos 1 + (1 - e^2)i\sin 1)$

5. $\sin(i\pi) = 1/2(e^{-\pi} + e^{\pi})$

6. 가법정리를 쓰면 $\cos(1/2\pi - i\pi) = -sin(i\pi) = 1/2(e^{-\pi} - e^{\pi})$.

7. 위의 문제1의 결과을 쓰면 $1/2\cosh 3(e^6 + e^{-6}) - (1/2)i\sinh 3(e^5 - e^{-5})$.

8. 위의 문제1의 결과을 쓰면 $1/2\sinh 4(e^5 + e^{-5}) + (1/2)i\cosh 4(-e^5 + e^{-5})$.

9. $\cos z = 1/2(e^{iz} + e^{-iz}) = 3i$에서 $e^{2iz} - 6ie^{iz} + 1 = 0$을 얻고 $e^{iz} = i(1.5 \pm \sqrt{10})$를 얻는다. $z = 1.5 + \sqrt{10} + i\pi/2, -1.5 + \sqrt{10} - i\pi/2$.

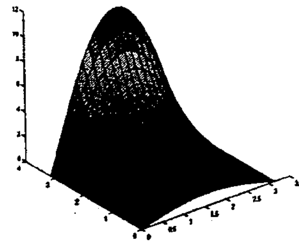
10. $2\cosh z = (e^{iz} + e^{-iz}) = 0$의 근은 $e^{2iz} = -1$의 근이며 $2iz = i\pi$, 따라서 $z = \pi/2$.

11. $2\cosh z = (e^z + e^{-z}) = 1$에서 $e^z = 1, (1 \pm i\sqrt{3})/2$이다. $z = 0, \pm i\pi/3$.

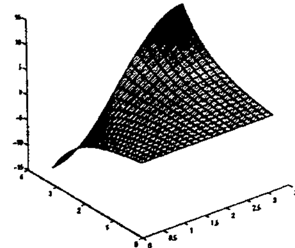
12. $2\sin z = (e^{iz} - e^{-iz}) = 2000$에서 이차식으로 만들어 풀면 $e^{iz} = (1000 \pm sqrt10^6 - 4)/2$가 되고 $z = -i\log[(1000 \pm sqrt10^6 - 4)/2]$.

13. $2\sin z = (e^{iz} - e^{-iz}) = 2\cosh 3$이고 앞 문제와 같은 식으로 $z = -i\log[(\cosh 3 \pm sqrt\cosh 3^2 - 4)/2]$.

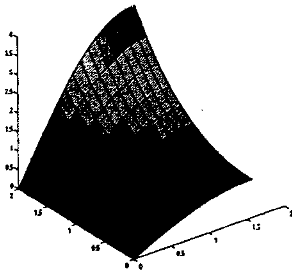
14. real part



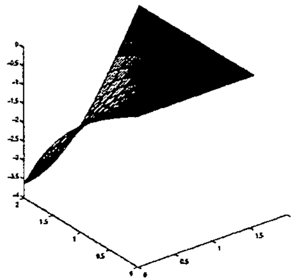
imaginary part



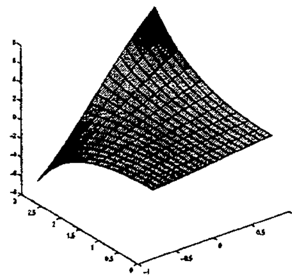
15. real part



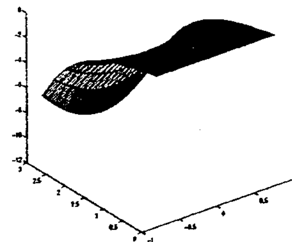
imaginary part



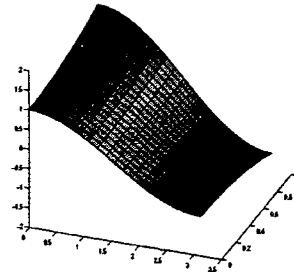
16. real part



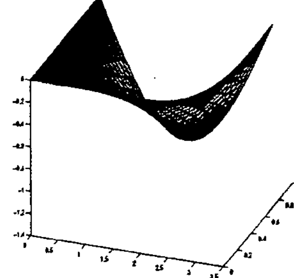
imaginary part



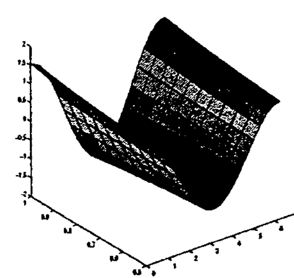
17. real part



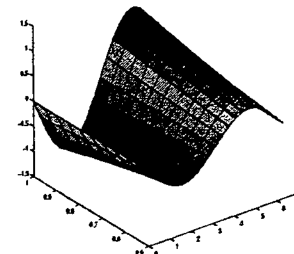
imaginary part



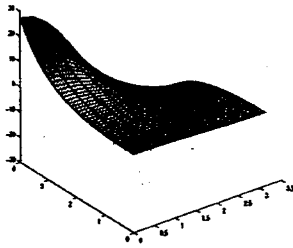
18. real part



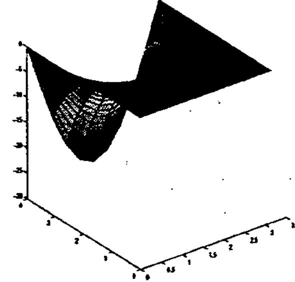
imaginary part



19. real part



imaginary part



20. CAS PROJ

12.8. Logarithm, General Power

1. $\ln 1 = \ln(e^{i2n\pi}) = i2n\pi$. $\ln 4 = \log 4 + ln(e^{i2n\pi}) = \log 4 + ln(e^{i2n\pi})$. $\ln(-1) = \ln(e^{i2n\pi+\pi}) = i2n\pi + \pi$. $\ln(-4) = \log 4 + \ln(e^{i2n\pi+\pi}) = \log 4 + i2n\pi + \pi$. $\ln i = \ln(e^{i2n\pi+\pi/2}) = i2n\pi + \pi$

2. $\ln((-i) \times (-1)) = \ln i = i2n\pi + \pi$ $\ln(-i) = i2l\pi - (1/2)\pi$ $\ln(-1) = i2m\pi + \pi$

3. $u_r = 1/r, v_{th} = 1, u_\theta = v_r = 0$.

4. $e^{\ln z} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta}$. $\ln(e^z) = \ln|e^z| + i\arg(e^z) = z + 2n\pi i$.

5. $\log 5 + i\pi$

6. $\log 4 + i\alpha - i\pi, \tan\alpha = 4/3$.

7. $\log\sqrt{2} \pm \pi/4$.

8. $\log(\sqrt{100.01}) \pm i\beta, \tan\beta = -1/100$.

9. $\log(\sqrt{15.49}) \pm i\gamma \pm i\pi, \tan\gamma = 1.8/3.5$.

10. 1.

11. 0.

12. $\ln(-4) = \log 4 + i\pi + i2n\pi$.

13. -1을 지수로 바꾸어서 정의에 대입하면 $i((1+2n)\pi - 1)$.

14. $\log 5 + i\alpha + i2n\pi, \tan\alpha = 3/4$.

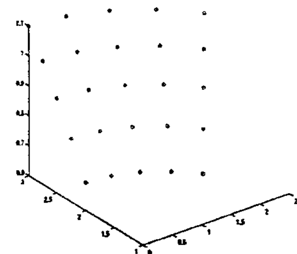
15. 각이 $-\pi/2$이므로 $-i$.

16. 절대값의 로그가 -2이고 각이 $-3/2$이므로 $e^{-2}(\cos(3/2) - i\sin(3/2))$.

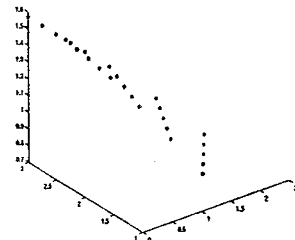
17. 절대값의 로그가 4이고 각이 -3이므로 $e^4(\cos(3) - i\sin(3))$.

18. 절대값의 로그가 e이고 각이 $-\pi$이므로 $-e^e$.

19. real part



imaginary part



20. $(2i)^{2i} = (2e^{i\pi/2})^{2i} = e^{2\log 2i - \pi}$ 이므로 principal value는 $2\log 2$.

21. $3^{4-i} = e^{4\log 3 - i\log 3}$이므로 principal value는 $-\log 3$.

22. $(1+i)^{1-i} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{1-i}$가 되고 $= e^{\log\sqrt{2}+\pi/4+i(\pi/4-\log\sqrt{2})}$이므로 principal value는 $\pi/4 - \log\sqrt{2}$.

23. $(1+i)^{-1+i} = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{-1+i} = e^{-\log\sqrt{2}-\pi/4+i(-\pi/4+\log\sqrt{2})}$이므로 principal value는 $-\pi/4 + \log\sqrt{2}$.

24. $(1+3i)^i = (\sqrt{10}e^{i\alpha})^i$이므로 principal value는 $-\log\sqrt{10}.(\tan\alpha = 3)$.

25. $(e^{i\pi/2})^{1/2}$이므로 principal value는 $\pi/4$.

26. $(-1)^{2-4i} = (e^{i\pi})^{2-4i} = e^{4\pi+i2\pi}$이므로 principal value는 0.

27. $(3+4i)^{1/3} = (e^{\log 5+i\alpha})^{1/3}$이므로 principal value는 $\alpha/3.(\tan\alpha = 4/3)$

28. $(e^{\log\sqrt{1.85}+i\beta})^{i2\pi}$이므로 principal value는 $2\pi\log\sqrt{1.85}.(\tan\alpha = 4/13)$.

29. $(-3)^{3-i} = (e^{\log 3+i\pi})^{3-i}$이므로 principal value는 $\pi - \log 3$.

30. (a) $w = \cos^{-1} z$라고 놓자. 그럼 $z = \cos w = 1/2(e^{iw}+e^{-iw})$ 이고 $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$이다. $w = \pi/2$일 때 코사인은 0 이므로 이차방정식을 풀고 그 양의 부분을 취한다. 로그를 취하면 $w = -i\ln(z + \sqrt{z^2-1})$이다. (b) $w = \sin^{-1} z$라고 놓자. 그럼 $z = \sin w = 1/2(e^{iw}-e^{-iw})$ 이고 $e^{2iw}-2ze^{iw}-1 = 0$이다. $w = 0$일 때 사인은 0이므로 이차방정식을 풀고 그 양의 부분을 취한다. 로그를 취하면 $w = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$이다. (c) $w = \cosh^{-1} z$라고 놓자. 그럼 $z = \cosh w = 1/2(e^w+e^{-w})$ 이고 $e^{2w}-2ze^w+1 = 0$이다. $w = 0$일 때 하이퍼코사인은 1이므로 이차방정식을 풀고 그 양의 부분을 취한다. 로그를 취하면 $w = \ln(z+\sqrt{z^2-1})$이다. (d) $w = \sinh^{-1} z$라고 놓자. 그럼 $z = \sinh w = 1/2(e^w - e^{-w})$ 이고 $e^{2w}-2ze^w-1 = 0$이다. $w = 0$일 때 하이퍼사인은 0이므로 이차방정식을 풀고 그 양의 부분을 취한다. 로그를 취하면 $w = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$이다. (e) $z = \tan w$라고 놓자. 그럼 $z = \tanh(iw) = 1/i(e^{2wi}-1)/(e^{2wi}+1)$ 이고 $e^{2wi} = (1+iz)/(1-iz)$이다. $w = 1/(2i)\ln((i+z)/(i-z))$. (f) $w = \tanh^{-1} z$라고 놓자. 또한 $iw = \tan^{-1} iz$이다. 앞 문제에 의하여 $w = 1/2\ln((1+z)/(1-z))$. (g) $w = \sin^{-1} z$라고 하자. $\sin(w+2n\pi) = \sin w\cos(2n\pi)+\cos w\sin(2n\pi) = \sin w$이고 $\sin(\pi-w) = \sin\pi\cos(w)+\cos\pi\sin(-w) = \sin w$이다. 종합하면 $w+2n\pi, 2m\pi+\pi-w$가 모두 해이다.

12.9. Linear Fractional Transformations. Optional

1. 이항하면 $cwz+dw = az+b$, z로 묶으면 $(cw-a)z = -dw+b$. 나누면 $z = (-dw+b)/(cw-a)$.

2. 윗 문제대로 하면 $z = (w+i)/(iw+1)$이며 $(c+(y+1)i)/(ci+1-y)$이다. linear fractional transformation은 원을 원 또는 직선으로 옮긴다. unit disc의 경계는 준 원의 경계로 옮겨지고 $|z|<1$에 대한 함수값 을 연속적인 동심원에 대한 상들의 합집합으로 생각하면 함수 자체가 연속이므로 증명은 끝난다.

3. 준 대로 대입하면 $(w-1)/w = (z+i)/(z+1)\times(-1-i)/2$.

4. $(w-3/4)/(w-1/2) = (z-2)/z\times 1/2$ 이항하면 $2zw - 3/2z = wz - 1/2z - 2w + 1$이고 $wz - z + 2w = 1$이다. 정리하면 된다.

5. Silvermann의 Complex Variables 참조(pp47-61).

6. (a)직접 계산하면 나오는 번분수식에 대해서 분모의 분모와 분자의 분모는 일치할 수 밖에 없다. 정리하고 나누면 Linear Transformation이다. (b) $z = x+iy$라 하고 직선은 $ax+by+c = 0$이라 하자. $w = w_1+iw_2$로 놓으면 $x = w_1/(w_1^2+w_2^2)$, $y = -w_2/(w_1^2+w_2^2)$ 이므로 직선의 방정식에 대입하면 $c(w_1^2+w_2^2)+aw_1+bw_2 = 0$이 된다. $c\neq 0$이면 이는 원점을 지나는 원의 방정식이다. (c)K를 대입하여 정리하면 된다. (d) (a)에서 증명했다. (e) $-\pi/2$회전후 제곱하면 윗쪽 반평면이다. 여기에 예제 1의 함수를 합성한다. $((-iz)^2-i)/(-i(-iz)^2+1)$.

7. $(w+1)/(w-1) = (z-1)/z\times 1/2$이므로 $2wz+2z = wz-w-z+1$을 정리하면 $w = (1-z)/(z+1)$.

8. $(w-2-i)/(w-3) = (z-i)/(z-1)\times i$이므로 $iwz - iw + (1-2i)z + 2i - 1 = wz - iw - 3z + 3i$을 정리하면 $w = (-(4+2i)z+i+1)/((i-1)z)$.

9. $\infty\to 0$이므로 $w = 1/(az+b)$의 형태이다. $0\to\infty, 1\to 1$ 이려면 $w = 1/z$이다.

10. $(w-1)/(w-1/3)\times 1/3 = -z/(z-2)$이므로 $wz - z - 2w + 2 = -3wz + z$를 정리하면 $w = z/(2z-1)$.

11. $w/(w-1/2) = z/(z-i)$이므로 $wz - iw = wz - (1/2)z$를 정리하면 $w = -(1/2i)z$.

12. $z/(z-1)\times(1+i) = w/(w-1)\times(-1+i)$ 정리하면 $w = (i-1)z/(2z-i-1)$.

13. $w/(w+1) = (z-i)/(z+i)\times 1/2$이므로 $2wz+2wi = wz+z-iw-i$를 정리하면 $w = (z-i)/(z+3i)$.

14. 식 (7)에 의하여 $w = (z-i/2)/(-(i/2)z-1)$.

15. $(az+b)/(cz+d)$는 z가 실수 일때 실수값을 가지며 변해야 한다. 그리고 onto이어야 하므로 분모가 있어서는 안된다. 즉 실수 a, b에 대해 $az+b$ 뿐이다.(6(c)와 비교)

16. $w = (az+b)/(cz+d)$와 $v = (ew+f)/(gw+h)$를 합성하면 $v = (e(az+b)+f(cz+d))/(g(az+b)+h(cz+d)) = ((ae+cf)z+(be+df))/((ag+ch)z+(bg+dh))$이고 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$와 $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h\end{pmatrix}$의 곱은 $\begin{pmatrix} ae+cf & be+df \\ ag+ch & bg+dh\end{pmatrix}$이다.

17. $w = (az+b)/(cz+d)$에서 $w = z$의 해가 ± 1이므로 $b = c, a = d$이면 된다.

18. $a = c = d = 0$이고 $b \neq 0$이면 된다.

12.10. Riemann Surfaces. Optional

1. $z = e^{i\theta}(0 \leq \theta \leq 4\pi)$가 1에서 시작 시계반대방향으로 단위원을 두번 돌 때 $w = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}$는 같은 단위원을 같은 위치에서 시작해서 한 바퀴돈다.

2. $z = re^{i(\theta+2m\pi)}$에 대해 $w = z^{1/n} = e^{i(\theta+2m\pi)/n}$는 $m = 0, 1, n-1$까지 서로 다른 n개의 값을 갖는다. 거꾸로 w평면은 z평면의 $0 \leq \theta < 2n\pi$까지의 n장에 해당한다.

3. 같은 형태로 n장이 겹쳐있는 상태이다.

4. $w = z^{1/4}$, $w = z^{1/5}$일 때, 각각 z에서 4번, 5번 도는 단위원은 w에서 1번 돈다.

5. $w = \ln e^{i\theta} = i\theta$이므로 허수축을 따라 올라가는 사선이 된다.

6. 1을 중심으로 잡은 polar coordinate는 어느 한 방향으로의 branch cut을 요구한다. 역시 2를 중심으로 잡은 polar coordinateeh 어느 한 방향으로의 branch cut을 요구한다. 여기서의 branch는 1과 2를 잇는 선분 또는 그에 대한 실직선상의 여집합으로 정의한다.

7. 앞 문제에서처럼 ± 1이 branch point이며 sheet는 2장이다.

8. 앞에서처럼 polar coordinate를 이용하면 $\pm 1, \pm 2$가 branch points 임은 나온다. 이 네개의 점에서 원점 방향으로의 branch cut을 잡으면 $-1 \leq x \leq 1$에서는 두개가 각을 더하고 두개는 각을 빼는 branch 이므로 이 구간에서는 실제로 branch가 없다.

9. $-3 - i/2$가 branch point이며 sheet는 두 장이다.

10. $\pm 1, \pm i$가 branch point이고 sheet는 두 장이다.

Chapter 12. Review

1. $(22+7i)+(3-2i) = 25+5i$. $(22+7i)-(3-2i) = 19+9i$. $(22+7i)\times(3-2i) = 80-23i$. $(22+7i)/(3-2i) = (52+65i)/13$.

2. $25+5i = 5\sqrt{26}e^{i\alpha}, (\tan\alpha = 1/5)$. principal value는 α. $19+9i = 21e^{i\beta}, (\tan\beta = 9/19)$. principal value는 β.

3. calculus에서는 vector의 나눗셈이 허용되지 않는다. 그래서 복소함수처럼 2차원에서 2차원으로의 함수에 대한 미분은 뉴튼몫을 가지고 정의 할 수 없다.(방향도함수는 정의 가능). 이에 비해 복소수의 나눗셈은 정의되므로 뉴튼몫을 이용한 미분의 정의가 가능하다.

4. Analytic function의 동치 조건은 $z = u + iv$에 대해 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 이를 이용하여 준 함수가 analytic인지의 여부를 판정할 수 있다.

5. 정의된 또는 준 점 주위의 영역에서 미분가능한 복소함수를 analytic function이라 한다.

6. 정의역에서 준 점을 기준으로하는 두 백터의 사잇각이 그 함수에 의해 보존될 때 conformal이라 한다. analytic함수는 정의역에 대해 critical point를 재외한 모든 점에서 conformal이다. 접선의 기울기를 가지고 곡선의 각은 정의된다.

7. 앞 절을 참조바람.

8. 복소수이므로 argument에 대한 부분의 정의가 붙을 수 밖에 없다. 이것이 정의를 복잡하게 만든다.

9. $z^c = e^{c\ln z}$로 정의한다.

10. harmonic함수에 대한 이론과 연결할 수 있다. 16장 참조.

11. Linear transformation 두개의 몫으로 정의되며 세

에 대한 함수값의 정보만으로 전체 함수가 구해진다.

12. 복소평면에 무한대의 점을 붙여서 평면을 sphere로 는 것이 expended complex plane이다. linear fractional transformation에 대해 expended complex plane에서의 원은 그대로 원으로 보존된다. 또한 복소평면의 직선은 expended complex plane에서는 원이다.

13. $z = f(z)$를 고정점이라 하며 선형몫함수에서 이를 다루었다.

14. $\sin(z) = -10$. sin의 값이 실수이려면 z의 허수부분이 0이어야 한다. 즉 z가 실수이며 이때에 해가 없음이 자명하다.

15. 순서대로 $\pi/2$회전, 원점대칭, 원점중심 a배 확장, c만큼 평행이동, 단위원을 경계로 한 안밖의 뒤집기변환이다.

16. $(5-7i)^2 = 25 - 49 - 70i = -24 - 70i$.

17. $(1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (1-1+2i)^4 = (2i)^4 = 16.$

18. $\sqrt{5-7i} =$

19. $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i,\ e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2) = -i$

20. $(32+2i)/(17-15i) = 574/514 - 476/514i.$

21. $-4+4i = 4e^{-3i\pi/4}.$

22. $12+i = \sqrt{145}e^{i\alpha}, \tan\alpha = 1/12.$

23. $-25i = 25e^{-i\pi/2}.$

24. $-7.3 = 7.3e^{i\pi}.$

25. $(2.60 + 0.38i)^2 = 6.9044 + 1.976i = \sqrt{51.575315}e^{i\alpha}, \tan\alpha = 1.976/6.9044.$

26. $z^4 = 81$의 모든 근 $\pm3, \pm3i$.

27. 극형식으로 바꾸고 지수의 반을 취한다. $\pm\sqrt{5}e^{i\alpha}, \tan\alpha = -4/3.$

28. -1의 극형식 표현은 $e^{i\pi+i2n\pi}$이므로 네제곱이 이렇게 되는 수는 $\pm e^{i\pi/4}, \pm ie^{i\pi/4}$.

29. $-16-12i$를 극형식으로 바꾸면 $20e^{i(\alpha+\pi)}, \tan\alpha = 3/4$. 즉 $\sqrt{-16-12i} = \pm\sqrt{20}e^{i(\alpha+\pi)/2}$.

30. $-32i = 32e^{-i\pi/2}$. 즉, $\sqrt{-32i} = \pm4\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

31. $u_x = v_y$에서 $v_y = 3x^2 - 3y$이고 $v = 3x^2y - 3/2y^2 + f(x)$이다. $u_y = -v_x$에서 $v_x = -3x/neq6xy + f'(x)$이므로 analytic이 아니다.

32. 준 함수는 $1/(|z|^2) \cdot 1/z$의 실수부분이다. 이는 analytic이 아니다.

33. $v_y = u_x$에서 $u = -2x + x^2 + f(y)$이다. $v_x = -u_y$에서 $2y = f'(y)$이고 $f(y) = y^2 + a$이다. $u = -2x + +x^2 + y^2 + a$.

34. $\sin(z)$의 허수 부분이 주어진 함수이다. 즉 해석적이며 $u = \sin(2x)\cosh(2y)$이다.

35. $\cosh 4\pi i = 1/2(e^{4\pi i} + e^{-4\pi i}) = 1.$

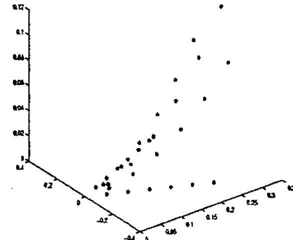
36. $e^{4+2i} = e^4(\cos 2 + i\sin 2).$

37. $Ln(5-2i) = ln(\sqrt{29}) - i\alpha, \tan\alpha = 2/5.$

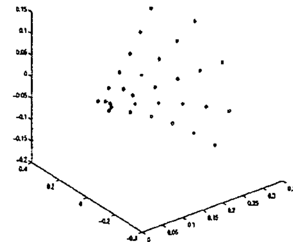
38. $\sin(4\pi - \pi i/2) = -\sin(\pi i/2) = -1/2i(e^{-\pi/2} - e^{\pi/2}) = -i.$

39. $\tan(1+i) = \sin(1+i)/\cos(1+i)$이다. $\sin(1+i) = \sin 1\cos i + \cos 1\sin i = (1/2)\sin 1(e + e^{-1}) + (-i/2)\cos 1(e^{-1} - e)$와 $\cos(1+i) = \cos 1\cos i - \sin 1\sin i = (1/2)\cos 1(e + e^{-1}) - (-i/2)\cos 1(e^{-1} - e)$. 를 대입하면 된다.

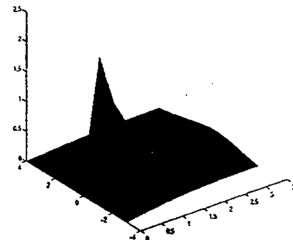
40. real part



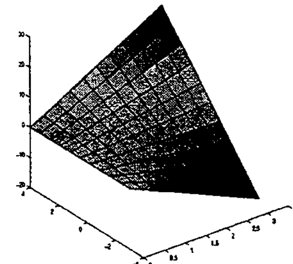
imaginary part



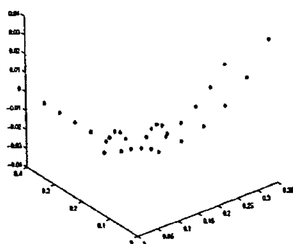
41. real part



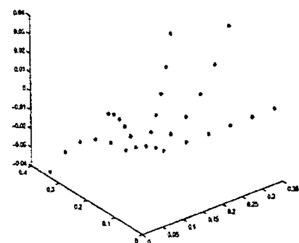
imaginary part



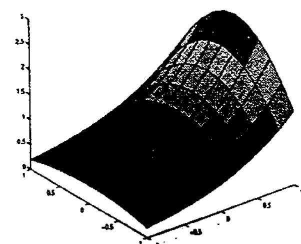
42. real part



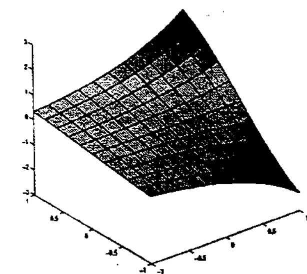
imaginary part



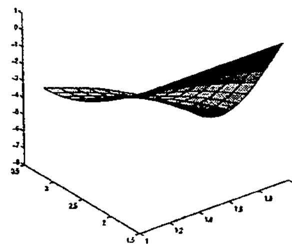
43. real part



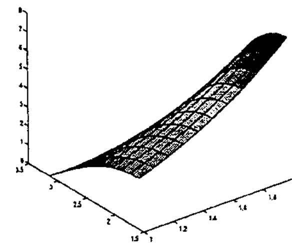
imaginary part



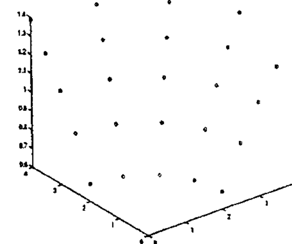
44. real part



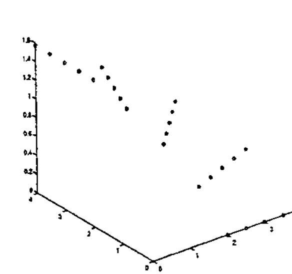
imaginary part



45. real part



imaginary part



46. w가 analytic이므로 $w' = -2z\sin(z^2 + 1)$의 해, 즉, cirtical point에서 conformal이 아니다. $0, \pm\sqrt{2n\pi - 1}$.

47. 두 곡선은 항상 직교한다. 따라서 analytic function에 의한 상에 대해 cirtical point를 제외한 부분에서는 항상 직교한다.

48. $(w - 2i)/(w - 1/2 - i) = z/(z + i) \times 2$를 정리하면 $wz + iw - 2iz + 2 = 2zw - z - 2i$에서

$w = (z + 2 + 2i)/(z - i)$.

49. 모든 Linear fractional transformation은 translation, rotation, 단위원에 대한 뒤집기 변환, 닮음변환의 적당한 조합으로 이루어 진다. (12.9의 문제 6번 참조)

50. $w = (az+b)/(cz+d)$의 고정점은 $cz^2+(d-a)z+b = 0$으로 주어진다. 이 해가 $\pm i$이려면 $b = c, a = d$이면 된다.

CHAPTER 13

Complex Integration

Integration in the complex plane is important for two reasons:

1. In applications there occur real integrals that can be evaluated by complex integration, whereas the usual methods of real integral calculus fail.
2. Some basic properties of analytic functions can be established by complex integration, but would be difficult to prove by other methods. The existence of higher derivatives of analytic functions is a striking property of this type.[1]

In this chapter we define and explain complex integrals. The most important result in the whole chapter is **Cauchy's integral theorem** (Sec. 13.2). It implies the useful Cauchy integral formula (Sec. 13.3). In Sec. 13.4 we prove that if a function is analytic, it has derivatives of all orders. Hence in this respect, complex analytic functions behave much more simply than real-valued functions of real variables.

(Integration by means of residues and applications to real integrals will be considered in Chap. 15.)

Prerequisite for this chapter: Chap. 12.
References: Appendix 1, Part D.
Answers to problems: Appendix 2.

[1]Proved without integration or equivalent methods only relatively recently, in 1961 [by P. Porcelli and E. H. Connell (*Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 67, pp. 177–181), who make use of a topological theorem by G. T. Whyburn].

13.1. Line Integral in the Complex Plane

1. $4t - 7ti (0 \le t \le 1)$.

2. $(4-9t) + i(3-4t)(0 \le t \le 1)$.

3. $3\cos(\theta) + 4 + i(3\sin(\theta) - 2)(0 \le th \le \pi)$.

4. $3\cos(\theta) + 2\sin(\theta)(0 \le th \le 2\pi)$.

5. $t + i/t(1 \le t \le 4)$.

6. $t + it^3(-2 \le t \le 3)$.

7. $5\cos(\theta) - 3 + i(\sin(\theta) + 1)(0 \le \theta \le 2\pi)$.

8. $2\cosh t + i\sinh t$(t는 실수).

9. Rez가 Analytic이 아니므로 첫째 방법을 쓸 수가 없다. 곡선을 매개변수화하고 두번째 방법을 적용한다. $z = 1 + 2t + i(1+t)(0 \le t \le 1)$이므로 $\int_C Rezdz = \int_0^1 (1+2t)(2+i)dt = 4 + 2i$.

10. 0에서 $3 + 4i$로 가는 직선

11. $5i$를 중심으로 하고 반경 $\sqrt{3}$인 원을 반시계오 도는 원의 위쪽 반.

12. 중심이 $2i$에 있고 x, y쪽의 축간거리가 각각 4,1인 타원을 반시계방향으로 한 바퀴 도는 곡선

13. $-1 + 3i$에서 출발하여 $y = 3x^4$의 위를 따라 $1 + 3i$로 가는 곡선.

14. $x^2 - y^2 = 1$인 쌍곡선의 오른 편에서 $(1, 0)$을 출발, $(\cosh(4), \sinh(4))$ 로 가는 곡선.

15. Rez가 Analytic이 아니므로 첫째 방법을 쓸 수가 없다. 두 곡선을 각각 매개변수화 하고 두번째 방법을 적용한다. $\int_0^1 dt + \int_0^2 (1+t)dt = 1 + 2 + 2 = 5$.

16. $\sin z$가 Analytic이므로 첫번째 방법을 사용한다. $\sin^2 z = (1 - \cos 2z)/2$이므로 $\int_C \sin^2 zdz = i\pi$.

17. $\bar{z}$가 Analytic이 아니므로 첫째 방법을 쓸 수가 없다. 곡선을 매개변수화 하고 두번째 방법을 적용한다. $\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it^2)(-2it)dt = \int_0^1 (2t^3 - 2it^2)dt = 1/2 - 2i/3$.

18. Rez^2이 Analytic이 아니므로 첫째 방법을 쓸 수가 없다. $\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin\theta\cos^2\theta - i\cos\theta\sin^2\theta)d\theta$. 계산해 주면 $= 1/3$.

19. Rez^2이 Analytic이 아니므로 첫째 방법을 쓸 수가 없다. $\int_C (x^2 - y^2)(\dot{x} + i\dot{y})dz$의 계산은 다음과 같이 두번째 방법을 이용하여 네개의 부분으로 이루어진다. $\int_0^1 (-t^2)(i)dt = -(1/3)i$. $\int_0^1 (t^2 - 1)dt = -(2/3)$. $\int_1^0 (1 - t^2)(-i)dt = (2/3)i$. $\int_1^0 t^2(-1)dt = 1/3$. 즉, $-(1+i)/3$.

20. ze^{z^2}이 Analytic이므로 첫번째 방법을 사용한다. $\int_C ze^{z^2}dz = e^{i^2} - e = e^{-1} - e$.

21. $\sinh \pi z$가 Analytic이므로 첫번째 방법을 사용한다. 준 적분은 $\int_C \sinh \pi zdz = (1/\pi)\cosh(0) - (1/\pi)\cosh(i\pi)$ 가 되고 결국 $2/\pi$.

22. $\cos z$가 Analytic이므로 첫번째 방법을 사용한다. 준 적분은 $\int_C \cos zdz = \sin(i\pi) - \sin(-i\pi) = 1/(i)(e^{-\pi} - e^{\pi})$.

23. e^{4z}가 Analytic이므로 첫번째 방법을 사용한다. 준 적분은 $\int_C e^{4z}dz = (e^{4(8-3i)} - e^{4(8-i(3+\pi))})/4 = e^{32}/4(e^{-12i} - e^{-12i-4\pi i}) = 0$.

24. $\sec^2 z$가 Analytic이므로 첫번째 방법을 사용한다. 준 적분은 $\int_C \sec^2 zdz = \tan(i\pi/4) - 1$. 결과는 $(e^{\pi/2} - 1)/(e^{\pi/2} + 1)$.

25. $z = i + 5e^{i\theta}(0 \le \theta \le 2\pi)$로 잡는다. $\int_0^{2\pi} fdz = \int_0^{2\pi} (3/5e^{-i\theta} - 6/(25)e^{-2i\theta})i5e^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} i(3/5 - 6/(25)e^{-i\theta})d\theta = (30\pi + 6)/5$.

26. $\int_C [k_1 f_1 + k_2 f_2]dz = \int_C [(k_1 Re(f_1) + k_2 Re(f_2)) + i(k_1 Im(f_1) + k_2 Im(f_2))](dx + idy)$전개한 후에 다시 첨자 1,2에 대해서 묶어주면 된다.

27. $M = 3$, $C = \sqrt{5}$이므로 upper bound는 $3\sqrt{5}$.

28. CAS PROJ

29. (a)복소함수에 대한 선적분에 있어서 potential을 이용하는 첫번째 적분은 계산의 간편함 이외에도 그 양끝의 점만 알면 된다는 장점이 있다. 그러나 analyticity라는 제약 조건을 극복하지 못한다. 반면에 path의 parametrization을 이용하는 두 번째 방법은 계산의 복잡함이라는 단점은 있지만, 일반적인 함수와 일반적인 경로를 모두 다룰 수 있다는 장점이 있다. 이는 경로를 다루는 방식이 더 편리하다는 것은 아니다. (b) (i) potential을 이용하면 $\int_C z^4 dz = (2i)^5/5 - (-2i)^5/5 = 64i/5$. Line integral을 이용하면 $\int_{3\pi/2}^{\pi/2} 16e^{4i\theta}2ie^{i\theta}d\theta = \int_{3\pi/2}^{\pi/2} 32e^{5i\theta}d\theta = 64i/5$. (ii) potential을 이용하면 $\int_C e^{2z}dz = (e^{2+4i} - 1)/2$. Line integral을 이용하면 $\int_0^1 e^{(2+4i)t}(1 + 2i)dt = (e^{2+4i} - 1)/2$. (c) Rez를 택하면 $\int_0^{\pi} t(1 + ia\cos t)dt = \pi - 2ia$가 된다. Analytic function으로 z를 택하면 $\int_0^{\pi} (t + ia\sin t)(1 + ia\cos t)dt = (\pi)^2/2$가 되고 이 값은 a에 의존하지 않는다. (d) Imz를 택하면 $\int_0^{\pi} i\sin t(i\cos t - a\sin t)dt = -ia\pi/2$가 된다. Analytic function으로 z를 택하면 $\int_0^{\pi} (a\cos t + i\sin t)(i\cos t - a\sin t)dt = 0$이 되고 이 값은 a에 의존하지 않는다.

13.2. Cauchy's Integral Theorem

1. 정사각형의 네 변에 대한 line integral을 각각 계산해 보면 $\int_{C_1} z^2dz = (1+i)^3/3-(1-i)^3/3$, $\int_{C_2} z^2dz = (1-i)^3/3-(-1-i)^3/3$, $\int_{C_3} z^2dz = (-1-i)^3/3-(-1+i)^3/3$, $\int_{C_4} z^2dz = (-1+i)^3/3-(1+i)^3/3$가 된다. 즉, $\int_C z^2dz = \int_{C_1+C_2+C_3+C_4} z^2dz = 0$.

2. $1/(z^2+4)$의 singularities는 $\pm 2i$이다. 두 원 (a) $|z-2| = 2$ (b) $|z-2| = 3$ 모두 내부에 singular point를 포함하지 않으므로 이 적분값은 0이다.

3. 단위원과 원점을 중심으로 하는 반경 10인 원 사이의 영역에서 $w = 1/z^2$ 은 analytic이다. 문제 1에서 제시된 정사각형 경로는 이 Analytic region 내부에 있으므로 적분값은 변하지 않는다.

4. (a)에 의해 원점을 내부에 포함하지 않으며 (b)에 의해 $\pm 1, \pm i$를 내부에 포함하지 않고 (c)에 의해 $\pm 3i$를 포함하지 않는 폐곡선.

5. $(1+i)\int_0^\pi \cos[(t+it)]dt$의 계산이 shortest path integral. 계산하면 $\cos(t+it) = \cos(t)\cos(it) - \sin(t)\sin(it)$에서 $\cos(it) = 1/2(e^{-t}+e^t)$이고 $\sin(it) = -i/2(e^{-t}-e^t)$이므로 계산해야 하는 적분은 $((1+i)/2)\int_0^\pi \cos t(e^{-t}+e^t)dt$와 $((i-1)/2)\int_0^\pi \sin(t)(e^{-t}-e^t)dt$이다.
   두 개의 path로 적분하는 식은 $\int_0^\pi \cos(t)dt$와 $\int_0^\pi \cos(\pi+ti)idt$. $\cos(\pi+ti) = -\cos(ti)$이므로 두 번째 적분은 $\int_0^\pi -\cos(ti)idt$.

6. Analytic이면 적분값이 변하면 안된다. 즉, 이 annulus에서 analytic이 아닌 (점 또는)부분이 있다.

7. 준 곡선에 대한 적분은 $\int_C e^{-z^2}dz = \int_0^{2\pi} e^{-e^{2i\theta}}ie^{i\theta}d\theta$ 로 표시되고 그 계산은 치환적분을 한번 적용하면 0이 된다.

8. 준 곡선에 대한 적분은 $\int_C \tan(z/2)dz = \int_0^{2\pi}\tan(e^{i\theta}/2)ie^{i\theta}d\theta$ 로 표시되며 이의 부정적분이 $(i/2)\log|\sin(i\theta)|$가 되므로 적분값은 0이다.

9. 준 곡선에 대한 적분은 $\int_C 1/|z|^2dz = \int_0^{2\pi} ie^{i\theta}d\theta = 0$가 된다.

10. 준 곡선에 대한 적분은 $\int_C 1/(\pi z-1)dz = \int_0^{2\pi} 1/(\pi e^{i\theta}-1)ie^{i\theta}d\theta$ 가 되며 적분계산은 부정적분이 $(1/\pi)\ln(\pi e^{i\theta}-1)$이므로 0이다.

11. 준 곡선에 대한 적분은 $\int_C 1/(2z-1)dz = \int_0^{2\pi} 1/(2e^{i\theta}-1)ie^{i\theta}d\theta$ 가 되며 적분계산은 부정적분이 $(1/2)\ln(2e^{i\theta}-1)$이므로 0이다.

12. 준 곡선에 대한 적분은 $\int_C \bar{z}^3dz = \int_0^{2\pi} ie^{-2i\theta}d\theta$ 가 되며 적분은 0이다.

13. $\int_0^{2\pi} e^{3i\theta}ie^{i\theta}d\theta(1/4)(e^{4\pi i}-e^0) = 0$.

14. $\int_0^{2\pi} e^{i\theta}ie^{i\theta}d\theta = (1/2)(e^{2\pi i}-e^0) = 0$.

15. $\int_0^{2\pi} i\sin\theta i(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(\cos(2\theta)-1)/2d\theta = \pi$.

16. (a) C는 원점 중심의 단위원이다. $\int_C \sin z dz = \int_0^{2\pi}\sin(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta. = \int_0^{2\pi} 1/(2i)(ie^{-\theta+i\theta} - ie^{\theta+i\theta})d\theta = 0$. $\int_C 1/(z+2)dz$. $\int_C Im(z)dz$. $\int_C 1/z^4dz$. $\int_C 1/(z-1/2)dz$. (b) (i) $f(z) = (2z+3i)/(z^2+1/4) = (3-2zi)(1/(z-0.5i) - 1/(z+0.5i))$ $f(z) = 4/(z-i/2) - 2/(z+i/2)$. Cauchy Integral formula에 의해 $z = e^{i\theta} \pm i/2$, $\int_0^{2\pi} 4e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = 8\pi$, $\int_0^{2\pi} 2e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = 4\pi$ 그래서 12π. (ii) $\int_C(z+1)/(z^2+2z) = 0.5/z + 0.5/(z+2)$ Cauchy Integral formula에 의해 $z = e^{i\theta}, e^{i\theta}-2$, $\int_0^{2\pi} 0.5e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = \pi$ So 2π. (d) $z(t) = t + ia(t-t^2), 0 \le t \le 1$. $\int_C zdz = \int_0^1(t+ia(t-t^2))(1+ia(1-2t))dt$ integrand는 the derivative of $(1/2)(t+ia(t-t^2))^2$이다. So 0. $\int_C Im(z)dz = \int_0^1 ia(t-t^2)(1+ia(1-2t))dt$. $\int_0^1 ia(t-t^2)dt = ia/6$.

17. Cauchy Integral formula에 의해, $\int_{|z|=\pi} 1/(z-3i)dz = \int_{|z+3i|=1} 1/(z-3i)dz$. $\int_{|z+3i|=1} 1/(z-3i)dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta$ 는 2π.

18. $\int_0^1 \ln(1-(-1+ti))idt$, $\int_{-1}^1 \ln(1-(1+ti))idt$, $\int_1^0 \ln(1-(t+i))dt$, $\int_1^{-1}\ln(1-ti)idt$. 적분은 $\int_0^1 \ln(2-ti))idt =$

19. $\int_{|z|=2} e^z/zdz - \int_{|z|=1} e^z/zdz$ singularity가 영역내에 없다. 적분값은 0.

20. $\int_{-1}^1 xdx = 0$, $\int_0^\pi \cos\theta ie^{i\theta}d\theta$. 둘로 나무면 $\int_0^\pi(1+\cos(2\theta))/2d\theta = \pi/2$ and $\int_0^\pi(i/2)\sin(2\theta) = i/2$. So $(\pi+1)/2$.

21. the Cauchy Integral formula를 써서, 두 원 $|z-1| = 1, |z+1| = 1$에 적용하면 $\int_0^{2\pi} 1/(2e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = \pi$ and $\int_0^{2\pi} 1/(2e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = \pi$ so $\int_C 1/(z^2-1)dz = 2\pi$.

22. By the Cauchy Integral formula, use two circles $|z-1| = 1/2, |z| = 1/2$, then $\int_0^{2\pi} 1/(2^{-1}e^{i\theta})i0.5e^{i\theta}d\theta = \pi$ and $\int_0^{2\pi} 1/(2^{-1}e^{i\theta})i0.5e^{i\theta}d\theta = \pi$ so $\int_C 1/(z^2-1)dz = 2\pi$.

23. (a) Considering that $1/(z^2+1) = 1/(2i)(1/(z-i) - 1/(z+i))$, we get $\int_{|z+i|=1} 1/(z^2+1)dz = \int_0^{2\pi} -ie^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$. (b) Considering that $1/(z^2+1) = 1/(2i)(1/(z-i) - 1/(z+i))$, we

get $\int_{|z-i|=1} 1/(z^2+1)dz = \int_0^{2\pi} -ie^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$.

24. $\int_C \coth(0.5z)dz$,($|z-0.5\pi i| = 1$,clockwise Let $z = 0.5\pi i + e^{-i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$, then sinh has no singularity inside the circle C. So $\int_C \coth(0.5z)dz = 0$

25. $\int_C f(z)dz = \int_{|z-2|=4}(2z^3+z^2+4)/(z^4+4z^2)dz$. Let $z = 2+e^{i\theta}$,$(0 \le \theta \le 2\pi)$ then The integrand f has no singularity inside C, so $\int_C f(z)dz = 0$.

13.3. Cauchy's Integral Formula

1. $z^2/(z^4-1) = 0.5(1/(z^2-1)+1/(z^2+1)) = 0.5[0.5(1/(z-1)-1/(z+1)) - 0.5i(1/(z-i)-1/(z+i))]$ $\int_{|z+1|=1} z^2/(z^4-1)dz = \int_{|z+1|=1} -0.25/(z+1)dz$. By letting $z = -1+e^{i\theta}$,$(0 \le \theta \le 2\pi)$, $\int_{|z+1|=1} -0.25/(z+1)dz = \int_0^{2\pi} -0.25e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = -\pi i/2$.

2. By letting $z = -i+e^{i\theta}$,$(0 \le \theta \le 2\pi)$, $\int_{|z+i|=1} 0.25i/(z+i)dz = \int_0^{2\pi} 0.25ie^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = -\pi/2$.

3. Cauchy integral formula에 의해, singular point가 곡선 내부에 없으므로 적분값은 0.

4. 곡선은 ± 1를 포함한다. 적분은 π.

5. C와 $|z-i/2| = 1$사이에는, 적분함수의 singularities가 없다. $\int_{|z-i/2|=1}(i/2+e^{i\theta})^3e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = -(i/8)2\pi i = \pi/4$.

6. 주어진 원과 $|z+i/\pi| = 1$사이에는 integrand의 singularity가 없다. 그래서 이 원을 사용하여 적분계산을 해도 된다. $\int_{|z-i/\pi|=1} e^{i+e^{i\theta}}/(\pi)e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta$. 따라서 $(i\cos 1-\sin 1)/\pi \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta$. $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta =$. 다음 장의 Residue theorem을 쓰면 계산 가능. $-1/\pi$

7. 역시 Residue theorem을 써서 1/2.

8. Residue theorem을 써서 sin(1/3)/81.

9. CAS PROJ

10. (a) Cauchy's integral formula에 의해 $2\pi i(-i/2)^3 = -\pi/4$. (b) 역시 같은 방식으로 $2\pi i$.

11. 준 타원은 $2i$만 포함한다. 즉, Cauchy's integral formula에 의해 $2\pi i/4 = \pi/2$.

12. 준 곡선은 0만 포함한다. Cauchy's integral formula에 의해 $2\pi i4 = 8\pi i$.

13. 준 곡선은 6을 포함한다. Cauchy's integral formula에 의해 $2\pi Ln5$.

14. $e^z = 2i$의 해가 $\ln 2 + i\pi/2$이므로 0만 주어진 곡선내에 있다. Cauchy's integral formula에 의해 $2\pi i 1/(1-2i)$.

15. πi는 준 곡선의 내부네 있다. Cauchy's integral formula에 의해 $2\pi i\cosh(-\pi^2-\pi i)$.

16. $1+i$만이 준 영역내에 있다. Cauchy's integral formula에 의해 $e^{2i}/(2i)$.

17. i만이 준 영역 내에 있다. Cauchy's integral formula에 의해 $\ln(i+1)/(2i)$.

18. 각각에 대해 Cauchy's integral formula를 적용한다. $2\pi i(1/(z_1-z_2) - 1/(z_2-z_1)) = 0$.

19. Cauchy's integral formula를 적용하면 $2\pi i(\tan 1/2 + \tan(-1)/(-2)) = 2\pi i\tan 1$.

13.4. Derivatives of Analytic Functions

1. 미분형태의 Cauchy Integral formula를 쓰면 세번 미분된 형태로 해석되므로 $2\pi i/(3!)16\cosh(0) = 16/3\pi i$.

2. 미분형태의 Cauchy Integral formula를 쓰면 한번 미분된 것으로 해석하여 $2\pi ie^0\cos 0$.

3. 미분형태의 Cauchy Integral formula를 쓰면 두번 미분으로 해석되고 $2\pi i(1/2)^2/(2!8) = \pi i/8$.

4. 다섯번 미분된 Cauchy Integral formula를 사용하여 $2\pi i/(32^2 \times 5!)$.

5. 두번 미분된 Cauchy Integral formula를 써서 $2\pi i/(2!) = \pi i$.

6. 세번 미분된 Cauchy Integral formula를 쓴다. $-2\pi i/(3!)$.

7. $2n-1$번 미분된 Cauchy Integral formula를 쓰면 sin이 0이므로 0.

8. $2n$번 미분된 Cauchy Integral formula를 쓰자. sin이 0이므로 0.

9. 두번 미분된 Cauchy Integral formula를 사용하면 $e^{3\pi/4}/(4^3 \times (4!))$.

10. 두번 미분된 Cauchy Integral formula를 사용하자. $2\pi i/8e^{1/2}/(2!)$.

11. 한번 미분된 Cauchy Integral formula를 이용하면 $2\pi i$.

12. 두번 미분된 Cauchy Integral formula를 이용 $\pi i(-i-(i/2)(e+e^{-1})/2$.

13. 한번 미분된 Cauchy Integral formula를 이용하여 $2\pi i \ln 2$.

14. 한번 미분된 Cauchy Integral formula에 대입 $-2\pi i$.

15. 한번 미분의 Cauchy Integral formula에 대입 $2\pi(-7+4i)/(1+i)=\pi(-3+11i)$.

16. 한번 미분한 Cauchy Integral formula에 대입 πe^{-4}.

17. Cauchy Integral formula의 한번 미분에 대입 $1.5\sin(0.5)/4$.

18. Cauchy Integral formula의 한번 미분을 적용 $-2\pi i \ln 2$.

19. 준 curve내에 4가 있으므로 Cauchy Integral formula에서 $n=2$ 로 보면 $\pi i \cosh(16)$.

20. (a) 만약 아니라면 유계가 되는 영역이 있어서 $|z|>R$에 대해 bound K가 있고 $|f(z)|<K$이다. Liouville's theorem에 의해 f는 상수함수이고 이는 모순이다. (b) 다항식에 대해서는 그 값을 최고차항이 지배한다. 충분히 큰 반경을 선택하고 그 밖의 수를 대입하면 항상 주어진 수보다 크게 만들 수 있다. (c) e^{Rez}가 f의 크기를 결정한다. 이의 크기는 $Re(z)$가 양수이냐 음수이냐에 따라 충분히 커지기도 하고 충분히 0에 가깝기도 하다. (d) 만약 다항식 $f(z)$에 대해 해가 없다고 하면 $1/f(z)$도 entire function이다. 그리고 (b)에 의해 $1/f(z)$는 적당한 영역 밖에서 유계이다. 이는 Liouville's theorem에 의해 $f(z)$가 상수 함수임을 유도하게 되고 이는 명백한 모순이다.

Chapter 13. Review

1. Complex line integral은 복소평면상에서 의 선적분을 의미한다. 이는 함수값과 그 구간의 곡선의 길이를 곱한 것에 대한 무한합으로 정의된다.

2. potential function을 이용하는 적분이나 Cauchy Integral formula를 이용하는 적분에는 Analyticity가 요구되나, parametrization을 사용하는 직접적인 적분 방식은 일반적인 함수들에도(Analytic이 아닌) 사용된다.

3. Curve가 가진 기본적인 성질이 바로 1차원 특성이다. 이는 1개의 독립변수에 의해 그 변수에서 곡선으로 가는 함수와 변수의 영역을 지정하여 곡선을 표현하는 방식이다. 이는 곡선에 대한 적분을 1변수에 대한 적분으로 바꾸어 주는 역할을 담당한다.

4. 이 장에서는 곡선에 대한 smoothness를 가정했으며 $\dot{z}$는 복소평면 상에서 곡선의 속도벡터를 표시한다.
5. $1/z$의 적분에서는 2π를 나머지에서는 0을 얻는다.

6. 양 끝점이 고정되어 있을 때 이 두 점을 연결하는 곡선에 대한 line integral이 곡선에 의존하지 않는다는 것이 independence에 대한 개념이다. 즉, 곡선이 변하여도 적분값은 바뀌지 않는다. 이는 함수가 Analytic일 때 나타나는 상황이며 이 때의 적분은 오직 양 끝점에만 의존한다.

7. Cauchy's Integral Theorem은 Analytic region에서의 적분값의 invariance를 설명한 것이고 Cauchy's Integral formula는 singularity가 곡선 내부에 있을 때, 적분값을 계산하는 방식이다.

8. 피자 반죽을 판 형태로 만들어 놓으면 이는 simply connected이다. 내부에서 접시 하나만큼 반죽을 뜯어내면 doubly connected 다시 동그라미 형태로 뜯어내면 내부에는 바닥이 보이는 두 개의 떨어진 원과 그 주위의 반죽이 있다. 이를 triply connected라고 한다. 외부곡선에 대해 counterclockwise내부곡선에 대해 clockwise의 적분을 하고 이 multiply connected domain에서 integrand가 Analytic이면 Cauchy's Integral Theorem이 성립한다.

9. 앞에서 풀어놓은 문제들로 답변을 대신할까 한다.

10. 영역에서의 미분가능성이 Analytic이다. 그리고 Analytic이면 몇번을 미분해도 Analytic이다.

11. 적분이 합과 상수곱에 대해서 갈라질 수(적분하고 더하고 상수곱하나 더하고 상수곱한 후 적분하나 같다는 말)있다는 말 이 Linearity.

12. 실수부와 허수부를 쪼개어 놓고 선적분하면 전체로는 복소선적분이지만 개별적으로는 실선적분이다.

13. 선적분의 최대값은 그 곡선위에서의 함수의 최대값과 곡선의 길이로 bound된다.

14. 일정영역 밖에서 유계인 analytic함수는 상수함수뿐이다.

15. 좌변은 실수이지만 우변은 복소수이다. $f=u+iv$라 놓으면 $Im\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy$이고 $\int_C Im(z)dz = \int_C v(dx+idy)$.

16. $\int_0^{\pi}(64e^{6i\theta}-48e^{4i\theta})ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{\pi} 64ie^{7i\theta} - 48ie^{i\theta}d\theta = 2176/35$ $\int_C(z^6-3z^4)dz=(-128)/7+64/5-128/7+64/5=2176/35$.

17. Analytic이므로 (a),(b)의 결과는 같다. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 - e^{2i\theta})^2 ie^{i\theta}d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(ie^{5i\theta} - 2ie^{3i\theta} + ie^{i\theta})d\theta = 0.4i + 4/3i + 2i$.

18. $\int_0^\pi \sin t dt = 2$, $\int_0^1 \sin(\pi + it)idt = (-1/2)\int_0^1(e^{-t} - e^t)dt = (1/2)(e^{-1} + e - 2)$, $\int_\pi^0 \sin(t+i)dt = (1/2)(e^{-1}+e)\int_\pi^0 \sin t = -(e^{-1}+e)$, $\int_1^0 \sin(ti)idt = (1/2)\int_1^0(e^{-t} - e^t)dt = (1/2)(-2 + e^{-1} + e)$. 위를 모두 더하면 0.

19. $\int_0^\pi it\cosh(-t^2)idt = (\sinh(\pi^2))/2$.

20. 원점과 2를 모두 포함하는 곡선이므로 Cauchy integral formula에 의해 $4\pi i$.

21. $\int_0^{2\pi}(1 + e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta = 0$.

22. Cauchy integral formula의 미분 형태에 의해 $2\pi i/(3!) = \pi i/3$.

23. Curve가 singularity를 포함하지 않으므로 0.

24. $3t + 9ti(0 \le t \le 1)$로 매개화한 선적분에 의해 $\int_0^1 t(3+9i)dt = 3/2 + 9/2i$.

25. Cauchy integral formula의 미분 형태에 의해 $2\pi ii\cosh(-1)/2 = \pi i\cosh 1$

26. Cauchy integral formula의 미분 형태에 의해 $2\pi i\tan(\pi) = 0$.

27. Curve가 $-2i$만을 포함하므로 Cauchy integral formula에 의해 $8\pi i$.

28. $\int_0^{\pi/2} 1/33ie^{i\theta}d\theta = (i-1)$

29. Cauchy integral formula의 미분 형태에 의해 $2\pi i\ln(2i) = -\pi^2 + 2\pi i\log 2$.

30. 준 곡선이 $\pi/4$만을 포함하므로 Cauchy integral formula에 의해 $2\pi i\cos(\pi)/(\pi/4)^3 = -128i/\pi^2$.

CHAPTER 14

Power Series, Taylor Series

Complex power series, in particular, Taylor series, are analogs of real power and Taylor series in calculus. However, they are much more fundamental in complex analysis than their counterparts in calculus, because **power series** represent analytic functions (Sec. 14.3) and, conversely, every analytic function can be represented by power series, called **Taylor series** (Sec. 14.4).

Section 14.1 on basic concepts and convergence tests for complex series is similar to the corresponding material for real series. If you are familiar with the latter, use Sec. 14.1 for reference and begin with Sec. 14.2, a thorough discussion of power series. Sections 14.3 and 14.4 have been mentioned, and the concluding Sec. 14.5 concerns uniform convergence of power and other series.

Prerequisites for this chapter: Chaps. 12, 13.
Sections that may be omitted in a shorter course: Secs. 14.1, 14.5.
Reference: Appendix 1, Part D.
Answers to problems: Appendix 2.

14.1. Sequences, Series, Convergence Tests

1. l, k가 주어진 수열 a_n의 극한이라 하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 N, M이 존재해서 $n > N, m > M$에 대해 $|l-a_n| < \varepsilon/2, |k-a_m| < \varepsilon/2$이다. $P = maxN, M$이라 하면 $p > P$에 대해 $|l-k| \leq |l-a_p|+|k-a_p| < \varepsilon$이다. ε가 임의의 양수이므로 $l = k$.
2. bounded, not-convergent.
3. bounded, convergent with limit 0.
4. bounded, not-convergent.
5. bounded, convergent with limit πi.
6. bounded, convergent with limit 0.
7. bounded, not-convergent.
8. bounded, convergent with limit 0.
9. bounded, convergent with limit $-\pi/3$.
10. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 N, M이 존재해서 $n > N, m > M$에 대해 $|l - a_n| < \varepsilon/2, |l^* - a_m^*| < \varepsilon/2$이다. $P = max\{N, M\}$이라 하면 $p > P$에 대해 $|l + l^* - (a_p + a_p^*)| \leq |l - a_p| + |l^* - a_p^*| < \varepsilon$이다. ε가 임의의 양수이므로 $a_n + a_n^*$는 $l + l^*$로 수렴한다.
11. $z = x + iy$에 대해 $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$이므로 수열이 유계이면 그 실수부와 허수부도 유계이다. 실수부와 허수부가 유계이면 그 제곱들도 유계이고 제곱들의 합도 유계이다. 즉, 수열이 유계이다.
12. $\lim(a_{n+1}/a_n) = \lim(20 + 30i)/(n + 1) = 0$이므로 수렴한다.
13. $\lim(a_{n+1}/a_n) = \lim(n + 1)^2/n^2(i/2) = i/2$이므로 수렴한다.
14. 충분히 큰 n에 대해 절대값의 크기비교를 한다. $1/\sqrt{n^4+1} \leq 1/(n^2-1)$이므로 수렴한다.
15. $1/\sqrt{n}$실수에서의 적분테스트를 적용하면 발산.
16. $\lim(a_{n+1}/a_n) = \lim 1/(2(2n+1))^2 = 0$이므로 수렴.
17. $\lim(a_{n+1}/a_n) = \lim((n + 1)/n)^n/(3i) = e/(3i)$이므로 수렴.
18. 수렴하지 않는다.
19. CAS PROJ
20. (a)$|\sum_{i=1}^{m} a_i| \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i|$이므로 우변의 수렴이 절대수렴이므로 절대수렴하면 좌변(원래의 급수)도 수렴한다. (b)실수를 포함하는 복소수를 다룬다는 점이외에는 급수를 다룬다는 사실에 그다지 특이한 점은 없다. 수렴판정에 있어서도 실수에서 사용하던 방법들을 그대로 따른다. (c)$|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$에서 $z_{n+k} \leq q^{k-1}|z_{n+1}|$ 이 나온다. k에 대해 무한급수를 합하면 된다. (d)q에 해당하는 수가 1/2이므로 $|R_n| \leq 0.05$가 되게 하는 n은 $2\sqrt{(n+1)^2+1}/(2^{n+1}(n+1)) < 0.05$인 최소의 n이다. (e)각자 찾기 바란다.

14.2. Power Series

1. 비율판정에 의해 중심은 $-i\sqrt{2}$이고 수렴반경은 1.
2. 비율판정에 의해 중심은 3이고 수렴반경은 ∞.
3. 비율판정에 의해 중심은 i이고 수렴반경은 ∞.
4. 비율판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 4.
5. 비율판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 0.
6. 멱근판정에 의해 중심은 πi이고 수렴반경은 $|b/a|$.
7. 멱근판정에 의해 중심은 $i - 2$이고 수렴반경은 $\sqrt{2}$.
8. 비율판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 $1/2^{1/3}$.
9. 멱근판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 $26/\sqrt{14^2+22^2}$.
10. 비율판정에 의해 중심은 -1이고 수렴반경은 4.
11. 비율판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 2/27.
12. 비율판정에 의해 중심은 $3i$이고 수렴반경은 $1/e$.
13. 앞 문제에서처럼 중심은 $-\pi$이고 수렴반경은 e.
14. 비율판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 1.
15. 비율판정에 의해 중심은 $2i$이고 수렴반경은 ∞.
16. 비율판정에 의해 중심은 0이고 수렴반경은 $\sqrt{2}$.
17. 수렴반경 1/3, 1에서 1/3.
18. 수렴반경 1/6, 6에서 1/6.
19. CAS PROJ
20. (a)본질적인 차이는 없다. (b)(i)변화없다.(ii)수렴반경에 $1/k$를 곱해야(iii)원래 수렴반경의 역수가 새 수렴반경이 된다. (c)비율판정법에 대해 그 비율의 수열이

수렴하지 않더라도 그것의 하한은 역시 수렴반경을 제시해 준다. 이는 문제 17과 18을 참조하면 이해할 수 있다. 이는 수렴반경에 대한 수열을 여러가지로 해도 된다. (d)문제 8과 16을 비교하면 멱근판정이 가능하다. z대신에 z^2으로 대입 생각해도 무방하다.

14.3. Functions given by Power Series

1. 두 급수 $\sum_{j=1}^{k} a_j z^j$, $\sum_{j=1}^{k} b_j z^j$이 수렴하는 급수라 하자. 그럼 $\sum_{j=1}^{k}(a_j + b_j)z^j = \sum_{j=1}^{k} a_j z^j + \sum_{j=1}^{k} b_j z^j$도 각각이 수렴하므로 수렴하는 급수이다. 합급수는 급수의 합의 극한이므로 $\sum_{j=1}^{\infty}(a_j+b_j)z^j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j$가 된다. 차에 대해서도 같다.
2. $(\log n)/n \to 0$을 보여도 된다. 로피탈의 정리를 사용하면 $\lim_{n\to\infty}(\log n)/n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.
3. $(z/5)^2$을 뽑아내고 두번 미분된 것으로 보면 수렴반경은 0을 중심으로 5.
4. z^2을 뽑아내고 두번 미분된 것으로 보면 수렴반경은 0을 중심으로 1.
5. $z-i$를 뽑아내고 한번 미분된 것으로 보면 수렴반경은 i를 중심으로 1/6.
6. $(z/\pi)^k$를 뽑아내고 k번 미분된 것으로 보면 수렴반경은 0를 중심으로 π.
7. Cauchy-Hadamard formula를 쓰면 $\lim |a_{n+1}/a_n| = (z^2)(2)$이므로 0을 중심으로 수렴반경은 $1/\sqrt{2}$.
8. Cauchy-Hadamard formula를 쓰면 $\lim |a_{n+1}/a_n| = 3/5z^2$이므로 0을 중심으로 수렴반경은 $1/\sqrt{3/5}$.
9. Cauchy-Hadamard formula를 쓰면 $\lim |a_{n+1}/a_n| = 0$이므로 $-i$을 중심으로 수렴반경은 ∞.
10. Cauchy-Hadamard formula를 쓰면 $\lim |a_{n+1}/a_n| = 0$이므로 0을 중심으로 수렴반경은 ∞.
11. k번 미분된것으로 보면 -2를 중심으로 수렴반경은 1.
12. Cauchy-Hadamard formula를 쓰면 $\lim |a_{n+1}/a_n| = 4$이므로 0을 중심으로 수렴반경은 1/4.
13. k번 미분하고 보면 $\sum_k z^k$이므로 0을 중심으로 수렴반경은 1.
14. Cauchy-Hadamard formula를 쓰면 $\lim |a_{n+1}/a_n| = 0$이므로 0을 중심으로 수렴반경은 ∞.
15. (a) $1/(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$로 보고 두번 제곱하면 모든 계수는 1이고 차수가 높아짐에 따라 항의 수는 차수+1개이다. 즉, $1/(1-z)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$. (b) $1/(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$를 z에 대하여 한번 미분하면 된다.
16. $(1+z)^p(1_z)^q$에서 z^r항은 각각의 전개식을 곱할 때, $z^n \times z^{r-n}(n=0,\dots,r)$의 형태로 나타난다. 이 각각의 계산을 정리하면 $\sum_{n=0}^{r}\binom{p}{n}\binom{q}{r-n}$이고 이는 $(z+1)^{p+q}$의 z^r계수인 $\binom{p+q}{r}$과 같다.
17. 모든 z에 대해서 $0 = f(z) - f(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1-(-1)^k)z^k$이므로 모든 계수가 0이다.(한번씩 미분해가며 0을 대입해보면 된다.) 홀수인 k에 대해서는 계수가 사라진다.
18. 모든 z에 대해서 $0 = f(z) + f(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(1+(-1)^k)z^k$이므로 모든 계수가 0이다.(한번씩 미분해가며 0을 대입해보면 된다.) 짝수인 k에 대해서는 계수가 사라진다.
19. series expansion을 이용한 (쉬운) 미분 방정식의 해법에 응용된다.
20. (a)1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233 처음에 1쌍, 다음달에 2쌍이 되고, 아직 1쌍만 생산, 즉 3달에 3쌍, 4달에는 2쌍이 생산, 즉, 5쌍이 된다. 이런 식으로 계속된다. (b)$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$이라고 놓으면 상수항이 1이니까 $a_0 = 1$. 1차항은 $-1 + a_1 = 0$이므로 $a_1 = 1$ 2차항은 $-1-1+a_2 = 0$이므로 $a_2 = 2$이렇게 계속 나간다. (c) reference를 참조하시오.

14.4. Taylor Series and Maclaurin Series

1. cos의 Maclaurin series에 대입하면 $\cos 2z^2 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k}(-1)^k/((2k)!)z^{4k}$
2. 등비급수로 전개하면 $1/(1-z^4) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{4k}$.
3. $\sin^2 z = (1-\cos(2z))/2$로 보고 cos의 Maclaurin 전개식에 대입하면 $1/2 - 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(-4)^k/(2k)!z^{2k}$.
4. e^z의 Maclaurin 전개식에 다음과 같이 대입한다. $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(k!)(-1/2)^k z^{2k}$.
5. 등비급수로 전개하여 정리한다. $(z+2)\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2z^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}$.
6. 분모는 $1/(1-z)$를 미분하여 Maclaurin 전개식을 구한다. $1/(1-z)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$, 여기에 $(2-z)$를 구하여 급수를 구한다. $(2-z)/(1-z)^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^{k+1}$
7. $1/(z+3i) = (-i/3)/((-iz/3)+1) = (-i/3)\sum_{k=0}^{\infty}(iz/3)^k$.

8. 미분하면 $f'(z) = 2zf(z) + 1$이다. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 로 놓고 계수를 비교하면 된다.($f(0) = 0 \to a_0 = 0$) $a_1 = 1$, $(k+1)a_{k+1} = 2a_{k-1} (k \geq 2)$. 짝수차는 모두 계수가 0이고 홀수차의 계수는 $a_m = 2/m \cdot 2/(m-2) \cdots 2/1$로 주어진다.

9. 미분하면 $2/\sqrt{\pi} e^{-z^2}$이므로 미분된 것의 series를 구하고 $f(0) = 0$을 이용해서 적분으로 구한다. 즉, $e^{-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k!)z^{2k}$에서 $erf(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k! \times (2k+1))z^{2k+1}$

10. 미분하면 $\sin z/z$ 이므로 sin의 전개식으로부터 준 함수의 Maclaurin 전개식은 다음과 같이 구할 수 있게 된다. $Si(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/(2k!)z^{2k-1}$.

11. 미분하면 $\sin z^2$이므로 이의 전개식을 구하고 $S(0) = 0$을 이용, 다시 정적분하여 Maclaurin 전개식을 얻는다. $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/(2k! \times (4k+1))z^{4k+1}$.

12. 미분하면 $\cos z^2$이므로 이의 전개식을 구하고 $C(0) = 0$을 이용, 다시 정적분하여 Maclaurin 전개식을 얻는다. $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/((2k+1)! \times (4k+3))z^{4k+3}$.

13. CAS PROJ

14. $1/\sqrt{1-z^2}$의 전개식을 $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$라고 놓으면 $f^2 = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}$가 된다. 여기에서 계수를 비교하는 방식으로 $f(z)$에 대한 Maclaurin 전개식의 계수를 다음과 같이 구한다. $f(0) = 1$에서 $a_0 = 1$이고 $2a_0a_1 = 0$에서 a_1은 0이다. $2a_2a_0 + a_1^2 = 1$에서 $a_2 = 1/2$가 되고 $2a_3a_0 + 2a_2a_1 = 0$에서 $a_3 = 0$이다. alternating하게 계수는 0이 나타나게 된다. 마지막으로 이렇게 구한 $f(z)$의 전개식을 한번 정적분해주면 원하는 결과 $\sin^{-1} z = z + (1/2)z^3/3 + (1 \cdot 3/2 \cdot 4)z^5/5 + \cdots$를 얻게된다.

15. 앞의 네개항(4차)만을 사용하면 $(z - 1/6z^3) = (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4)(1 - 1/2z^2 + 1/24z^4)$이다. 차례로 계수를 비교하면 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 - 1/2a_1 = -1/6 \to a_3 = 1/3$, $a_4 = 0$이다. 즉, tan의 4차항까지는 $z + 1/3z^3$이다.

16. $1/z = 1/(i - (i-z)) = -i/(1 - (i-z)/i) = \sum_{k=0}^{\infty}(-i)(1+iz)^k$.

17. $1/z = 1/(2 - (2-z)) = 0.5/(1 - (1 - z/2)) = \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)(1 - z/2)^k$.

18. 차례로 -1에서의 미분값을 구하면 -1, -5, 20, -60, 120, 120,0 $\cdots$. $z^5 = -1 - 5(z+1) + 10(z+1)^2 - 10(z+1)^3 + 5(z+1)^4 + (z+1)^5$.

19. $e^z = e^{(z-a)+a} = e^a \cdot e^{z-a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^a 1/(k!)(z-a)^k$

20. $\cos(\pi z)$의 1/2에서의 미분값은 짝수미분일때에 값이 0이고 홀수번 미분일 때에 값은 ±1이 교대로 나타난다. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k!)(z-1/2)^{2k+1}$.

21. Lnz의 k번 미분은 $(-1)^{k-1}(k-1)!z^{-k}$이다. 여기에서 1을 중심으로 하는 Taylor series는 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}(k-1)!(z-1)^k$.

22. $\cosh z$의 전개식에 z대신 $z - \pi i$를 대입하면 된다. $\cosh(z - \pi i) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(2k!)(z-\pi i)^2 k$.

23. $\sin z$의 $\pi/2$에서의 미분값을 수열로 보면 $1, 0, -1, 0$이 반복되는 순환구조를 갖는다는 것을 알 수 있다. 이를 Taylor series에 적용하면 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}/(2k+1)!(z-\pi/2)^{2k}$.

24. $1/(z+i)^2 = -i/(2 - (iz+1))^2$이다. 그리고 이는 $1/(2 - (iz+1)) = \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)((iz+1)/2)^k$ 의 z에 대한 미분이다. 즉, $1/(z+i)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k/2i/2^k(iz+1)^{k-1}$.

25. sinh의 전개식에 대입하면 $\sinh(2z - i) = \sum_{k=0}^{\infty}(2z-i)^{2k+1}/(2k+1)!$

26. $\cos^2 z = (1 + \cos 2z)/2$이므로 $\pi/2$에서의 전개식은 $\cos(2z - \pi + \pi) = -\cos w, w = 2z - \pi$임을 이용하여 구할 수 있다. $1/2 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k-1}/(2k!)(2z-\pi)^{2k}$.

27. $e^{z^2-2z} = e^{-1}e^{(z-1)^2}$을 이용 지수함수의 Taylor series에 대입해 준다. $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(ek!)(z-1)^{2k}$.

28. (a) $(e^z)' = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/(k!) = e^z$. $(\cos z)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{2k+1}/(2k+1)!$. $(\sin z)' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}/(2k)!$. $(\cosh z)' = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}/(2k)!$. $(\sinh z)' = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}/(2k+1)!$. $(Ln(1+z))' = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$. (b) $(e^{iz} + e^{-iz})/2 = 1/2\sum_{k=0}^{\infty}((iz)^k + (-iz)^k)/k!$. $= \sum_{k=0}^{\infty}(iz)^k/k! = \cos z$. (c) $\sin(z + \pi/2)$를 0주위에서 Taylor expansion. 미분값은 $1, 0, -1, 0$으로 순환한다. 즉 홀수번째 항들만이 남게 되고 $\sin(z + \pi/2) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{2k+1}/(2k+1)!$. (d) $\sin(iy) = (-i/2)(e^{-y} - e^y)$이다. $y \neq 0$이 실수이면 $e^{-y} \neq e^y$이다. 즉, $\sin(iy) \neq 0$이다.

14.5. Uniform Convergence. Optional

1. 임의의 주어진 양수 ε에 대해 자연수 m이 존재하여 $0.99^{m+1} \times 100 < \varepsilon$가 되게 할 수 있다. $|\sum_{k=m+1}^{n}(z-i)^k| \le \sum_{k=m+1}^{n}|(z-i)|^k \le \sum_{k=m+1}^{n} 0.99^k \le 0.99^{m+1} \times 100$. 즉, $|z-i| < 0.99$인 영역에서 uniformly converge한다.

2. 임의의 주어진 양수 $\varepsilon(<< 1/2)$에 대해 자연수 m이 존재하여 $10^{2m}/(2m)! \le \varepsilon/2$가 되게 할 수 있다. $|\sum_{k=m+1}^{n} z^{2k}/(2k)!| \le \sum_{k=m+1}^{n} z^{2k}/(2k)! < \sum_{k=1}^{n-m} 10^{2m+2}/(2m+2)!(1/2)^k \le \varepsilon$. 즉, $|z| < 10^{20}$인 영역에서 uniformly converge한다.

3. cos의 값은 항상 1보다 작거나 같다. $1/n^2$의 합이 항상 수렴하므로 uniformly convergent이다.

4. $1/4 \le |z| \le 1/2$이므로 $|z^n/(|z|^{2n}+2)| \le 1/|z|^n \le 1/2^n$이다. 따라서 uniformly convergent이다.

5. $(n!)^2/(2n)! \le 4$이다. $(n!)^2/(2n)!z^n \le (3/4)^n$이므로 uniformly convergent이다.

6. $\tanh|z|/(n^2+n) \le 1/(n^2+n) \le 1/n^2$이고 $\sum 1/n^2$이 수렴하므로 uniformly convergent이다.

7. $|z+i| < \sqrt{5}$내부의 닫힌영역에서 uniformly convergent이다.

8. $|z| < 5$내부의 닫힌영역에서 uniformly convergent이다.

9. $|z-1| < 2$내부의 닫힌영역에서 uniformly convergent이다.

10. $e^{3(1-i)z}$의 전개식이므로 어느 닫힌 영역에서건 uniformly convergent이다.

11. $|3z+i| < 1$내부의 닫힌영역에서 uniformly convergent이다.

12. $|z| < \sqrt{6}$내부의 닫힌영역에서 uniformly convergent이다.

13. CAS PROJ

14. (a)임의의 주어진 양수 ε에 대해 자연수 m이 존재하여 $\sum_{k=m}^{\infty} M_k < \varepsilon$가 되게 할 수 있다. $|\sum_{k=m}^{\infty} f_m| \le \sum_{k=m}^{\infty} M_m < \varepsilon$이다. uniformly convergent이다. (b)$f' \to g$로 $f \to \int G$로 기호만 바꾸어 주고 정리3의 과정을 그대로 되풀이하면 된다. (c)작은 영역에 대한 bound는 항상 큰 영역에서의 bound보다 작거나 같다. (d)큰 영역이 compact domain이라면 된다. 그러나 일반적으로는 되지 않는다.

Chapter 14. Review

1. 준 급수가 수렴하는지를 조사하는 방법으로는 $\lim|a_{n+1}/a_n|$와 $\lim|a_n|^{1/n}$을 구하는 방법 그리고 비교판정등이 있다. 위의 극한은 실제로 그 상한을 구하는 것으로 대체해도 된다.

2. 중요함수들에 있어서의 analysis를 할 때에 그 series expansion을 이용하는 경우가 더욱 편리할 때가 있다. 이 series로 구해진 급수가 power series이다. 이 때 구한 series가 원래 함수와 어느 정도로 같은지를 구별하는 (여기서 소개된)방법들 또한 필요하다.

3. 큰 영역에서 균등수렴하면 그의 부분영역에서도 균등수렴한다. 이 때 수렴하는 영역은 대개 원형의 영역으로 나타나며 이의 반경을 수렴반경이라 한다.

4. 각항에 절대값을 취하여도 급수가 수렴하면 이를 절대수렴 (absolutely convergence)이라 한다. 급수는 수렴하지만 절대수렴이 아니면 조건부수렴(conditional convergence)이라하며 주어진 영역에서 수렴하는 경우 이를 그 영역에 대한 균등수렴이(uniform convergence)라 한다.

5. 멱급수(power series)에 대해서는 그 수렴성이 보장되어야 그 합을 각각의 항들에 대한 합의 극한으로 표현할 수 있다. 위에서 설명하였듯이 멱급수는 그 수렴반경내에서만 실질적 의미를 갖는다.

6. Analytic function에 대해서는 local한 멱급수전개가 반드시 존재한다.

7. 정리3과 정리4에 미분과 적분에 대한 멱급수의 특성이 그 성립조건과 함께 설명되어 있다.

8. Taylor series는 준 함수를 다항식과 remainder term으로 표현하는 방식이다. 다항식의 차수가 올라감에 따라 remainder term이 감소한다면 원래 함수는 수렴반경내부에서 멱급수로 표시된다. Maclaurin series는 0주위의 Taylor series를 지칭하는 용어이다.

9. Cauchy integral formula에 부분적분을 계속 적용하거나 정리1처럼 하면 Taylor's series가 나온다.

10. 14.4절의 예제들을 참조.

11. 0에서는 Lnz가 정의되지 않는다. 따라서 Maclaurin series도 구할 수 없다.

12. 등비급수 전개나 미분 혹은 적분을 이용한 함수의 이용 또는 유사함수의 전개후 계수비교를 통해 구하는 방법이 있다.

13. 멱급수의 수렴에 있어서 그 수렴반경을 아는것외에도 그 수렴반경 내에서 그 급수의 합을 구하는 실제적인 문제가 제기되는 상황또한 야기될 수 있다. 이때에는 앞에서부터 유한한 항까지의 합만으로 그 함수값을 근사할 필요가 생기는데, 이때에 cut off error의 bound를 아는 것이 필요하다. 여기에 개입되는 개념이 바로 uniform convergence이다.

14. 지수함수의 경우나 삼각 또는 하이퍼함수에 있어서 미분에 대한 순환성이 쉽게 증명된다.

15. 모든 함수에 대해 Taylor series approximation이 가능하지는 않다. 무한번 미분가능한 함수라 하더라도 이렇게 되는 예제로는 $e^{-z^2/2}$가 있다.

16. 수렴반경은 1이다. $z/(1-z)$.

17. 수렴반경은 1이다.

18. 중심을 $i-1$로 하고 수렴반경은 ∞이다.

19. 수렴반경은 ∞이고 $\cos(\pi z)$를 의미한다.

20. 중심을 i로 하고 수렴반경은 4이다.

21. 수렴반경은 1/2이다. $-1/2\ln(1-2z)$.

22. 수렴반경은 ∞이다.

23. 중심을 i로 하고 수렴반경은 $1/sqrt2\pi$. $1/(1-2\pi(z-i)^2)$.

24. 중심을 $2i$로 하고 수렴반경은 5. $1/(1-(z-2i)/(4+3i))$.

25. $\lim a_{n+1}/a_n = 0$이므로 수렴반경은 ∞이다.

26. e^{2z}의 k번 미분은 $2^k e^{2z}$이며 그때에 $\pi i/2$를 대입하면 -2^k이다. 즉, $\sum_{k=0}^{\infty} -2^k/k!(z-\pi i/2)^k$.

27. 지수함수의 전개식을 그대로 이용하면 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!z^{4k-3}$.

28. $1/(-3+4i-z) = 1/(-3+4i)\cdot 1/(1-z/(-3+4i))$의 전개식을 미분한다. $\sum_{k=0}^{\infty} 1/(-3+4i)(z/(-3+4i))^k$를 미분하면. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(-3+4i)^2(z/(-3+4i))^{k-1}$

29. $\sin^2 z = (1-\cos 2z)/2$이므로 $1/2 - 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k)!z^{2k}$.

30. lnz의 전개는 $1/(1-z) = 1/(4-(3-z)) = 1/41/(1-(3-z)/4)$를 이용한다. $1/(1-(3-z)/4) = \sum_{k=0}^{\infty}((3-z)/4)^k$에서 $lnz = 1/4\sum_{k=0}^{\infty}((3-z)/4)^k$.

31. $1/z = 1/(3i-(3i-z)) = -i/3\cdot 1/(1-(3i-z)/3i)$를 이용한다. $1/(1-(3i-z)/3i) = \sum_{k=0}^{\infty}((3i-z)/3i)^k$에서 $1/z = -i/3\sum_{k=0}^{\infty}((3i-z)/3i)^k$.

32. 미분의 i에서의 값은 차례로 $1, -4i, -12, 24i, 24, 0\cdots$. $z^4 = 1-4i(z-i)-6(z-i)^2+4i(z-i)^3+(z-i)^4$.

33. $1/(1-z)$의 전개식을 두번 미분하고 2를 곱하면 된다. $1/(1-z)^3 = 2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2}$.

34. $\cos z = \cos(z-\pi/2+\pi/2) = -\sin(z-\pi/2)$에서 $\cos z = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-\pi)^{2k}/(2k)!$.

35. $\sinh(2(z-\pi i)+2\pi i) = \sinh(2(z-\pi i))$이므로 $\sum_{k=0}^{\infty}(2(z-\pi i))^{2k+1}/(2k+1)!$.

36. $30+10i$를 중심으로 수렴반경이 1/2인 급수 예를들어 $\sum 2^k(z-30+10i)^k$이 있다.

37. i를 중심으로 $\sqrt{2}$가 수렴반경.

38. 0를 중심으로 7이 수렴반경.

39. $-i/4$를 중심으로 수렴반경은 1/4.

40. -1중심으로 수렴반경은 0.

CHAPTER 15

Laurent Series Residue Integration

A **Laurent series** is a series of positive **and negative** integer powers of $z - z_0$ by which we can represent a given function $f(z)$ in an annulus (a circular ring with center z_0) in which $f(z)$ is analytic. $f(z)$ may have singularities outside the ring as well as in its "hole." The series (or finite sum) of the negative powers is called the **principal part** of the Laurent series.

An important special case is a Laurent series converging for $0 < |z - z_0| < r$, in "a ring whose inner circle is degenerated to a point." The principal part of this series serves to classify the singularity of $f(z)$ at z_0 (Sec. 15.2). The coefficient of the power $1/(z - z_0)$ of this Laurent series is called the **residue** of $f(z)$ at z_0. Residues are used in an elegant integration method for complex contour integrals (Sec. 15.3) as well as for certain complicated real integrals (Sec. 15.4).

Prerequisites for this chapter: Chaps. 12, 13, Sec. 14.2.
Sections that may be omitted in a shorter course: Secs. 15.2, 15.4.
References: Appendix 1, Part D.
Answers to problems: Appendix 2.

15.1. Laurent Series

1. $\cos z$의 Taylor expansion을 이용하면 $\cos z/z^4 = \sum_{k=0}^{\infty}$

2. $\sin(\pi z)$의 Taylor expansion을 이용하면 $\sin(\pi z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\pi^{2k}/(2k)!z^{2k-2}$.

3. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k-3}/k!$.

4. $-\sum_{k=0}^{\infty} z^{k-1}$. 수렴반경은 1.

5. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{3-k}/k!$.

6. $\sum_{k=0}^{\infty}(-5)^k z^{k-5}$.

7. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2k-2}/k!$.

8. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k-1}(\sum_{m=0}^{k} 1/m!)$.

9. $1/(z^2+1) = 1/2(1/(z-i)-1/(z+i))$에 $1/(z+i) = (-i/2)(1/(1-(z-i)/2i)) = (-i/2)\sum_{k=0}^{\infty}((z-i)/2i)^k$를 대입하면 된다. 수렴반경은 2.

10. $0.5e/(z-1)$를 뽑아내고 $e^{z-1}/(1-(z-1)/2)$의 Laurent series를 구한다. $e^{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k/k!$, $1/(1-(z-1)/2) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(z-1)^k$이므로 두 멱급수의 곱에 $0.5e/(z-1)$를 곱하면 된다. 수렴반경은 2.

11. π에서 분자의 미분값은 $-1, 0, 1, 0$을 순환한다. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-\pi)^{2k-2}/(2k)!$.

12. 분자는 $(z-1)^2 + 2(z-1) - 3$으로 표현되므로 $1 + 2/(z-1) - 3/(z-1)^2$.

13. z^4의 $-2i$에서의 미분값은 차례로 $16, -32i, -48, 48i, 24, 0\cdots$ 이므로 $16/(z+2i)^4 - 32i/(z+2i)^3 - 24/(z+2i)^2 + 16i/(z+2i) + 24$.

14. $\sin z = \sin(z-\pi/4+\pi/4) = 1/\sqrt{2}(\sin(z-\pi/4) + \cos(z-\pi/4))$ $\sin(z-\pi/4) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-\pi/4)^{2k+1}/(2k+1)!$이고, $\cos(z-\pi/4) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-\pi/4)^{2k}/(2k)!$이므로 $\sin z/(z-\pi/4)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k((z-\pi/4)^{2k-1}/(2k+1)! + (z-\pi/4)^{2k}/(2k)!)$가 된다.

15. $\cosh z$의 πi에서의 미분값은 $1/2(e^{\pi} + e^{-\pi}), 1/(2i)(e^{-\pi} - e^{\pi})$가 교대로 나타난다. $\sum_{k=0}^{\infty}[1/2(e^{\pi}+-\pi)(1+(-1)^k) - i/2(e^{-\pi}-e^{\pi})(1+(-1)^{k+1})](z+\pi i)^k$.

16. $e^{az} = e^{a(z-b)}e^{ab}$에서 $e^{az}/(z-b) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ab}(z-b)^{k-1}/k!$.

17. $z^2 - 3iz - 2 = (z-i)(z-2i)$. $1/(z-2i) = i/21/(1-(z/2i)) = i/2\sum_{k=0}^{\infty}(z/2i)^k$이며 $1/(z-i) = i/(1-(z/i)) = i\sum_{k=0}^{\infty}(z/i)^k$이다. $(2z-3i)/(z^2-3iz-2) = 1/(z-i) + 1/(z-2i)$이므로 $i/2\sum_{k=0}^{\infty}(z/2i)^k + i\sum_{k=0}^{\infty}(z/i)^k$이다.

18. $1/(z-i) = 1/z1/(1-i/z) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k z^{1-k}$이므로 $i/2\sum_{k=0}^{\infty}(z/2i)^k + \sum_{k=0}^{\infty} i^k z^{1-k}$이다.

19. $1/(z-2i) = 1/z1/(1-2i/z) = \sum_{k=0}^{\infty}(2i)^k z^{-k-1}$이므로 $\sum_{k=0}^{\infty} i^k z^{1-k} + \sum_{k=0}^{\infty}(2i)^k z^{-k-1}$이다.

20. $1/(z-i) = 1/((z+i)-2i) = i/21/(1-(z+i)/2i) = i/2\sum_{k=0}^{\infty}((z+i)/2i)^k$과 $1/(z-2i) = 1/((z+i)-3i) = i/3\sum_{k=0}^{\infty}((z+i)/3i)^k$의 합, 즉 $i/2\sum_{k=0}^{\infty}((z+i)/2i)^k + i/3\sum_{k=0}^{\infty}((z+i)/3i)^k$.

21. CAS PROJ

22. (a)주어진 Annulus $R_0 < |z-z_0| < R_1$에 대해서 두개의 Laurent series가 있다고 하자. $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$. 임의의 정수 k에 대해 양변에 $(z-z_0)^k$를 곱하고 annulus내에 있으며 z_0를 한바퀴 도는 곡선C에 대해 적분하면 $\int_C(z-z_0)^m dz$의 값이 $m=-1$일 때에만 $2\pi i$이고 아니면 $(m \neq -1)$ 0이므로 $a_{-k-1} = b_{-k-1}$이 나온다. k가 임의 정수이므로 증명 끝. (b) $\tan z$의 Maclaurin series에 z대신 $1/z$를 대입하면 된다. (c) 미분한 것에 대해 Laurent series를 구하고 적분하면 된다.

15.2. Singularities and Zeros. Infinity

1. z가 정수이면 된다. 중복도는 모두 1.

2. $\pm i, \pm 1$. 모두 중복도는 4.

3. 홀수 k에 대해 $(2k+1)\pi$. 중복도는 2.

4. 근이 없다.

5. $\pm i, 2n\pi i$. 중복도는 1.

6. $2n\pi$. 중복도는 5.

7. $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}i$. 중복도는 3.

8. (a) 근의 중복도가 n이므로 $f(z)$의 $n-1$차 미분값은 z_0에서 0이다. 즉, f'은 $n-2$차 미분까지 z_0에서 0이다. (b) 해의 z_0에서의 중복도가 n이므로 f의 z_0에서의 Laurent series는 $\sum_{k=n}^{\infty}(z-z_0)^k = (z-z_0)^n\sum_{l=1}^{\infty}(z-z_0)^l$으로 표현된다. $1/f = 1/(z-z_0)^n g(z)$이고 $g(z_0) \neq \infty, 0$이다. (c) 수렴하는 수열 z_n에 대해 그 함수값이 항상 k라고 하자. $g(z) = f(z) - k$는 z_n을 근으로 갖게 된다. 다음의 두 떨어진 집합을 생각하자. $A = \{a|f(z) = 0 \text{in some neighborhood of} a\}$. $B = \{a|f(z) \neq 0 \text{for all} z \text{in some neighborhood of} a - \{a\}\}$. 그럼

적당한 z_0의 연결된 근방에 대해서 그 근방은 위의 두 집합으로 분할된다. 두 집합은 모두 개집합이고 합은 연결된 z_0의 근방이다. 그러므로 둘 중하나는 공집합이고 A가 공집합이 아니므로 B가 공집합이다. 즉 $f = k$이다. 모순.

9. 두 함수를 빼서 위의 문제에 있는 함수 g에 대입하면 된다. g가 영함수가 되므로 두 함수는 같다.

10. $z^2 - 1/z^2 = (z^4 - 1)/z^2$이므로 $\pm 1, \pm i$에서 중복도 1인 근을 갖고 0에서 중복도 2인 pole을 갖는다. 이는 무한대에서의 2인 근과 같다.

11. $\tan(\pi z/2)$의 근은 짝수에서 pole은 홀수에서 나오며 모두 중복도는 1이다.

12. 분모가 $\sin z$이므로 pole은 $n\pi$이고 중복도는 모두 1. 분자가 $\cos z$이므로 zero는 $n\pi + \pi/2$이고 중복도는 모두 1.

13. pole은 없고 해는 $n\pi + \pi/4$이며 중복도는 1.

14. $2z^{-3} - z^{-1} = (2 - z^2)/z^3$이므로 pole은 0이고 중복도는 2. 해는 $\pm\sqrt{2}$이고 중복도는 1.

15. pole은 $\pm 2i$이고 중복도는 1.

16. pole은 $\pm ai$이고 중복도는 2.

17. $-i$에서 근의 중복도는 1. pole은 중복도가 무한대.

18. 0에서 pole의 중복도는 1.

19. $n\pi + \pi/4$에서 pole의 중복도는 1.

20. πi에서 Pole의 중복도는 1.

21. $f(z) = (1 - z^2)/z^3$이고 $re^{i\theta}$를 대입하면 $|f(re^{i\theta})| \leq (1 + r^2)/r^3$이므로 θ에 관계없이 $r \to 0$이면 $|f(re^{i\theta})| \to \infty$이다. 일반적으로도 이와 같은 방식을 따른다.

22. 북극을 중심(무한대에 해당하는 점)으로 하는 작은 원판.

23. 북극을 지나는 대원에 대한 한쪽 반구.

24. 남극을 중심으로 하는 작은 annulus.

15.3. Residue Integration Method

1. $\pm i$에서 Residue는 각각 $\mp 2i$.

2. $\cos z/z^4$ $1/3! \lim_{z\to 0} \sin z = 0$.

3. $1/5! \lim_{z\to 0} 32\cos(2z) = 4/15$.

4. singular point는 정수 k에 대해서 $(2k+1)\pi$이고 $\lim_{z\to(2k+1)\pi} -\sin z/sinz = -1$.

5. singular point는 0이고 $\lim_{z\to 0} 1/(-e^z) = -1$.

6. singular point는 정수 k에 대해서 $k\pi + \pi/2$이고 $\lim_{z\to k\pi+\pi/2} -1/\sin z = (-1)^{k+1}$.

7. singular point는 ± 1이고 $\lim_{z\to\pm 1} \mp 2/(z \pm 1)^3 = \mp 1/4$.

8. singular point는 $2i, -i$이고 $\lim_{z\to 2i} z^4/(z+i) = -16i/3$, $\lim_{z\to -i} z^4/(z-2i) = i/3$.

9. singular point는 정수점에서만 나타난다. $\lim_{z\to n} \cos(\pi z)/(\pi\cos(\pi z)) = 1/\pi$.

10. singular point는 πi 이고 $\lim_{z\to\pi i} e^z = -1$.

11. CAS PROJ

12. 곡선 내부의 singular point는 $5, -1$이고 각각의 residue는 $-3, 4$이므로 $2\pi i(-3+4) = 2\pi i$.

13. 곡선 내부의 singular point는 $\pm 1/2$이고 각각의 residue는 $-1/\pi$이므로 $2\pi i(-2/\pi) = -4i$.

14. 곡선 내부의 singular point는 $\pm 1/2$이고 각각의 residue는 모두 $\sin(1/2)/2$이므로 $2\pi i \sin(1/2)$.

15. 곡선 내부의 singular point는 $\pm\pi/2$이고 각각의 residue는 $e^{\pm\pi/2}$이므로 $2\pi i(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2})$.

16. 곡선 내부의 singular point는 $\pm 1, 0$이고 각각의 residue는 $e^{\pm\pi/2}, -1$이므로 $2\pi i(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2} - 1)$.

17. 곡선 내부의 singular point는 0이고 residue는 $\lim_{z\to 0}[(z+1)/(z-2)]'' = -3/4$이므로 $-3\pi i/2$.

18. 곡선 내부의 singular point는 $i/2$이고 residue는 $\lim_{z\to i/2} \sinh z = (e^{-1/2} - e^{1/2})/2$이므로 $\pi i(e^{-1/2} - e^{1/2})$.

19. 곡선 내부의 singular point는 0이고 residue는 $\lim_{z\to 0} e^{-z^2}/4\cos(4z) = 1/4$이므로 $\pi i/2$.

20. 곡선 내부의 singular point는 $\pm 2i, \pm 4i$이고 residue는 모두 $1/10$이므로 $4\pi i/5$.

15.4. Evaluation of Real Integrals

1. $k+\cos(\theta) = k+(z+1/z)/2 = (z^2+2kz+1)/2z$이므로 $1/(k+\cos(\theta)) = 2z/(z^2+2kz+1)$이다. $\int_C -2i/(z^2+2kz+1)dz$가 구하는 적분이 되고 단위원의 위쪽에서 반시계방향의 적분(C)이므로 singular point $(-k+\sqrt{k^2-1})$는 단위원의 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i/(k+\sqrt{k^2-1})$이다. 적분값은 $2\pi/(k+\sqrt{k^2-1})$이다.

2. $25-24\cos(\theta) = 25-12(z+1/z) = -(12z^2-25z+12)/z$이므로 $1/(25-24\cos(\theta)) = -1/(12z^2-25z+12)$이다. $\int_C i/(12z^2-25z+12)dz$가 구하는 적분이 되고 singular point $(25-\sqrt{625-288})/24$는 단위원의 내부에 있다. 여기서의 residue는 $i/\sqrt{337}$이 되고 적분값은 $-2\pi/\sqrt{337}$.

3. $(1+\sin(\theta))/(3+\cos(\theta)) = (z^2+2z-1)/(z^2+6z+1)$이므로 $\int_C -i(z^2+2z-1)/[z(z^2+6z+1)]dz$가 구하는 적분이 된다. singular point $-3+\sqrt{8}$는 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i(5-4\sqrt{2})/(8-6\sqrt{2})$이고 0에서의 residue가 i이므로 $2\pi[(5-4\sqrt{2})/(8-6\sqrt{2})-1)$.

4. $\cos(\theta)/(3+\sin(\theta)) = (z+1/z)/(6+z-1/z) = (z^2+1)/(z^2+6z-1)$ $\int_C -i(z^2+1)/[z(z^2+6z-1)]dz$가 구하는 적분이 된다. singular point $-3+\sqrt{10}$은 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i$이고 0에서의 residue는 i이다. 적분값은 0.

5. $\cos(\theta)/(17-8\cos(\theta)) = (-1/2)(z+1/z)/(4z-17+4/z) = -(1/2)(z^2+1)/(4z^2-17z+4)$ $\int_C (i/2)(z^2+1)/[z(4z^2-17z+4)]dz$가 구하는 적분이 된다. 이므로 singular point 1/4가 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-17i/120$이고 0에서의 residue는 $-15i/120$이다. 즉, 적분값은 $8\pi/15$.

6. $5-3\sin(\theta) = (10z-3z^2-3)/(2z)$이므로 $1/(5-3\sin(\theta)) = -2z/(3z^2-10z-3)$이다. $\int_C 2i/(3z^2-10z-3)dz$가 구하는 적분이 된다. singular point $(5-\sqrt{34})/3$만이 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i/(2\sqrt{34})$. 즉, 적분은 $\pi/\sqrt{34}$.

7. 구하는 적분은 $(i/2)\int_C (z^2+1)/(6z^4-13z^2+6)dz$이다. 단위원 내부의 singularity는 $\pm\sqrt{2/3}$이다. 그리고 residue는 서로 부호가 반대이므로 적분값은 0이다.

8. 구하는 적분은 $\int_C i(2z^2+z+2)/[z(4z^2-17z^2+4)]dz$이다. 단위원 내부의 singularity는 1/4이다. residue는 $-19i/30$이므로 적분값은 $19\pi/15$이다.

9. $|z| = R$의 위쪽반원과 $[-R,R]$로 이루어진 닫힌 경로를 따라 시계반대방향으로의 선적분을 생각하자. $1/(1+z^2)^2$의 singularity 중에서 이 경로 내부에 있는 것은 i이고 거기에서의 residue는 $\lim_{z\to i} -2/(z+i)^3 = -i/4$이다. $R\to\infty$일 때, 반원에 대한 적분은 $|\int_0^\pi iRe^{i\theta}/(1+R^2e^{2i\theta})^2 d\theta| \le \int_0^\pi R/(1+R^2)^2 d\theta$은 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $2\pi i(-i/4) = \pi/2$.

10. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $\pm\sqrt{2}+\sqrt{2}i$이고 residue는 $(-1-i)/[24\sqrt{2}], (1-i)/[24\sqrt{2}]$이다. 같은 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $\pi/[6\sqrt{2}]$.

11. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $e^{n\pi i/4+\pi i/8}, n = 0,1,2,3$ 이다. residue는 $1/[8e^{n\pi i+\pi i/2}]$이므로 $-i/8, i/8, -i/8, i/8$가 되고 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 0.

12. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 i이다. 중복도가 3이므로 residue는 $-3i/16$가 된다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $3\pi/8$.

13. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $i, 2i$이고 residue는 $i/6, -i/3$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $\pi/3$.

14. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $1+2i$이고 residue는 $-i/64$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $\pi/32$.

15. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $i, 2i$이고 residue는 $-i/18, -11i/288$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $3\pi/16$.

16. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $i, 3i$이고 residue는 $-i/16, i/48$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $\pi/12$.

17. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 i이고 residue는 $-i\cos(si)/2$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R\to\infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $\pi\cos(si)$.

18. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $(-1+i\sqrt{3})/2$이고 residue는 $-\sin(-1+\sqrt{3}i)/\sqrt{3}$이다. 차수비교의 결과로 반원에

서의 적분은 $R \to \infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $2\pi\sin(-1+\sqrt{3}i)/\sqrt{3}$이다.

19. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 $(\pm1+i)/\sqrt{2}$이고 residue는 $(-1-i)\sin[3(1+i)/\sqrt{2}]/[4\sqrt{2}]$와 $(1-i)\sin[3(-1+i)/\sqrt{2}]/[4\sqrt{2}]$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R \to \infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 0이다.

20. 앞 문제에서와 같은 경로를 생각하면 이 경로 내에 있는 singular point는 i이고 residue는 $-i\cos(2i)/4+\sin(2i)/2$이다. 차수비교의 결과로 반원에서의 적분은 $R \to \infty$일 때 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $\pi(e^2-3e^{-2})/4$이다.

21. $0, i$에서의 residue는 각각 $i, -i$이다. 즉, $\pi ii - 2\pi i = \pi$.

22. $0, 2i$에서의 residue는 각각 $i/2, -i/2$이다. 즉, $(\pi ii - 2\pi i)/2 = \pi/2$.

23. $2, -1+\sqrt{3}i$에서의 residue는 각각 $1/6, -(1+i\sqrt{3})/12$이다. 즉, $\pi i1/6 - 2\pi i(1+i\sqrt{3})/12 = \pi\sqrt{3}/6$.

24. $-1, 1, i$에서의 residue는 각각 $1/4, -1/4, i/4$이다. 즉, $-\pi/2$.

25. CAS PROJ

26. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)i\sin(sx)dx$이다. 각각 실수부와 허수부를 취하면 된다. (b) $\int_C e^{-z^2+i2bz}dz$ 를 생각하자. $e^{-b^2}\int_C e^{-(z-i2b)^2}dz$로 표현을 바꾸면 그리고 변수 변환을 이용하면 적분하는 부분은 $\int_{C'} e^{-z^2}dz$이다. 준 조건에 의해 이 적분의 실수부분을 취하면 된다. (c) 함수들이 기함수이므로 적분값은 0이다.

Chapter 15. Review

1. 주어진 함수를 정해진 점에서 그 근방에 대해 수렴하는 유리급수로 전개하는 것이 Laurent series이다.

2. 앞에서 증명했다. 1절 22번문제 참조.

3. 등비급수를 이용하거나 그외의 하이퍼함수, 삼각함수, 지수-로그함수를 이용하는 방법들이 있다.

4. 전개하는 점 주위의 annulus에서 선택하여 수렴하는 Laurent series를 얻는다.

5. 음의 지수를 가진 급수의 부분이 principal part이다. 이는 그 점에서의 pole의 차수를 보여주며 적분에서 사용된다.

6. 그 점으로 근사할 때, 함수값이 상수로 수렴하지 않으면 singularity라 부른다. removable singularity, pole, essential singularity가 있다.

7. 준 점을 한바퀴도는 곡선이 내부에 다른 singularity를 포함하지 않을 때, 적분값을 $2\pi i$로 나눈 것이 residue이다. 이 residue를 이용하여 적분값을 구하기도 한다.

8. 함수값이 0이 되는 점이 zero이다.

9. 무한대를 한 점으로 보아 복소평면을 sphere에 대응시키는 관점이 expanded complex plane의 개념이다. 무한대에서의 analyticity는 sphere로 볼때 무한대(북극)을 포함하는 원 안에서의 미분 가능성 으로 정의된다.

10. 본문에 그림이 있다.

11. meromorphic function은 pole이외의 singularity가 없는 함수를 지칭한다. 복소평면 전체에서 analytic인 함수를 entire function이라 한다.

12. pp782-784를 참조

13. p784를 참조

14. 적분영역이 무한일때 그것을 특이적분이라 한다. 적당한 영역에 대해 그 영역을 키워나가며 원하는 적분을 계산한다. 준 적분 부분이외의 부분에 대한 적분이 0으로 가게 하는 것도 필수적인 부분이다.

15. C가 원점주위의 단위원일 때, $\int_C 1/z^m dz$의 값은 $m > 1$이면 0이다.

16. simple pole에서의 residue는 0이 아니다.

17. analytic이 아니면 Cauchy's integral theorem을 쓸 수 없다. 즉, 안된다.

18. Laurent series를 이용하면 두 함수 모두에 대해 residue를 구할 수 있다.

19. 다른 조각의 곡선을 붙여서 폐곡선으로 만들고 그 더해진 곡선에서의 적분값이 0으로 가도록하면 된다.

20. 실직선 상에서의 적분을 계산할 때, 실직선상에서 적분가능한 특이점이 발견되는 경우, 이 적분을 Cauchy principal value 라 한다.

21. 특이점은 $\pm 2i$이고 residue는 $1/2$. 적분값은 $2\pi i$.

22. 특이점은 3이고 residue는 3. 적분값은 $6\pi i$.

23. 특이점은 1이고 residue는 4. 적분값은 $8\pi i$.

24. 특이점은 $0, \pm 3$이고 residue는 $-1, -2, 3$. 적분값은 0.

25. $\int_0^1 t dt = 1/2$, $\int_0^1 i dt = i/2$, $\int_1^0 t(1+i)dt = -(1+i)/2$. 즉, 적분은 0.

26. 특이점은 $\pm 1/2$이고 residue는 $\sin(1/2)/8$. 적분값은 $\pi \sin(1/2)/4$.

27. 곡선 내부에 특이점이 없다. 적분값은 0.

28. $\int_1^0 i(1+ti)^3 e^{(1+ti)^4} dt$. 부정적분이 $1/4e^{(1+ti)^4}$ 이므로 $(e - e^{-4})/4$.

29. residue는 $\cos(\pi(n-1)/2)$이다. 즉, $2\pi i \cos(\pi(n-1)/2)$.

30. residue는 $\sin(\pi(n-1)/2)$이다. 즉, $2\pi i \sin(\pi(n-1)/2)$.

31. $\int_C z/|z|^2 dz = \int_C 1/\bar{z} dz = \int_0^{2\pi} -ie^{2i\theta} d\theta = 0$.

32. 0에서 residue 1을 가지므로 적분값은 $2\pi i$.

33. 특이점이 없으므로 0.

34. $3 + \cos(\theta) = (z^2 + 6z + 1)/(2z)$이므로 $\sin(\theta)/(3 + \cos(\theta)) = (z^2 - 1)/(z^2 + 6z + 1)$이다. $\int_C i(z^2 - 1)/[z(z^2 + 6z + 1)]dz$가 구하는 적분이 된다. singular point $0, -3 + \sqrt{8}$만이 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i, i$. 즉, 적분은 0.

35. $13 - 5\sin(\theta) = -(5z^2 - 26z + 5)/(2z)$이므로 $1/(13 - \sin(\theta)) = -2z/(5z^2 - 26z + 5)$이다. $\int_C 2i/(5z^2 - 26z + 5)dz$가 구하는 적분이 된다. singular point $1/5$만이 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i/12$. 즉, 적분은 $\pi/6$.

36. $34 - 16\sin(\theta) = -(16z^2 - 68z + 16)/(2z)$이므로 $\sin(\theta)/(34 - 16\sin(\theta)) = -(1/4)(z^2 - 1)/(4z^2 - 17z + 4)$이다. $\int_C i(1/4)(z^2 - 1)/[z(4z^2 - 17z + 4)]dz$가 구하는 적분이 된다. singular point $0, 1/4$만이 단위원 내부에 있다. 여기서의 residue는 $-i/16, -i/16$. 즉, 적분은 $\pi/4$.

37. $|z| = R$의 위쪽반원과 $[-R, R]$로 이루어진 닫힌 경로를 따라 시계반대방향으로의 선적분을 생각하자. $1/(1+z^2)^2$의 singularity 중에서 이 경로 내부에 있는 것은 i이고 거기에서의 residue는 0이다. $R \to \infty$일 때, 반원에 대한 적분은 $|\int_0^\pi iR^2 e^{2i\theta}/(1 + R^2 e^{2i\theta})^2 d\theta| \le \int_0^\pi R/(1 + R^2)^2 d\theta$은 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 0.

38. $|z| = R$의 위쪽반원과 $[-R, R]$로 이루어진 닫힌 경로를 따라 시계반대방향으로의 선적분을 생각하자. $1/(1 + 4z^2)$의 singularity 중에서 이 경로 내부에 있는 것은 $i/2$이고 거기에서의 residue는 $-i$이다. $R \to \infty$일 때, 반원에 대한 적분은 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 2π.

39. $|z| = R$의 위쪽반원과 $[-R, R]$로 이루어진 닫힌 경로를 따라 시계반대방향으로의 선적분을 생각하자. $1/(1 + 4z^4)$의 singularity 중에서 이 경로 내부에 있는 것은 $(\pm 1 + i)/2$이고 거기에서의 residue는 $(-1 - i)/2, (1 - i)/2$이다. $R \to \infty$일 때, 반원에 대한 적분은 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 2π.

40. $|z| = R$의 위쪽반원과 $[-R, R]$로 이루어진 닫힌 경로를 따라 시계반대방향으로의 선적분을 생각하자. $\sin z/(z^2 + z + 1)$의 singularity 중에서 이 경로 내부에 있는 것은 $(-1 + i\sqrt{3})/2$이고 거기에서의 residue는 $-i \sin[(-1 + i\sqrt{3})/2]/sqrt3$이다. $R \to \infty$일 때, 반원에 대한 적분은 0으로 가고 실수축위의 적분은 원하는 적분으로 간다. residue theorem을 쓰면 $2\pi \sin[(-1 + i\sqrt{3})/2]/sqrt3$.

CHAPTER 16

Complex Analysis Applied to Potential Theory

Laplace's equation $\nabla^2\Phi = 0$ is one of the most important partial differential equations in engineering mathematics, because it occurs in connection with gravitational fields (Sec. 8.9), electrostatic fields (Sec. 11.11), steady-state heat conduction (Secs. 9.8, 11.5), incompressible fluid flow (Sec. 16.4), and other areas. (These references are just for orientation, not as a prerequisite for this chapter.) The theory of the solutions of this equation is called **potential theory,** and solutions whose second partial derivatives are continuous are called **harmonic functions.**

If in a problem the potential Φ in a region of space depends only on two of the three Cartesian coordinates, say, on x and y, we call it a **two-dimensional potential problem.** Then Laplace's equation becomes

$$\nabla^2\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0. \tag{1}$$

Any such problem can be solved by complex analysis because solutions of (1) are closely related to complex analytic functions (as we know from Sec. 12.4).[1] This transition from real to complex also has the advantage that by the **"complex potential"** $F = \Phi + i\Psi$ we can simultaneously handle equipotential lines $\Phi = const$ and their orthogonal trajectories (the lines of force or flow $\Psi = const$).

Furthermore, in solving the **Dirichlet problem** of finding a potential with given boundary values we may often use **conformal mapping** (Sec. 16.2). This concerns electrostatics (Secs. 16.1, 16.2), heat conduction (Sec. 16.3), and hydrodynamics (Sec. 16.4).

Poisson's integral formula for potentials in disks and some general properties of potentials will be discussed in Secs. 16.5 and 16.6.

Prerequisites for this chapter: Chaps. 12, 13.
References: Appendix 1, Part D.
Answers to problems: Appendix 2.

[1]No such close relation exists in the three-dimensional case.

On notation. We write Φ and later $\Phi + i\Psi$ since u and $u + iv$ will be needed in conformal mapping from Sec. 16.2 on.

16.1. Electrostatic fields

1. $\Phi(x) = 20x + 300$인 평행선들로 나타난다.

2. $\Phi(z) = 20x + 300 + i(20y + b)$.

3. $110(y - x)$. $\Phi(z) = 110(y - x) - 110i[(y - x) + b]$.

4. $100(y + 1/2x)$. $\Phi(z) = 100(y + 1/2x) + 100i[(y + 1/2x) + b]$.

5. $[100/\ln(5)]\ln(r)$.

6. $[220/\ln(2/5)]\ln(r) + 110 - [220/\ln(2/5)]\ln(2)$.

7. $[10000/\ln(10)]\ln(r)$.

8. $[20/\ln(2)]\ln(r) + 10 - [20/\ln(2)]\ln(2)$. 로그는 위로 볼록인(concave)함수이므로 약간 많아야 된다. $r = 3$에서 약 21.9volt이다.

9. $K[\ln|z + a| + \ln|z - a|]$.

10. 다른 source의 영향을 거의 받지 않기 때문에 물리적으로도 타당하다.

11. $K\ln|(z-c)/(z+c)| = C$라고 하면 $|(z-c)/(z+c)| = e^{C/K}$이다. $|z - c| : |z + c| = e^{C/K} : 1$이므로 이는 아폴로니우스의 원이다.

12. $-50xy + 110$.

13. $F(z) = \cos^{-1} z = u + iv$로 놓으면 $z = \cos(u + iv)$이다. $(x + iy =)z = \cos(u)\cos(iv) - \sin(u)\sin(iv) = \cos(u)\cosh(v) + i\sin(u)\sinh(v)$ 이므로 $\cosh(v) = x/\cos(u)$, $\sinh(v) = y/\sinh(u)$가 된다. $u = const$로 두면 $x^2/\cos^2(u) - y^2/\sin^2(u) = 1$이므로 쌍곡선을 표시한다. $\cos(u) = x/\cosh(v)$, $\sin(u) = y/\sinh(v)$로 보고 $v = const$로 두면 타원을 표시한다.

14. $F(z) = \cosh^{-1} z = u + iv$로 놓으면 $z = \cosh(u + iv)$이다. $(x + iy =)z = \cosh(u)\cos(v) + i\sinh(u)\sin(v)$ 이므로 $\cosh(u) = x/\cos(v)$, $\sinh(u) = y/\sin(v)$가 된다. $u = const$로 두면 $x^2/\cos^2(v) - y^2/\sin^2(v) = 1$이므로 쌍곡선을 표시한다. $\cos(v) = x/\cosh(u)$, $\sin(v) = y/\sinh(u)$로 보고 $v = const$로 두면 타원을 표시한다.

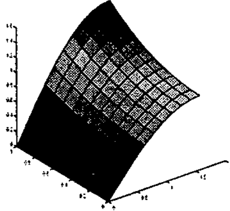
15. $x^3 - 3xy^2 = 1$이 z^3의 실수부이므로 $220z^3$이다.

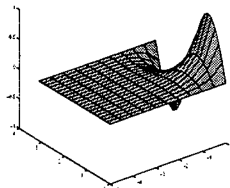
16. CAS PROJ

16.2. Use of Conformal Mapping

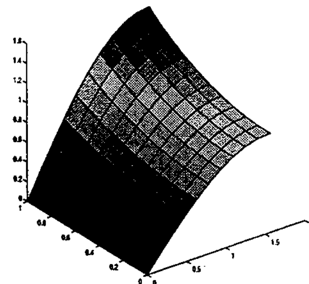
1. 전문적인 복소해석학의 교재참조

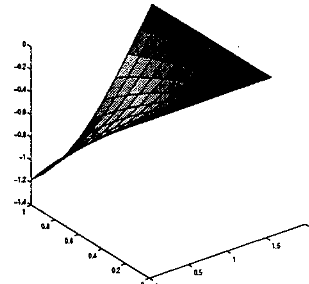
2. $u = e^x\cos(y)$, $v = e^x\sin(y)$이므로 $\Phi = e^{2x}\sin 2y$이다. 이의 harmonic conjugate는 $e^{2x}\cos 2y$이고 역시 harmonic이다. D는 2사분면의 strip이고 D^*는 $(0, 1] \times [-1, 1]$이며 함수의 실수부, 허수부는 각각 다음과 같이 된다.





3. $\Phi = \sin^2(x)\cosh^2(y) - \cosh^2(x)\sinh^2(y)$. D는 사각형이고 D^*는 $[0, 1] \times [0, (e - e^{-1})/2]$ 이며 함수의 실수부, 허수부는 각각 다음과 같이 된다.





4. $\Phi = \sin(2x)\cosh(y)\sinh(y)$. Φ^* =const는 (u, v)에서 쌍곡선으로 나타난다. 그리고 z평면에서는 $\sin(2x)\sinh(2y) = C$로 나타난다.

5. $-i/2U_2z^2$.

6. 경계가 경계로 가고 내부가 내부로 간다는 것을 알 수 있다. 역함수 또한 같은 영역에서 정의되므로 열린함수 정리에 의하여 일대일 연속함수이다.

7. $|z| = 1(U_1 = 0)$와 $|z-c| = c(U_2 = 110)$에 대해 $w = (z-b)/(bz-1)$을 이용하여 $0 \to r_0$, $-2c \to -r_0$을 이용하면 $b = r_0$, $r_0 = (1-\sqrt{1-4c^2})/2c$를 얻는다. 즉, $w = (z-r_0)/(r_0z-1)$가 된다. 포텐셜은 $\Phi^* = 110/\ln(r_0)\ln|w|$가 되고 $\Phi = 110/\ln(r_0)\ln|(z-r_0)/(r_0z-1)|$.

8. $12/\pi\arg(z)$.

9. $10^5/\pi(\pi - \arg(z-1))$.

10. $w = (1+it)/(1-it) = (1-t^2+2it)/(1+t^2)$. $(\mathrm{Re}w)^2 + (\mathrm{Im}w)^2 = [(1-t^2)^2+4t^2]/(1+t^2)^2 = 1$.

11. $w = (z-i/2)/(-i/2w-1)$. $[(3+4i)/5 - i/2]/[-i/2(3+4i)/5-1] = -1$. $[(-3+4i)/5 - i/2]/[-i/2(-3+4i)/5-1] = 1$.

12. $z = Z^2$. $\Phi(X,Y) = \mathrm{Re}F(Z^2)$. Z에서 z로 가는 변환은 단위원의 1사분면을 단위원의 위쪽반으로 보낸다. 양의 y-축은 음의 x-로 간다.

16.3. Heat Problems

1. $T = 20/dy$.

2. $T = 15/2(y-x)+10$, $T(z) = -15/2z+15/2iz+10$.

3. $T = a\theta + b$, 두 조건을 대입하고 a, b에 대해서 풀면, $T = -280/\pi\arg(z) + 100$를 얻는다.

4. 앞문제에서와 마찬가지로 하면, $T = 105/\pi\arg(z) + 10$.

5. $T^* = 100 + 400/\pi\sin^{-1}(z)$.

6. 열의 흐름은 Figure 373의 등위선에 수직한 방향으로 온도가 높은 곳에서 낮은 곳으로 흐른다.

7. CAS PROJ

8. (a) $(T_2 - T_1)/\pi\arg(z-a) + T_1$. (b) $T_0/2(\arg[(z-1)/(z+1)]$. (c) 위쪽 오른편 x-축$(x > a)$에서 T_1, 아래쪽 오른편 x-축$(x > a)$에서 T_2로 나타난다.

9. $T_0/2(\arg[(\cosh^{-1}(z) - \cosh(i\pi))/(\cosh^{-1}(z)+1)]$.

10. $T = 400/\pi\arg(z)$.

11. $T = 120/\pi\arg(z)$.

12. z^2에 대입하면, 8.(b).

13. $T = 2(T_1 - T_0)/\pi\arg(z-a) + T_0$.

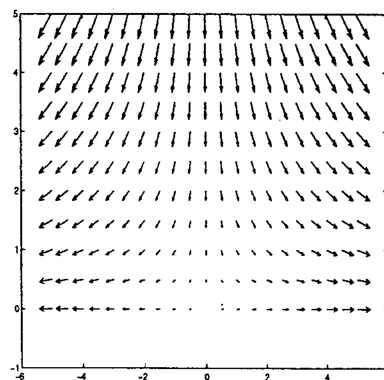
14. $T = 200/\pi\arg(z)$.

16.4. Fluid Flow

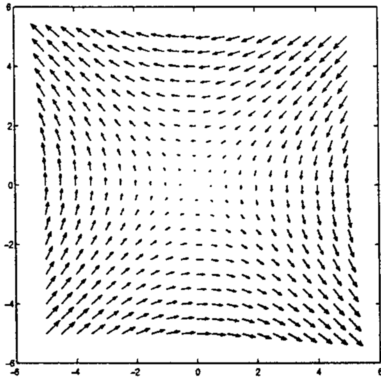
1. $V = \overline{F'} = K(>0)$이므로 이는 uniform하게 오른편으로 진행하는 flow를 나타낸다. velocity vector는 $(K, 0)$, the stream lines은 x-축에 평행한 모든 선이고 equi-potential line은 y-축에 평행한 모든 선이다.

2. velocity vector가 $(1,1)$로 주어지므로 $V = 1+i$이고 $\overline{V} = F'(z)$에서 $F(z) = z - iz$이다.

3. 만약 flow의 방향이 그 반대로 주어진다면 y축을 만나는 flow의 흐름으로 볼 수도 있다. 현재의 상황에 있어서는 위에서 내려오는 flow가 x-축을 만나서 양의 x-축 방향으로 휘어져 나가는 harmonic potential 함수를 표현하고 있다.

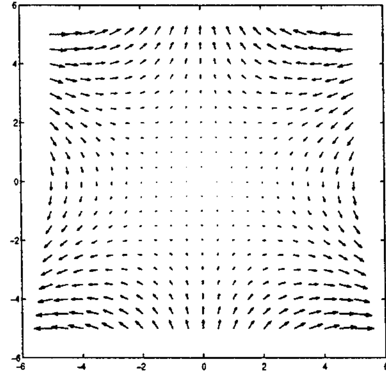


4. $\overline{V} = 2iz$이므로 $V = -2y-2ix = -2(y+ix) = \overline{2iz}$이다. 이는 그 점에서의 velocity가 그 점과 원점을 잇는 벡터의 시계방향으로 $\pi/2$만큼 회전되고 2배된 후에 conjugate(y축 대칭)된 것임을 의미한다.



5. $F(z) = z^3$.

6. $F(z) = i(x^3 - 3xy^2) - (3x^2y - y^3)$. $F'(z) = 3iz^2$. $V = -3i(x^2 - y^2 - 2ixy) = -6xy - 3i(x^2 - y^2)$. V가 x축에 평행하려면 허수부분이 0이어야 한다. 즉, $x = \pm y$.

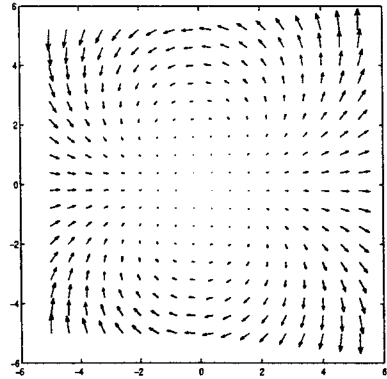


7. $F(z) = z^2$.

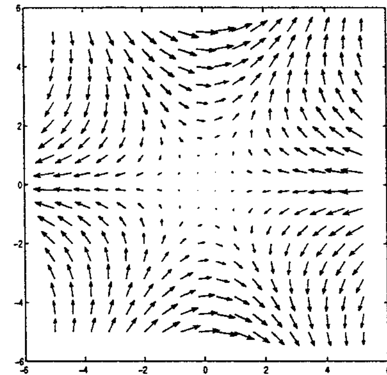
8. 전체적으로 각 $-\alpha$만큼의 회전이 일어난다.

9. $F(z) = \Phi + i\Psi = z + r_0^2/z$.

10. $F(z) = z^2 + 1/z^2 = x^2 - y^2 + (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2 + 2xyi - 2xyi/(x^2 + y^2)^2$.



11. $V = -\overline{1/z^2} = (y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2 + 2xyi/(x^2 + y^2)^2$.



12. $F(z) = \cosh^{-1}(z)$. 1절 14번 참조.

13. 1절 13번 참조.

14. (a) $V = \overline{F'} = c/(2\pi)z/|z|^2$. $V_1 = c/(2\pi)x/(x^2 + y^2)$, $V_2 = c/(2\pi)y/(x^2 + y^2)$이므로 $V_1^2 + V_2^2 = (c/(2\pi))^2$이고 $V = c/(2\pi|z|^2)z$이다. 즉, $c > 0$이면 radially outward이고 $c < 0$이면 radially inward이다. (b) (a)와 비교하면 $V = iCz$꼴이므로 (a)에서의 V에 $\pi/2$만큼의 회전을 적용한 형태이다. 시계 반대방향의 circulating streamline을 표현한다. (c) F_1과 F_2에 대해서 $W = \overline{(F_1 + F_2)'} = \overline{F_1'} + \overline{F_2'} = W_1 + W_2$. (d) $F(z) = 1/(2\pi i)\ln[(z + a)/(z - a)]$. (e) $V = r\cos\theta - 1/r^2\cos(2\theta) - K/(2\pi)\sin\theta + i(K/(2\pi)1/r\cos\theta - r\sin\theta - 1/r^2\sin(2\theta)$. 속력이 0이 된다는 것은 실수부 허수부가 모두 0이라는 말이므로 이 조건에 대해서 풀면 된다.

16.5. Poisson's Integral Formula

1. $\Phi(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n[{}_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta))]$ 이고 $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}\Phi(1,\alpha)d\alpha = 0$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\sin(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\sin(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha = 0$는 $n = 1$일 때에만 1. 이므로 $\Phi(r,\theta) = r\sin(\theta)$.

2. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}(2-\cos(\alpha))d\alpha = 2$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos(\alpha))\cos(n\alpha)d\alpha$는 $n = 1$일 때에만 -1. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos(\alpha))\sin(n\alpha)d\alpha = 0$ 이므로 $\Phi(r,\theta) = 2 - r\cos\theta$.

3. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}\cos^2(\alpha)d\alpha = 1/2$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\cos^2(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha$는 $n = 2$일 때에만 1/2. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\cos^2(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha = 0$. 이므로 $\Phi(r,\theta) = 1/2 + r^2/2\cos(2\theta)$.

4. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}[\cos(4\alpha) - \cos(2\alpha)]d\alpha = 0$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}[\cos(4\alpha)-\cos(2\alpha)]\cos(n\alpha)d\alpha$ 는 $n = 2$일 때 -1. $n = 4$일 때 1. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}[\cos(4\alpha)-\cos(2\alpha)]\sin(n\alpha)d\alpha = 0$ 이므로 $\Phi(r,\theta) = -r^2\cos(2\theta) + r^4\cos(4\theta)$.

5. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}[\cos^4(\alpha)]d\alpha = 0$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\sin(5\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\sin(5\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha = 0$. 는 $n = 5$일 때 1. $\Phi(r,\theta) = r^5\sin(5\theta)$.

6. $\cos(4\theta) = 3/8 + 1/2\cos(2\theta) + 1/8\cos(4\theta)$이므로 $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}\cos(4\alpha)d\alpha = 3/8$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}[3/8+1/2\cos(2\alpha)+1/8\cos(4\alpha)]\cos(n\alpha)d\alpha$ 는 $n = 2$일 때, 1/2. $n = 4$일 때, 1/8. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}[3/8 + 1/2\cos(2\alpha) + 1/8\cos(4\alpha)]\sin(n\alpha)d\alpha = 0$. $\Phi(r,\theta) = 3/8 + r^2/2\cos(2\theta) + r^4/8\cos(4\theta)$.

7. $4\sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - \sin(3\theta)$. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}[\cos^4(\alpha)]d\alpha = 0$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}4\sin^3(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}4\sin^3(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha$는 $n = 1$일 때, 3. $n = 3$일 때, -1. $\Phi(r,\theta) = 3r\sin(\theta) - r^3\sin(3\theta)$.

8. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}\alpha d\alpha = 2\pi$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\alpha\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\alpha\sin(n\alpha)d\alpha = -2/n$ $\Phi(r,\theta) = 2/\pi - \sum_{n=1}^{\infty}2r^n/n\sin(n\theta)$.

9. $a_0 = 1/(2\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\alpha d\alpha = 2\pi$. $a_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\alpha\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_0^{2\pi}\alpha\sin(n\alpha)d\alpha = -2/n(-1)^n$ $\Phi(r,\theta) = 2/\pi - \sum_{n=1}^{\infty}2(-r)^n/n\sin(n\theta)$.

10. $a_0 = 1/(2\pi)\int_0^{\pi}d\alpha = 1/2$. $a_n = 1/\pi\int_0^{\pi}\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_0^{\pi}\sin(n\alpha)d\alpha = [1 + (-1)^{n+1}]/(n\pi)$ $\Phi(r,\theta) = 1/2 + \sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin(n\theta)[1+(-1)^{n+1}]/(n\pi)$.

11. $a_0 = 1/(2\pi)\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}F(\alpha)d\alpha = 0$. $a_n = 1/\pi\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}F(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha = 0$. $b_n = 1/\pi\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}F(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha = 4\sin(n\pi/2)/(n^2\pi)$. $\Phi(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}r^n 4\sin(n\pi/2)/(n^2\pi)\sin(n\theta)$.

12. 통분하고 분자만을 보면 $z^*(\bar{z} - \bar{z}^*) - \bar{z}(z^* - z) = z^*\bar{z} - z^*\bar{z}^* - \bar{z}z^* + \bar{z}z = \bar{z}z - z^*\bar{z}^*$.

13. $r\sin(\theta)$과 $r^3\sin(3\theta)$에 대해서 각각의 harmonic conjugate는 $-r\cos(th)$, $-r^3\cos(3\theta)$이다. $r\sin(\theta) - ir\cos(th)$와 $r^3\sin(3\theta) - ir^3\cos(3\theta)$가 analytic 이므로 조화함수이다.

14. (a) (5)에 $r = 0$을 대입하면 된다. (b) $\Delta u = \partial^2u/\partial r^2 + 1/r\partial u/\partial r + 1/r^2\partial^2u/\partial\theta^2$ 에 각 항을 대입하면 모두 harmonic임을 알 수 있다. (c) $ru_r = v_\theta$에서 $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty}(r/R)^n(a_n\sin(n\theta) - b_n\cos(n\theta))$. (d) (7)과 (C)를 $F = \Phi + i\Psi$에 대입하면 된다.

15. CAS PROJ

16.6. Genaral Properties of Harmonic Functions

1. $\int_0^{2\pi}(e^{i\theta} - 1/2)^2)e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta$. 로 1/2를 중심으로 한 반경 1인 원을 잡는다. $\int_0^{2\pi}(e^{2i\theta} - e^{i\theta} + 1/4)id\theta = 1/2 - 1 + i - 1/2 + 1 = i2\pi/4$.

2. 0을 중심으로 한 반경 1인 원을 잡는다. $\int_0^{2\pi}5(e^{i\theta})^4e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = 0$.

3. 1을 중심으로 한 반경 1인 원을 잡는다. $\int_0^{2\pi}(3 + e^{i\theta})^2id\theta = 18\pi i$.

4. $\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi$. analytic이 아니므로 정리1에 위배되지 않는다.

5. $r = 0$이고 $R = r_0$으로 놓으면 된다.

6. $1 = \Phi(1,0) = \int_0^{2\pi}\Phi(1+\cos\alpha, \sin\alpha)d\alpha = \int_0^{2\pi}[2\cos\alpha + 2\cos\alpha]d\alpha = 1$.

7. $-8 = \Phi(3,-3) = \int_0^{2\pi}\Phi(3+\cos\alpha, -3+\sin\alpha)d\alpha = -8$.

8. $2 = \Phi(1,1) = \int_0^{2\pi} \Phi(1+\cos\alpha, 1+\sin\alpha)d\alpha$.

9. CAS PROJ

10. (a) (i) max는 $(4+7i)^2$이고 min은 $(1+3i)^2$이므로 모두 경계에 있다. (ii) max는 실수부분이 최대일때,min은 실수부분이 최소일때 나온다. 즉, 경계에서만 가능하다. (b) 정리3은 조화함수에 대한 것이므로 위배되지 않는다. (c) $\sin(\pi/2+iy) = \cos(iy) = (e^y + e^{-y})/2$이므로 y가 커질수록 그 값도 커진다. (d) $|F|$는 D전체에서 그 최대값이 c이다. 만일 F의 근이 내부에 없다면 $|F|$는 D 내부에서 값이 상수 c이다. $u^2+v^2=0$에서 Cauchy-Riemann등식에 적용하면 $u = Cv$가 되고 실수부 허수부가 모두 상수이다.

11. 산술-기하평균에 의하여 $-8 \le 2\Phi \le 8$이다. 즉, ±4가 최대, 최소이고 이 값은 경계$\pm(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$에서 나온다.

12. 최대는 $(b, \pi/2)$에서 최소는 $(a, -3\pi/2)$에서 나온다.

13. $\cos(x+iy) = \cos(x)\cosh(y) + i\sin(x)\sinh(y)$. 이 절대값의 제곱은 $(\cos(x)\cosh(y))^2 + (\sin(x)\sinh(y))^2$. 이다. $\cosh(2y) + 1/2(\cos^(x) - \sin^2(x))$이므로 $y = \pm1$이고 $x = 0$일 때, 최대값, $y = 0$, $x = pi/2$일 때, 최소값을 갖는다.

14. $w = 1$일 때, 최대값을 갖는다.

15. 위쪽 반원을 D로 놓으면 f에 의해 D^*로 옮겨진다.

16. 단위원에 대해 $f(z) = z$를 생각하면 된다. 이것이 반례이다.

Chapter 16. Review

1. 조화함수는 라플라스 등식을 만족한다. 두번 미분이 연속인 함수이고 이 등식을 만족하는 함수들은 조화함수에 대한 복소이론을 이용하여 어느 정도 구할 수 있다.

2. linear fractional transformation과 그 이외의 analytic함수, 조화 함수들을 이용할 수 있고 또 이들 함수에 적용되는 정리들 이 이 potential문제를 푸는 해법들을 제시한다.

3. 복소수가 2차원이므로 불가능하다.

4. 열역학, 정전기적 역학, 유체역학의 정적상태에 대한 방정식들 모두 라플라스 등식이 된다.

5. 라플라스 등식을 만족하는 함수가 조화함수이며 준 조화 함수를 실수부분으로 갖는 analytic함수의 허수부분이 harmonic conjugate이다.

6. 822페이지부터 824페이지까지의 본문 참조.

7. 예를 들어 등위선은 온도가 같은 선을 의미하고 그에 수직인 선은 열의 흐르는 방향을 의미한다. 상황에 따라 이 둘중 어느 하나에 더 큰 비중이 주어지기도 한다.

8. 지수, 로그, 삼각함수등 이 part의 처음에 도입된 모든 함수가 중요하다.

9. 주어진 물리적 속도등의 filed가 주어진 상황에 대한 적분을 실행하고자 할 때, harmonic(analytic)해에 대한 적분이 간편해진다.

10. 이곳에서의 potential theory는 실제로 stable solution에 대한 것이다. 즉, 구체적으로 유체이냐, 열 흐름이냐는 내용적으로 큰 차이를 보이지 않는다.

11. 경계값을 정하고 내부에서의 potential을 구하는 것을 Dirichlet problem이라 한다.

12. steady-state-heat flow는 정해진 상황에 대해 안정적인 상태가 구해지고 이 상태가 준 외부적 조건에 대해 변하지 않는 순간의 flow를 의미한다.

13. 다루기 힘든 영역에서의 potential을 구하고자 할 때에 이 영역을 보다 다루기 쉬운 영역으로 transform시켜서 그 potential을 구하고 역변환 시키는 방식을 택한다. 여기에 conformal mapping이 개입된다.

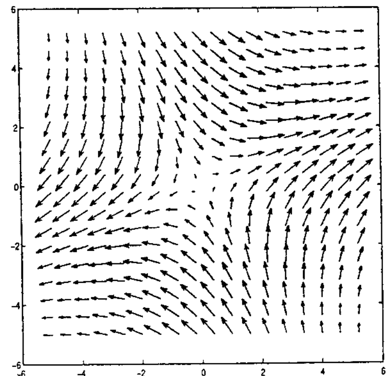
14. 어떤 경계의 부분에서는 온도를 정해 놓고(Cauchy boundary condition) 또 다른 경계의 부분에서는 insulate(Neumann boundary condition)시키는, 상황이 발생할 때 이를 mixed boundary value problem이라 한다.

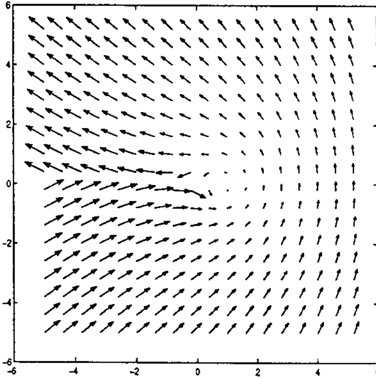
15. maximum principle, uniqueness for Laplace equation.

16. $10(y-x)$, $-10z - 10iz$.

17. $900/\ln(10)\ln r + 100$. $900/\ln(10) ln(z) + 100$.

18. 아랫 그림에서 화살표를 이으면 equi-potential line이 나온다.





19.

20. conformal mapping에 대해 harmonic property는 보존된다. $\Phi = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$. $f = e^{x^2-y^2}$, $g = \sin 2xy$, $h = \cos(2xy)$라 하자. $\Phi_x = 2xfg + 2yfh$이고 $\Phi_{xx} = 2fg + 4x^2fg + 4xyfh - 4y^2fg$가 된다. $\Phi_y = -2yfg + 2xfh$이고 $\Phi_{yy} = -2fg - 4x^2fg - 4xyfh + 4y^2fg$이고 $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$.

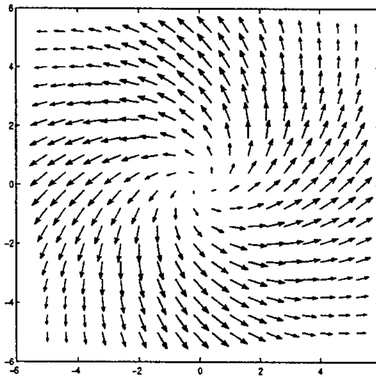
21. $100 - 200/\pi arg(z)$.

22. x축을 상온으로 하고 y축에 0도의 물을 놓았다고 해석하면 된다.

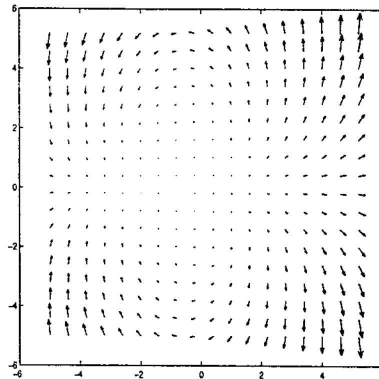
23. $20 - 40/\pi arg(z-1)$.

24. $a\ln r + b$에서 $a\ln 10 + b = 20$, $a\ln 5 + b = 30$이므로 $a = -10/\ln 2$, $b = 30 - 10\ln 5/\ln 2$. $-10/\ln 2\ln 2 + 30 - 10\ln 5/\ln 2 = 30 - 10[\ln 10/\ln 2]$.

25. $15/2(y-x) + 5$, $-15i/2z - 15/2z + 5$.

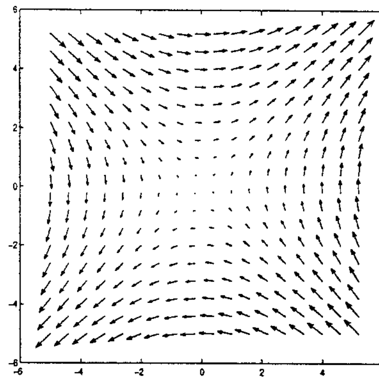


26.



27.

28. $V = \overline{z} + 1$.



29.

30. p814의 예제 2에 의해 $2z + 1/(2z)$로 놓으면 된다.

31. $K\ln z$. 원점을 지나는 직선을 따라 밖으로 나가는 것이 stream line이다.

32. $w = (1+iz)/(1-iz)$로 놓으면 p805의 Fig 372와 같은 형태가 된다. 단 양의 y에서 100이고 음의 y에서 0이다. $100/\pi arg(w) + 50$이 potential이고 complex potential은 $-100i/\pi \ln[(1+iz)(1-iz)] + 50$.

33. $w = (1+z)/(1-z)$로 놓으면 $20/\pi arg(w) + 10$에 대해서 $-20i/\pi \ln[(1+z)/(1-z)] + 10$이다.

34. $\overline{V} = 2z - 1/z^3$에서 $\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}i$가 stagnation point.

35. $a_n = \int_{-\pi}^{0} -\sin(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi}\sin(n\theta)d\theta = 2/n(1-(-1)^n)$. $b_n = \int_{-\pi}^{0} -\cos(n\theta)d\theta + \int_0^{\pi}\cos(n\theta)d\theta = 0$.

CHAPTER 17

Numerical Methods in General

Numerical methods are methods for solving problems **numerically** (that is, in terms of numbers) on a **computer** or **calculator** (or in older times by hand). The computer has become very important in engineering work. It provides access to problems so large that they were out of reach in precomputer times. Much computing today is *"real-time"*; it is done almost simultaneously with the process of generating data, for instance, in controlling ongoing chemical processes or guiding airplanes. Issues of speed, storage demand, and timing of portions of long programs then become very crucial.

Computers have changed, almost revolutionized, numerical methods—the field as a whole as well as many individual methods—and that development is continuing. Much research work is going on in creating new methods, adapting existing methods to new generations of computers, improving methods—in large-scale work even small improvements bring large savings in time or storage space—and investigating stability and accuracy of methods.

The purpose of this chapter is twofold. First, for the most important practical tasks, including solution of equations, interpolation, integration, and differentiation, the student should become familiar with the most basic (but not too complicated) numerical solution methods.[2] Such methods are needed because for many problems there is no solution formula (think of a complicated integral or of the roots of a polynomial of high degree) or in other cases a solution formula may be practically useless.

Second, the student should learn to understand some basic ideas and concepts that are important throughout the field, such as the idea of an algorithm, rounding errors, error estimation in general, ill-conditioning, order of convergence, and stability.

In the first section we explain some concepts that are basic in numerical work; this includes remarks on computing. Each of the other sections of the chapter is devoted to methods for one of the specific tasks already mentioned. These tasks are important throughout applied mathematics, regardless of the particular field of application.

Prerequisite for this chapter: Elementary calculus.
References: Appendix 1, Part E.
Answers to problems: Appendix 2.

[2] This will be continued with those for numerical linear algebra and differential equations in Chaps. 18 and 19.

17.1. Introduction

1. 0.2349E2, -0.3029E3, 0.5275E-3, -0.2570E5

2. -0.89217E2, 0.50000E6, -0.22137E-2

3. in 5S : $\frac{0.81534}{35.724-35.596} = 6.3698$,
in 4S : $\frac{0.8153}{35.72-35.60} = 6.794$,
in 3S : $\frac{0.815}{35.7-35.6} = 8.15$,
in 2S : $\frac{0.82}{35-35} = impossible$,

4. in 5S : $\frac{0.12345}{10.243-10.245} = -61.725$,
in 4S : $\frac{0.1235}{10.24-10.25} = -12.35$,
in 3S : $\frac{0.124}{10.2-10.3} = -1.24$,
in 2S : $\frac{0.12}{10-10} = impossible$,

5. in 5S, $a^2 = 1276.2$, $b^2 = 1267.1$, 따라서
$0.81534\frac{35.724+35.596}{1276.2-1267.1} = 6.3901$,
in 4S, $0.8153\frac{35.72+35.60}{1276-1267} = 6.461$,
in 3S, $0.815\frac{35.7+35.6}{1280-1270} = 5.81$,
in 2S, $0.815\frac{36+36}{1300-1300} = impossible$
비교해보면 위의 문제(3)보다 값의 변화의 차가 작다.

6. (6)의 방법으로 근을 구해보면
$\sqrt{30^2-4} = 29.9333$, $30 + 29.9333 = 59.9333$, $30 - 29.9333 = 0.0667000$,
따라서 x_1=29.9667, x_2=0.0335000
(7)의 방법으로 근을 구하면 x_1=29.9333, x_2=0.0334076이 되어 값의 차이가 생긴다.

7. 4S : (6)의 방법으로 근을 구해보면
$\sqrt{30^2-4} = 29.93$, 30 + 29.93=59.93, 30 − 29.93=0.07000,
따라서 x_1=29.97, x_2=0.03500
(7)의 방법으로 근을 구하면 x_1=29.97, x_2=0.03337.
2S : (6)의 방법으로 근을 구해보면
$\sqrt{30^2-4} = 30$, 30 + 30=60, 30 − 30=0.0,
따라서 x_1=30, x_2=0.0
(7)의 방법으로 근을 구하면 x_1=30, x_2=0.033.

8. 5S : (6)의 방법으로 근을 구해보면
$\sqrt{100^2-8} = 99.960$, −100 + 99.960=-0.04, −100 − 99.960=-199.96,
따라서 x_1=-0.02, x_2=-99.98
(7)의 방법으로 근을 구하면 x_2의 값이 크므로,x_2=-99.98, x_2=-0.0200.

9. $\sqrt{9+x^2} - 3$은 $|x|$가 작으면 0에 가까우므로, 먼저, $\sqrt{9+x^2}+3$을 곱한 다음 $\sqrt{9+x^2}+3$으로 나눈다.

10. $\cos a - \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})cos(\frac{a-b}{2})$이므로 $a-b$가 아주 작을때, 부록에서 Series 전개를 이용하면 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots$ 이므로 $\cos(\frac{a-b}{2})$를 $1 - \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^4}{4}$으로 계산하면 된다.

11. a, b의 값의 차가 작을 때, $\frac{a}{b}$의 비는 1에 가까운 수 이므로 $\log a - \log b$대신 $\log\frac{a}{b}$, e^{a-b}대신 $\frac{e^a}{e^b}$를 사용한다.

12. $\frac{22}{7} = 3.14285714285714$
$\frac{355}{113} = 3.14159292035398$.
따라서 유효숫자 3자리로 보아 오차의 차이는 없다.

13. 0.3141592654E1

14. 65.43=0.6543E2이고, 17.0591 = 0.170591E2 이므로 4S로 계산하면 0.6543E2 + 0.1706E2 = 0.8249E2 따라서 값은 [0.82485,0.82494]에 있다.

15. (0.1+1)-1=0 그러나 0.1+(1-1)=0.1, 작은 부분부터 계산한다.

16. 8S로 생각하면 $0.94999999E1 \le x \le 0.10499999E2$, $0.19499999E2 \le y \le 0.20499999E2$, $0.29499999E2 \le z \le 0.30499999E2$ 이고 표면적 $S = 2(xy + yz + zx)$이므로 $0.10407499E4 \le x \le 0.11607498E4$.

17. first add and then round

18. the error ϵ of the sum ,
$|\epsilon| == |x+y-(\tilde{x}+\tilde{y})| = |x-\tilde{x}+y-\tilde{y}| \le |\epsilon_1+\epsilon_2| \le |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \le \beta_1 + \beta_2$

19. 부록에서 $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots$임을 이용하여,
$\frac{x}{y} = \frac{\tilde{x}+\epsilon_1}{\tilde{y}+\epsilon_2} = \frac{\tilde{x}+\epsilon_1}{\tilde{y}}\frac{1}{1+\frac{\epsilon_2}{\tilde{y}}} = \frac{\tilde{x}+\epsilon_1}{\tilde{y}}\Big(1 - \frac{\epsilon_2}{\tilde{y}} + \frac{\epsilon_2^2}{\tilde{y}^2} + cdots\Big) \approx \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} + \frac{\epsilon_1}{\tilde{y}} - \frac{\epsilon_2}{\tilde{y}} \cdot \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$, 따라서,
the relative error ϵ_r of $\frac{x}{y}$, $\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$,
$|\epsilon_r| = \left|\frac{\frac{x}{y} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}}{\frac{x}{y}}\right| \approx= \left|\frac{\epsilon_1}{x} - \frac{\epsilon_2}{\tilde{y}}\right| \le |\epsilon_{r1}| + |\epsilon_{r2}| \le \beta_{r1} + \beta_{r2}$

20. $x_2 = \frac{2}{x_1}$이고, 2가 exact value이므로 정리 1b에 의하여 $\epsilon_r(x_2)| = |\epsilon_r(x_1)|$.따라서 x_1을 4S로 round하기때문에 $|\epsilon(x_1)| \le 0.005$. 그러므로 $|\epsilon_r(x_1)| \le \frac{0.005}{39.95}$ 이로부터,
$|\epsilon(x_2)| = |\epsilon_r(x_2)x_2| = |\epsilon_r(x_1)x_2| \le \frac{0.05}{39.95} \cdots 0.0506 < 0.00001$

21. two-decimal table

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0	0.000	7	0.4375	14	0.875
1	0.0625	8	0.5	15	0.9375
2	0.125	9	0.5625	16	1.
3	0.1875	10	0.625	17	1.0625
4	0.25	11	0.6875	18	1.125
5	0.3125	12	0.75	19	1.1875
6	0.375	13	0.8125	20	1.25

22. $3.94^3 = 61.1630$, $7.5 \times 3.94^2 = 116.4270$, $11.2 \times 3.94 = 44.128$ 따라서,3S로 $f(3.94) = 61.2 - 116 + 44.1 + 2.8 = -7.9$
그러나, nested form으로 계산하면, $3.75 - 7.5 = -3.75$, $-3.75 \times 3.75 = -14.1$, $-14.1 + 11.2 = -2.9$, $-2.9 \times 3.75 = -10.9$, $-10.9 + 2.8 = -8.1$이 된다.

23. x^2이 1.0E100을 넘어가면 overflow가 발생한다. 따라서 이러한 현상을 다소 막아보는 방법이 x^2대신 x로 사용하기 위하여 식을 바꾼다.

24. (Essay)

25. (a)$x \tilde{+} y = 0.90476190476190$,
$x - y = 0.23809523809524$,
$xy = 0.19047619047619$,
$\frac{x}{y} = 1.71428571428571$, 따라서

	ϵ_{chop}	ϵ_{round}
$x+y$	0.19048E-7	0.19048E-7
$x-y$	0.47619E-7	0.52382E-7
xy	0.38095E-7	0.61905E-7
$\frac{x}{y}$	0.14286E-6	0.85714E-6

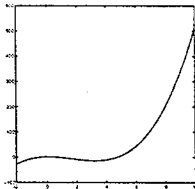
	$\epsilon_{r,chop}$	$\epsilon_{r,round}$
$x+y$	0.21053E-7	0.21053E-7
$x-y$	0.20000E-8	0.22000E-8
xy	0.20000E-8	0.32500E-8
$\frac{x}{y}$	0.83335E-9	0.50000E-9

17.2. Solution of Equations by Iteration

1. Example 1에서 $x > 0$일 때, $g_1(x)$는 증가함수이기 때문에 증가수열이 얻어지고, Example 2에서 $x > 0$일 때, $g_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$은 감소수열이므로 증가수열이 얻어지지 않는다.

2. (1)x_0=1.000, x_1=0.000, x_3=1.000, x_4=0.000, x_5=1.0d0, x_6=0.000, $\cdots$
(2)x_0=0.5000, x_1=0.8750, x_3=0.3300, x_4=0.9640, x_5=0.1040, x_6=0.9989, x_7=0.3376E-3, x_8=1.0000,$\cdots$
(3) x_0 = 2.000, x_1 = -7.0000, x_3 = 0.3440E3, x_4 = -0.4071E8, x_5 = 0.6746E22, x_6 = -0.3069E68 $\cdots$

3. *the graph of* $f(x) = x^3 - 5.00x^2 + 1.01x + 1.88$

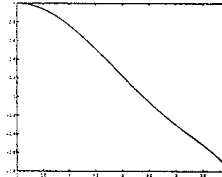


Numerical results

n	x_n	x_n	x_n	x_n
0	5.000	4.000	1.000	-1.000
1	4.723	4.630	2.110	4.130
2	4.702	4.694	4.099	4.652
3	4.700	4.700	4.642	4.695
4	4.700	4.700	4.695	4.700
5	4.700	4.700	4.700	4.700
6	4.700	4.700	4.700	4.700

4. $g(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 1.01 + \frac{1.88}{x})$,
1, 0.778, 0.806347, 0.798340, 0.800447, 0.799881, 0.800032, 0.799991, 0.800002, 0.7999999, 0.800000(exact)

5. the grape of $f(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6$



$g(x) = \frac{4}{x}(1.0d0 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2304}x^6$으로 두고 $x = g(x)$를 풀면 $x(0) = 3.9901$, $x(1) = 3.2169$, $x(2) = 2.7260$, $x(3) = 2.4720$, $x(4) = 2.4720$, $x(5) = 2.4019$, $x(6) = 2.3926$,$x(7) = 2.3917$,$x(8) = 2.3916$,$x(9) = 2.3916$, $\cdots$ 로써 2.3916으로 수렴한다.

6. $x = \frac{1}{\cosh x}$;
1, 0.64805, 0.82140, 0.73706, $\cdots$, 0.76501(5S exact)

7. 4.4934 만약 $x = \tan x$를 $x = 1$로 시작하면 해는 1.5708로 구해진다.

8. $x = \frac{x}{e^x \sin x}$;
0.5, 0.63256, 0.56838, $\cdots$, 0.58853 (5S exact)

9. $x = \sqrt[4]{x + 0.12}$; 1.02874, $\cdots$, 1.0372

10. (a) 만약 구간 I에서 $x = g(x)$의 근이 없다면 함수 $h(x) = g(x) - x$로 정의하고 구간 I=[a, b]로 두자. 그러면 중간값 정리에 의하여 $g(x) - x \le 0$ 또는 $g(x) - x \ge 0$이다.만약 $g(x) - x \ge 0$라면 $g(b) - b \ge 0$, 즉 $g(b) \ge b$이다. 이것은 $a \le g(x) \le b$인 가정에 모순이고, 만약 $g(x) - x \le 0$라면 $g(a) - b \le 0$, 즉 $g(a) \le a$이다. 이것은 $a \le g(x) \le b$인 가정에 모순이다. 따라서 $h(x) = 0$인 근이 $a \le x \le b$사이에 적어도 하나 존재한다.

(b)(1)은 12 step에서 1.56155(6S-value) 에 수렴한다.
(2)는 30step에서 1.56155(6S-value) 에 수렴한다.
(3)은 $x_0 = 1.5$에서 -1에 수렴하나 $x_0 = 2$에서 발산

한다.
(4)은 $x_0 = 1.5$에서 0에 수렴하나 $x_0 = 2$에서 발산 한다.
(5)는 7step에서 -2.56155(6S-value)에 수렴한다.
(6)은 $x_0 = 1.5$에서 -1에 수렴하나 $x_0 = 2$에서 발산 한다.
(7)은 4 step에서 1.56155(6S-value) 에 수렴한다.

11. We hav$x = \sqrt[3]{c}$, hence $f'(x) = x^3 - c = 0$, $f'(x) = 3x^2$, and
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{c}{x_n^2}\right)$
Thus starting $x_0 = 2$,
$x_1 = 1.91667$, $x_2 = 1.91294$, $x_3 = 1.91293$, $x_4 = 1.91293, \cdots$
x_3 is exact to 6D.

12. We have $x = \sqrt[k]{c}$, hence $f(x) = x^k - c = 0$, $f'(x) = kx^{k-1}$, and
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - c}{kx_n^{k-1}}$
$= \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{c}{x_n^{k-1}}\right)$
Thus starting $x_0 = 1$, $\sqrt{2} = 1.414214$, $\sqrt[3]{2} = 1.259921$, $\sqrt[4]{2} = 1.189207$, $\sqrt[5]{2} = 1.148698$

13. $x_{n+1} = x_n + h$로 두면, $f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + hf'(x_n) = 0$,
따라서 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

14. 0.906180

15. (a) $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.378125$, $x_2 = 0.377964$, $x_3 = 0.377964, \cdots$
(b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

16. $x_0 = 5.0$, $x_1 = 1.748$, $x_2 = 2.425$, $x_3 = 2.473, \cdots$
$f(2.473)$=39.02

17. $x_0 = 5.0$, $x_1 = 4.87727$, $x_2 = 4.80759$, $x_3 = 4.76985$, $x_4 = 4.75015$, $x_5 = 4.74010, \cdots$, 따라서 4.73004로 수렴한다.

18. 21, 21.20870, 21.20575 21.20575; $x_0 = 20$은 2.36근처에서 해가 나온다. 좋은 x_0가 중요하다.

19. $x_{n+1} = x_n - \frac{x^4 - x - 0.12}{4x^3 - 1}$,
thus $x_0 = 2.0$, $x_1 = 1.55226$, $x_2 = 1.25618$, $x_3 = 1.09542$, $x_4 = 1.04271$, $x_5 = 1.03722, \cdots$

20. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, $x_2 = 2.49756$, $x_3 = 2.47209$, $\cdots$ converge to 2.47209.

21. $x_2 = 4.48457$, $x_3 = 4.66728$,$x_4 = 4.74888$, $\cdots$ stop to 4.73004.

22. $x_2 = 0.577094$, $x_3 = 0.534162$,$x_4 = 0.531426$, $\cdots$ stop to 0.531390.

23. $x_2 = 2.39635$, $x_3 = 2.391573$,$x_4 = 2.39164$, $\cdots$ stop to 2.39164.

24. (a) 두 점 $(a_0,\ f(a_0))$, $(b_0,\ f(b_0))$을 잇는 직선의 방정식은 $y = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}(x - a_0) + f(a_0)$이다. 따라서 x절편이 c_0이므로,
$0 = \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0}(c_0 - a_0) + f(a_0)$
$0 = \big(f(b_0) - f(a_0)\big)(c_0 - a_0) + f(a_0)(b_0 - a_0)$
따라서, $c_0 = \frac{a_0\big(f(b_0) - f(a_0)\big) - f(a_0)(b_0 - a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$
$= \frac{a_0 f(b_0) - f(a_0) b_0}{f(b_0) - f(a_0)}$
Algorithm FP($\mathbf{f, a_0, b_0, N}$)
False Position Method
This algorithm computes an interval $[a_n,\ b_n]$ containing a solution of $f(x) = 0$ (f *is continuous*), given $f(a_0 b_0) < 0$.
INPUT : Initial interval $[a_0,\ b_0]$, maximal number of iteration N.
OUTPUT : Interval $[a_n,\ b_n]$ containing a solution or a solution c_0.
For $n = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ N - 1$, do;
Compute $c_n = \frac{a_n f(b_n) - f(a_n) b_n}{f(b_n) - f(a_n)}$
If $f(c_n) = 0$, then **OUTPUT** c_n. Stop.
Else continue.
If $f(a_n)f(c_n) < 0$, then $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$.
Else set $a_{n+1} = c_n$, and $b_{n+1} = b_n$.
End.
OUTPUT $[a_N,\ b_N]$, stop.
END FP.
(b) Newton's method : $x_0 = 2$, $x_1 = 3.14285714$, $x_2 = 2.7641141$, $x_3 = 2.69167585$, $x_4 = 2.68909854$, $x_5 = 2.68909532$, $\cdots$, $x_5 = 2.68909532$ is exact to 9D.
The method of false position : (1)$a_0 = 1$, $b_0 = 3$, $c_0 = 2.25$, $c_1 = 2.62055336$, $\cdots$, $c_10 = 2.68909532$ is exact to 9D.
(2) $a_0 = -1$, $b_0 = 4$이면 $c_{29} = 2.68909532$.
이 두 방법을 비교하면 후자의 방법이 2배 느리게 수렴하는 것을 알 수 있으며, 또 The method of false position 은 구간의 선택에 따라 수렴하는 속도의 차이가 크다.
(c)$x^4 - 2$의 경우 : $a_0 = 1$, $b_0 = 3$으로 두면

n	1	2	3	4	5
c_n	1.025	1.0472	1.0667	1.0837	1.0987

$n = 98$일 때, $c_n = 1.1892071$로 algorithm이 끝난다.
$\cos x = \sqrt{x}$의 경우 : $a_0 = 0$, $b_0 = 4$으로 두면

n	1	2	3	4	5
c_n	1.0948	0.6894	0.6512	0.6437	0.6421

$n = 14$일 때, $c_n = 0.641714371$로 algorithm이 끝난다.
$x + \ln x = 2$의 경우 : $a_0 = 1$, $b_0 = 4$으로 두면

n	1	2	3	4	5
c_n	1.6839	1.5675	1.5580	1.5572	1.5572

$n = 8$일 때, $c_n = 1.5571456$로 algorithm이 끝난다.

25. (a)**Algorithm BISECT($\mathbf{f, a_0, b_0, N}$)**
Bisection Method

This algorithm computes an interval $[a_n, b_n]$ containing a solution of $f(x) = 0$ (f *is continuous*), given $f(a_0 b_0) < 0$.
INPUT : Initial interval $[a_0, b_0]$, maximal number of iteration N.
OUTPUT : Interval $[a_n, b_n]$ containing a solution or a solution c_0.
For $n = 0, 1, 2, \cdots, N-1$, do;
Compute $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$
If $f(c_n) = 0$, then **OUTPUT** c_n. Stop.
Else continue.
If $f(a_n)f(c_n) < 0$, then $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$.
Else set $a_{n+1} = c_n$, and $b_{n+1} = b_n$.
End.
OUTPUT $[a_N, b_N]$, stop.
END BISECT.
(b) Newton method : $x_0 = 2$로 두고 시작하면,

n	1	2	3	4	5
x_n	1.9245	1.8448	1.7606	1.6713	1.5764

$n = 18$일 때, $x_n = 0.73908513$로 algorithm이 끝난다.
Bisection Method : $a_0 = 0$, $b_0 = 2$으로 두면

n	1	2	3	4	5
c_n	1.0000	0.5000	0.7500	0.6250	0.6875

$n = 33$일 때, $c_n = 0.739085133$로 algorithm이 끝난다.
(c)$e^{-x} = \ln x$의 경우 : $a_0 = 1$, $b_0 = 2$으로 두면

n	1	2	3	4	5
c_n	1.3974	1.3211	1.3112	1.3100	1.3098

$n = 9$일 때, $c_n = 1.3097995$로 algorithm이 끝난다.
$e^x + x^4 + x = 2$의 경우 : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$으로 두면

n	1	2	3	4	5
c_n	0.2689	0.3662	0.4043	0.4194	0.4254

$n = 25$일 때, $c_n = 0.429493566$로 algorithm이 끝난다.

26.

17.3. Interpolation

1. $L_0(x) = -2x + 19$, $L_1(x) = 2x - 18$, 그러므로 $p_1(x) = L_0(x) \times 9.0 + L_1(x) \times 9.5 = 0.1082x + 1.2234$, $\ln 9.3 \approx p_1(9.3) = 2.2297$

2. $e_1(x) = (x - 9.0)(x - 9.5)\frac{-1}{2t^2}$, $9 \le t \le 9.5$, 그러므로 $\epsilon_1(9.3) = \frac{0.03}{t^2}$따라서
$0.00033 \le \epsilon_1(9.3) \le 0.00037$
따라서 $0.00033 \le a - \tilde{a} \le 0.00037$
따라서 $2.2300 \le a \le 2.2301$
그러므로 2.230은 4D에서 정확한 값이다.

3. $e^{-0.25} \approx 0.8033$, 따라서 $e^{-0.25} = 0.7788$ 이므로 $\epsilon = -0.0245$
$e^{-0.75} \approx 0.4872$, 따라서 $e^{-0.25} = 0.4724$ 이므로 $\epsilon = -0.0148$
또, $L_0(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)}$
$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)}$
$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)}$
그러므로,
$p_2(x) = L_0(x)e^0 + L_1(x)e^{0.5} + L_2(x)e^1$
$= 0.3096x^2 - 0.9418x + 1.$
$e^{-0.25} \approx 0.7839$, 따라서 $\epsilon = -0.0051$
$e^{-0.75} \approx 0.4872$, 따라서 $\epsilon = -0.0045$

4. $\epsilon_2(x) = (x - 9)(x - 9.5)(x - 11)\frac{(\ln t)'''}{6}$, 따라서 $\epsilon_2(9.2) = \frac{0.036}{t^3}$. $9 \le t \le 11$이므로
$0.000027 \le \epsilon_2(9.2) \le 0.000050$
$0.002874 \le \epsilon \le 0.0078125$

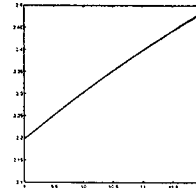
5. $L_0(x) = \frac{(x-1.02)(x-1.04)}{(1.00-1.02)(1.00-1.04)}$,
$L_1(x) = \frac{(x-1.00)(x-1.04)}{(1.02-1.00)(1.02-1.04)}$,
$L_2(x) = \frac{(x-1.00)(x-1.02)}{(1.04-1.00)(1.04-1.02)}$.
그러므로
$p_2(x) = L_0(x)1.00 + L_1(x)0.9888 + L_2(x)0.9784 = x^2 - 2.580x + 2.580.$
$\Gamma(1.01) \approx 0.9943$, $\Gamma(1.03) \approx 0.9835$

6. $p_2(x) = (x^2 - 20.5x + 104.5) \times 2.1972 - \frac{1}{0.75}(x^2 - 20x + 99) \times 2.2513 + \frac{1}{3}(x^2 - 18.5x + 85.5) \times 2.3979 = -0.00523x^2 + 0.205x + 0.7759$

x	9.4	10	10.5	11.5	12
$p(x)$	2.24077	2.3029	2.3518	2.4417	2.4828
$\ln x$	2.24071	2.3026	2.3513	2.4423	2.4849
ϵ	6.0E-5	3.0E-4	5.0E-4	-6.0E-4	-2.1E-3

구간[9.0, 11.0]사이의 값은 오차가 작으나 이 구간 밖의 값은 오차가 크다.

7.



8. $L_0 = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$, $L_1 = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x)$,
$L_2 = -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x)$, $L_3 = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$
따라서 $p_3(x) = L_0(x) + L_1(x) \times 0.765198 + L_2 \times 0.223891 + L_3 \times (-0.260052) = 0.06064483x^3 - 0.335187x^2 + 0.03974017x + 1$
$p_3(0.5) = 0.9436539372$
$p_3(1.5) = 0.5101158018$
$p_3(2.5) = -0.04799286375$

9. $L_0(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)}{0.25-0.5)(0.25-1)}$,
$L_1(x) = \frac{(x-0.25)(x-1)}{0.5-0.25)(0.5-1)}$,
$L_2(x) = \frac{(x-0.25)(x-0.5)}{1-0.25)(1-0.5)}$.
$p_2(x) = L_0(x) \times 0.27633 + L_1(x) \times 0.52050 + L_2(x) \times$

$0.84270 = -0.44304x^2 + 1.30896x - 0.02322$, 그러므로 $f(0.75) \approx p_2(0.75) = 0.70929$.

10. $\epsilon_2(x) = (x-0.25)(x-0.5)(x-1)\frac{f'''(t)}{3!}$, $\epsilon_2(0.75) = -0.005208f'''(t)$
그런데 $f'''(t) = \frac{-4}{\sqrt{\pi}}(1-2t^2)e^{-t^2}$.
이때, $f^{iv}(t) = \frac{-8t}{\sqrt{\pi}}(-3+2t^2)e^{-t^2} \neq 0$.
따라서 f'''은 증가함수이므로
$-0.00433 \le a - \le 0.00967$

11. Newton's forward difference formula.

j	x_j	f_j	∇f_j	$\nabla^2 f_j$
0	1.00	1.000		
			-0.0112	
1	1.02	0.9888		0.0008
			-0.0104	
2	1.04	0.9784		

따라서 $x = x_0 + rh$, , $r = \frac{x-1}{0.02}$일 때, $p_2(x) = 1.000 + r(-0.0112) + \frac{r(r-1)}{2!}(0.0008) = x^2 - 2.580x + 2.580$.
$p_2(1.01) = 0.9943$, $p_2(1.03) = 0.9835$, $p_2(1.05) = 0.9735$

12. Newton's forward difference formula.

j	x_j	f_j	∇f_j	$\nabla^2 f_j$	$\nabla^3 f_j$
0	1.0	0.94608			
			0.3786		
1	1.5	1.32468		-0.09787	
			0.28073		-0.01002
2	2.0	1.60541		-0.10789	
			0.17284		
3	2.5	1.77825			

$r = \frac{x-1}{2} = 2(x-1)$, $x = 1.25$일 때, $r = 0.5$
$p_1(x) = 0.94608 + r0.3786$, $p_1(1.25) = 1.13538$, $\epsilon = 0.01107$
$p_2(x) = 0.94608 + r0.3786 + \frac{r(r-1)}{2!}(-0.09787)$, $p_2(1.25) = 1.14761375$, $\epsilon = -0.00116375$
$p_3(x) = 0.94608 + r0.3786 + \frac{r(r-1)}{2!}(-0.09787) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(-0.01002)$, $p_3(1.25) = 1.1469875$, $\epsilon = -5.375E-4$

13. Newton's forward difference formula.

j	x_j	f_j	∇f_j	$\nabla^2 f_j$	$\nabla^3 f_j$
0	1.0	5			
			13		
1	2.0	18		6	
			19		0
2	3.0	37		6	
			25		0
3	4.0	62		6	
			31		
4	5.0	93			

따라서 $x = 1 + r$, $p_2(x) = 5 + 13r + 3r(r-1) = 3r^3 + 10r + 5 = 3(x-1)^2 + 10(x-1) + 5 = 3x^2 + 4x - 2$

14. Newton's divided difference formula.

j	x_j	f_j	$[f_j, f_{j+1}]$	$[f_j, f_{j+1}, f_{j+2}]$
0	9.0	2.1972		
			0.1082	
1	9.5	2.2513		-0.005233
			0.097733	
2	11.0	2.3979		

$p_2(x) = 2.1972 + (x-9.0)0.1082 + (x-9.0)(x-9.5)(-0.005233) = -0.005233x^2 + 0.2050105x + 0.7759785$

15. Newton's divided difference formula.

j	x_j	f_j	$[f_j, f_{j+1}]$	$[f_j, f_{j+1}, f_{j+2}]$
0	0.25	0.27633		
			0.97668	
1	0.5	0.52050		-0.44304
			0.6444	
2	1	0.84270		

$p_2(x) = 0.27633 + (x-0.25)0.97668 + (x-0.25)(x-0.5)(-0.44304) = -0.44304x^2 + 1.30896x + -0.02322$

16. $r = \frac{x-0.8}{0.1}$, $p_3(x) = 1.337435 + r0.082266 + \frac{r(r+1)}{2!}0.012562 + \frac{r(r+1)(r+2)}{3!}0.000697$
$r = -2.4$, $p_3(0.56) = 1.160944632$

17. Newton's divided difference formula.

j_{back}	x_j	1st Diff	2nd Diff	
-2	0.2	0.2227		
			0.2057	
-1	0.4	0.4284		-0.0302
			0.1755	
0	0.6	0.6039		

$r = \frac{x-0.6}{0.2}$, $p_2(x) = 0.6039 + r0.1755 + \frac{r(r+1)}{2}(-0.0302)$
$r = -1.5$, $p_2(0.3) = 0.3293$, Error=-0.0007

18. Newton's forward difference formula.

j	x_j	f_j	∇f_j	$\nabla^2 f_j$	$\nabla^3 f_j$	$\nabla^4 f_j$	$\nabla^5 f_j$
0	0.0	0					
			0.09950				
1	0.2	0.09950		-0.00297			
			0.09653		-0.00289		
2	0.4	0.19603		-0.00586		0.00022	
			0.09067		-0.00267		0.00005
3	0.6	0.28670		-0.00853		0.00027	
			0.08214		-0.0024		
4	0.8	0.36884		-0.01093			
			0.07121				
5	1.0	0.44005					

$r = \frac{x-0.0}{0.2} = 5x$, $p_5(x) = 0.09950r + \frac{r(r-1)}{2!}(-0.00297) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(-0.00287) + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}(-0.00022) + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{5!}(0.00005)$

$r = 0.5, p_5(0.1) = 0.04995058593750$, $r = 1.5, p_5(0.3) = 0.14831113281250$, $r = 2.5, p_5(0.5) = 0.24228730468750$, $r = 3.5, p_5(0.7) = 0.32887285156250$, $r = 4.5, p_5(0.9) = 0.40486652343750$

19. (Essay)

20. (a) $p_1(x)$에 대하여
$L_0 = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = 19 - 2x$,
$L_0 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = -18 + 2x$
이므로 $p_1(x) = 1.22396 + 0.10814x$이다. 따라서 $p_1(9.2) = 2.21885$. 그러므로 $\ln 9.2 = 2.21916$이므로 오차는 0.00035.
$p_2(x)$에 대하여
$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 104.5 - \frac{41}{2}x + x^2$,
$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -132 + \frac{80}{3}x - \frac{4}{3}x^2$,
$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 28.5 - \frac{37}{6}x + \frac{1}{3}x^2$
이므로
$p_2(x) = 0.779466 + 0/204323x - 0.0051994x^2$이다. 따라서 $p_2(9.2) = 2.21916$. 그러므로 오차는 0.00004.
$p_2(9.2) - p_1(9.2) = 0.00031$
(b)difference table은 다음과 같다.

x_j	f_j	∇f_j	$\nabla^2 f_j$
0.2	0.9980		
		-0.0294	
0.4	0.9686		-0.0949
		-0.1243	
0.6	0.8443		-0.1842
		-0.3085	
0.8	0.5358		-0.2273
		-0.5358	
1.0	0.000		

따라서 $x_0 = 0.6$, $x_1 = 0.8$, $x_2 = 1.0$인 경우 Newton's formula에 의하여
$0.8443 + 0.5 \cdot (-0.3085) + \frac{0.5\cdot(-0.5)}{2} \cdot (-0.2273) = 0.7185$. 따라서 오차는 -0.0004. 이 오차가 세가지 경우 중에서 가장 작다.
$x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0.8$인 경우 Newton's formula에 의하여
$0.9686 + 1.5 \cdot (-0.1243) + \frac{1.5\cdot(0.5)}{2} \cdot (-0.1842) = 0.7131$. 따라서 오차는 0.0050.
$x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.6$인 경우 Newton's formula에 의하여
$0.9980 + 2.5 \cdot (-0.0294) + \frac{2.5\cdot(1.5)}{2} \cdot (-0.0949) = 0.7466$. 따라서 오차는 -0.0285.
따라서 extraploation(세 번째의 경우)이 interpolation(첫번째나 두번째의 경우)보다 오차가 더 크다.

17.4. Spline

1. (Essay)

2. $f(x_j) = f_j$, $f(x_{j+1}) = f_{j+1}$, $x - x_j = F$, $x - x_{j+1} = G$로 두면,
$p(x_j) = f_j c_j^2 G^2(1+2c_jF) + f_{j+1}c_j^2F^2(1-2c_jG) + k_jc_j^2FG^2 + k_{j+1}c_j^2FG^2$.
$x = x_j$이면 $F = 0$이고, $c_j(x_j - x_{j+1}) = 1$이므로 $p_j(x_j) = f_jc_j^2(x_j - x_{j+1})^2 = f_j$.
비슷하게 $x = x_{j+1}$이면 $G = 0$이므로 $p_j(x_{j+1}) = f_{j+1}c_j^2(x_{j+1} - x_j)^2 = f_{j+1}$.다라서 (4)가 증명이 된다.
그리고 $p_j'(x) = f_jx_j^2[2G(1+2c_jF) + 2c_jG^2] + f_{j+1}c_j^2[2F(1-2c_jG) - 2c_jF^2] + k_jc_j^2[G^2+2FG] + k_{j+1}c_j^2[2FG+F^2]$.
$x = x_j$일 때, $F = 0$이므로 $p_j'(x_j) = f_jx_j^2(2G + 2c_jG^2) + k_jc_j^2G^2$. 그런데 $2G(1+c_jG) = 2(x_j - x_{j+1})\left(1 + \frac{x_j - x_{j+1}}{x_{j+1}-x_j}\right) = 0$. 다라서 $p_j'(x_j) = k_jc)j^2(x_{j+1} - x_j)^2 = k_j$이다.
비슷하게 $x = x_{j+1}$일 때, $G = 0$이므로
$p_j'(x_{j+1}) = f_{j+1}c_j^2[2(x_{j+1} - x_j) - 2c_j(x_{j+1} -$

$x_j)^2] + k_{j+1}c_j^2(x_{j+1} - x_j)^2 = k_{j+1}$. 따라서 (5)가 증명이 된다.

3. $p_j''(x) = f_jc_j^2[2(1+2c_jF)+8c_jG] + fj + 1c_j^2[2(1-2c_jG)-8c_jF]+k_jc_j^2[4G+2F]+k_{j+1}c_j^2[4F+2G]$. 따라서 $x = x_j$일 때, $F = 0$, $c_j(x_{j+1} - x_j) = 1$임을 이용하면 $p_j''(x_j) = f_jc_j^2(2-8)+f_{j+1}c_j^2[2+4]-k_jc_j\cdot 4+k_{j+1}c_j\cdot(-2) = -6c_j^2f_j+6c_j^2f_{j+1}-4c_jk_j-2c_jk_{j+1}$. (7)이 증명이 된다.
비슷하게 $x = x_{j+1}$일 때, $G = 0$이므로 $p_j''x_j + 1 = 6c_j^2f_j - 6c_j^2f_{j+1} + 2c_jk_j + 4c_jk_{j+1}$. (8)이 증명이 된다.

4. $p_j''(x_j) = -6c_j^2f_j + 6c_j^2f_{j+1} - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1}$, $p_{j-1}(x_j) = 6c_{j-1}^2f_{j-1} - 6c_{j-1}^2f_j + 2c_{j-1}k_{j-1} + 4c_{j-1}k_j$이므로 $p_{j-1}''(x_j) = p_j''(x_j)$로 부터
$c_{j-1}k_{j-1} + 2(c_{j-1} + c_j)k_j + c_jk_{j+1} = 3[c_{j-1}^2(f(x_j) - f(x_{j-1})) + c_j^2(f(x_{j+1} - f(x_j))]$.

5. $c_j = c_{j-1} = \frac{1}{h}$이므로
$\frac{1}{h}(k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1}) = 3\frac{1}{h^2}(f_{j+1} - f_{j-1})$
$k_{j-1} + 4k_j + k_{j+1} = 3\frac{1}{h}(f_{j+1} - f_{j-1})$

6. (7)에 의하여 $a_{j2} = \frac{1}{2}p_j''(x_j) = \frac{1}{2}(-6c_j^2f(x_j) + 6c_j^2f(x_{j+1}) - 4c_jk_j - 2c_jk_{j+1}) = \frac{1}{2}(6\frac{1}{h^2}(f_{j+1} - f_j) - \frac{2}{h}(k_{j+1} + 2k_j)) = \frac{3}{h^2}(f_{j+1} - f_j) + \frac{1}{h}(k_{j+1} + 2k_j)$
(13)로 부터 $p_j''(x) = 2a_{j2} + 6a_{j3}(x - x_j)$ 따라서 $p_j''(x_{j+1}) = 2a_{j2}+6a_{j3}(x_{j+1}-x_j) = 2a_{j2}+6a_{j3}h$.
여기에 (8)을 이용하면
$2\frac{3}{h^2}(f_{j+1} - f_j) + \frac{1}{h}(k_{j+1} + 2k_j) + 6a_{j3}h = \frac{6}{h^2}f(x_j) - \frac{6}{h^2}f(x_{j+1}) + \frac{2}{h}k_j + \frac{4}{h}k_{j+1}$. 이 식을 정리하면,$a_{j3}$을 구할 수 있다.

7. This is simple and straightforward.

8. $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$일 때, 각각 1, 0, 1인 quadratic interpolation polynomial $p_2(x) = x^2$이다. 따라서 $f(x) - p_2(x) = x^4 - x^2$, $-1 \le x \le 1$에서 최대값을 구하기 위하여 $f'(x) - p_2'(x) = 4x^3 - 2x = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
따라서 최대 차이의 값은 $\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - p_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \frac{1}{4}$.
spline $g(x)$에 대하여 $x \ge 0$일 때, $f(x) - g(x) = x^4 - (-x^2 + 2x^3)$이므로 최대값을 구하기 위하여 $f'(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x - 6x^2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$.
따라서 최대 차이의 값은 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{16}$. 이 값은 앞의 값의 25%이다.

9. $k_0 = 0$, $k_1 = 12$, $k_2 = 12$, $K_3 = -12$, $f_0 = 1$, $f_1 = 9$, $f_2 = 41$, $f_3 = 41$ 이므로
$a_{10} = f_1 = 9$
$a_{11} = k_1 = 12$
$a_{12} = \frac{3}{4}(41 - 9) - \frac{1}{2}(12 + 2 \times 12) = 6$
$a_{13} = \frac{2}{8}(9 - 41) + \frac{1}{4}(12 + 12) = -2$
따라서 $p_1(x) = 9 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 - 2(x-2)^3$
$a_{20} = f_2 = 41$
$a_{21} = k_2 = 12$
$a_{22} = \frac{3}{4}(41 - 41) - \frac{1}{2}(-12 + 2 \times 12) = -6$
$a_{23} = \frac{2}{8}(41 - 41) + \frac{1}{4}(-12 + 12) = 0$
따라서 $p_2(x) = 41 + 12(x - 4) - 6(x - 4)^2$
또한, $p_0'(x) = 3x^2$, $p_0''(x) = 6x$이므로 $p_0'(2) = 12$, $p_0''(2) = 12$
$p_1'(x) = -36 + 36x - 6x^2$, $p_1''(x) = 36 - 12x$이므로 $p_1'(2) = 12$, $p_1''(2) = 12$, $p_1'(4) = 12$, $p_1''(4) = -12$
$p_2'(x) = 60 - 12x$, $p_2''(x) = -12$이므로 $p_2'(4) = 12$, $p_2''(4) = -12$.
따라서 $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ 모두 연속이다.

10. 3차 다항식의 3계도함수는 상수함수이고 $g(x)$는 3차 다항식으로 이루어져 있으므로 $g'''(x)$는 각 구간마다 상수함수이다.(즉, piecewise constant function) 따라서 $g'''(x)$가 연속이면 $g'''(x)$는 전 영역에서 상수이고 따라서 $g'''(x) = M$(M은 상수)로 두고 풀면 $g'''(x)$는 3차 다항식이다.

11. $f_0 = 0$, $f_1 = 4$, $f_2 = 0$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.
$a_{00} = 0$, $a_{01} = 0$, $a_{02} = 12$, $a_{03} = -8$
$a_{10} = 4$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -12$, $a_{13} = 8$
$p_0(x) = 0 + 0(x + 1) + 12(x + 1)^2 - 8(x + 1)^3 = 4(x + 1)^2(-2x + 1)$
$p_1(x) = 4 + 0x - 12x^2 + 8x^3 = 4(x - 1)^2(2x + 1)$
$p_0(-x) = p_1(x)$이므로 $g(x)$는 우함수이다.

12. $f_0 = 1$, $f_1 = 5$, $f_2 = 17$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = -2$, $k_1 = 10$, $k_2 = -14$.
$a_{00} = 1$, $a_{01} = -2$, $a_{02} = 0$, $a_{03} = 1$
$a_{10} = 5$, $a_{11} = 10$, $a_{12} = 6$, $a_{13} = -4$
$p_0(x) = 1 - 2(x + 2) + 0(x + 2)^2 + (x + 2)^3$
$p_1(x) = 5 + 10x + 6x^2 - 4x^3$

13. $f_0 = 3$, $f_1 = 5$, $f_2 = 31$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = 4$.
$a_{00} = 3$, $a_{01} = 1$, $a_{02} = -2$, $a_{03} = 1$
$a_{10} = 5$, $a_{11} = 5$, $a_{12} = 4$, $a_{13} = 0$
$p_0(x) = 3 + x - 2x^2 + x^3$
$p_1(x) = 5 + 5(x - 2) + 4(x - 2)^2$

14. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 6$, $f_3 = 10$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0$, $k_1 = 3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 0$.
$a_{00} = 0$, $a_{01} = 0$, $a_{02} = 0$, $a_{03} = 1$
$a_{10} = 1$, $a_{11} = 3$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = -1$
$a_{20} = 6$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -2$
$p_0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^3$
$p_1(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 - (x - 1)^3$
$p_2(x) = 6 + 6(x - 2) + 0(x - 2)^2 - 2(x - 2)^3$

15. $f_0 = 1$, $f_1 = 0$, $f_2 = -1$, $f_3 = 0$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0$, $k_1 = -2$, $k_2 = 2$, $k_3 = -6$.
$a_{00} = 1$, $a_{01} = 1$, $a_{02} = 1$, $a_{03} = 0$
$a_{10} = 0$, $a_{11} = -2$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 2$
$a_{20} = -1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = -6$
$p_0(x) = 1 + x + x^2$
$p_1(x) = -2(x - 1) - (x - 1)^2 + 2(x - 1)^3$

$p_2(x) = -1 + 2(x-2) + (x-2)^2 - 6(x-2)^3$

16. $f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 1,\ f_3 = 0,\ f_4 = 0$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = \frac{3}{4},\ k_3 = 0,\ k_4 = -\frac{3}{4}$.
$a_{00} = 0,\ a_{01} = 0,\ a_{02} = -\frac{3}{4},\ a_{03} = \frac{3}{4}$
$a_{10} = 0,\ a_{11} = \frac{3}{4},\ a_{12} = \frac{2}{3},\ a_{13} = -\frac{5}{4}$
$a_{20} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -\frac{9}{4},\ a_{23} = \frac{5}{4}$
$a_{30} = 0,\ a_{31} = -\frac{3}{4},\ a_{32} = -\frac{2}{3},\ a_{33} = -\frac{3}{4}$
$p_0(x) = -\frac{3}{4}(x+2)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^3 = 3 + 6x + \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^3$
$p_1(x) = \frac{3}{4}(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 - \frac{5}{4}(x+1)^3 = 1 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x^3$
$p_2(x) = 1 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{4}x^3$
$p_3(x) = -\frac{3}{4}(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{4}(x-1)^3 = 3 - 6x + \frac{15}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^3$
따라서 $p_0(-x) = p_3(x),\ p_1(-x) = p_2(x)$이므로 $g(x)$는 우함수이다.
interpolation polynomial : $p(x) = 1 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^4$

17. $f_0 = -1,\ f_1 = 0,\ f_2 = 1$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = f'(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ k_1 = \frac{6}{\pi},\ k_2 == f'(\frac{\pi}{2}) = 0$.
$a_{00} = -1,\ a_{01} = 0,\ a_{02} = 0,\ a_{03} = \frac{8}{\pi^3}$
$a_{10} = 0,\ a_{11} = \frac{6}{\pi},\ a_{12} = -\frac{12}{\pi^2},\ a_{13} = \frac{8}{\pi^3}$
$p_0(x) = -1 + \frac{8}{\pi^3}(x + \frac{\pi}{2})^3 = \frac{6}{\pi}x + \frac{12}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{\pi^3}x^3$
$p_1(x) = \frac{6}{\pi}x + \frac{12}{\pi^2}x^2 + \frac{8}{\pi^3}x^3$

18. $f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 1,\ f_4 = 0, f_5 = 0, f_6 = 0$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0,\ k_1 = -1,\ k_2 = 4,\ k_3 = 0,\ k_4 = -4,\ k_5 = 1,\ k_6 = 0$.
$a_{00} = 0,\ a_{01} = 0,\ a_{02} = 1,\ a_{03} = -1$
$a_{10} = 0,\ a_{11} = -1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 3$
$a_{20} = 0,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 7,\ a_{23} = -6$
$a_{30} = 5,\ a_{31} = 0,\ a_{32} = -11,\ a_{33} = 6$
$a_{40} = 0,\ a_{41} = -4,\ a_{42} = 7,\ a_{43} = -3$
$a_{50} = 0,\ a_{51} = 1,\ a_{52} = -2,\ a_{53} = 1$
$p_0(x) = (x+3)^2 - (x+3)^3 = -18 - 21x - 8x^2 - x^3$
$p_1(x) = -(x+2) - 2(x+2)^2 + 3(x+2)^3 = 14 + 27x + 16x^2 + 3x^3$
$p_2(x) = 4(x+1) + 7(x+1)^2 - 6(x+1)^3 = 5 - 11x^2 - 6x^3$
$p_3(x) = 5 - 11x^2 + 6x^3$
$p_4(x) = -4(x-1) + 7(x-1)^2 - 3(x-1)^3 = 14 - 27x + 16x^2 - 3x^3$
$p_5(x) = (x-2) - 2(x-2)^2 + (x-2)^3 = -18 + 21x - 8x^2 + x^3$
따라서 $p_0(-x) = p_5(x),\ p_1(-x) = p_4(x),\ p_2(-x) = p_3(x)$이므로 $g(x)$는 우함수이다.
interpolation polynomial : $p(x) = 5 - 6.80556x^2 + 1.94444x^4 - 0.138889x^6$.

19. $f_0 = 4,\ f_1 = 0,\ f_2 = 4,\ f_3 = 80$ 이므로 (12)로 부터 $k_0 = 0,\ k_1 = -8,\ k_2 = 32,\ k_3 = 0$.
$a_{00} = 4,\ a_{01} = 0,\ a_{02} = 1,\ a_{03} = -1$
$a_{10} = 0,\ a_{11} = -8,\ a_{12} = -5,\ a_{13} = 5$
$a_{20} = 4,\ a_{21} = 32,\ a_{22} = 25,\ a_{23} = -11$
$p_0(x) = 4 - x^2 - x^3$
$p_1(x) = -8(x-2) - 5(x-2)^2 + 5(x-2)^3$
$p_2(x) = 4 + 32(x-4) + 25(x-4)^2 - 11(x-4)^3$

20. (b) $x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{5}{2}t^2 - 2t^3,\ y(t) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{4}\sqrt{3} - 1)t^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3})t^3$
(c) $x(t) = t + 2t^2 - 2t^3,\ y(t) = t + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2)t^2 + (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})t^3$

17.5. Numerical Integration and Differentiation

1. Rectangular rule을 사용하여
$J \approx 0.2[f(0.1) + f(0.3) + \cdots + f(0.9)] = 0.748053$

2. $A \le J \le B,\ A = h\sum A_j,\ B = h\sum B_j,\ A_j$ and B_j being lower and upper bounds for f in the jth subinterval. 따라서 값을 구해보면 $0.681 \le J \le 0.808$.

3. $h = 1$일 때, $J_1 = 0.5$
$h = 0.5$일 때, $J_{0.5} = 0.375$
$h = 0.25$일 때, $J_{0.25} = 0.3475$

4. $h = 1$일 때, $J_1 = 0.5$
$h = 0.5$일 때, $J_{0.5} = 0.28125$
$h = 0.25$일 때, $J_{0.25} = 0.2270$
따라서 $\epsilon_{0.5} = \frac{1}{3}(0.28125 - 0.5) = -0.07292$, $\epsilon_{0.25} = \frac{1}{3}(0.22070 - 0.28125) = -0.02018$

5. $h = 1$일 때, $J_1 = 0.5$
$h = 0.5$일 때, $J_{0.5} = 0.60355$
$h = 0.25$일 때, $J_{0.25} = 0.62841$
따라서 $\epsilon_{0.5} = \frac{1}{3}(0.60355 - 0.5) = 0.1035$, $\epsilon_{0.25} = \frac{1}{3}(0.62841 - 0.60355) = 0.02486$
문제 4번과 마찬가지로 h가 작을수록 오차는 작아진다.

6. $h|\frac{1}{2}\epsilon_0 + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1} + \frac{1}{2}| \le [(b-a)/n]nu = (b-a)u$, u is round-off unit.

7. 0.693254 exact to 6D : 적분값 : ln2=0.693147

8. 0.693150 exact to 6D : 적분값 : ln2=0.693147

9. 0.073930355 exact to 9D : 적분값 : 0.073928106

10. 0.073928162 exact to 6D : 적분값 : 0.073928106

11. 0.785392157 exact to 9D : 적분값 : 0.785398163

12. 0.785398153 exact to 9D : 적분값 : 0.785398163

13. $J_{0.25} = 0.785392157,\ J_{0.125} = 0.785398153$, 따라서 $\epsilon_{0.125} \approx \frac{1}{15}(0.785398153 - 0.785392157) =$

$5.996E-6$

14. $h = 0.5$ 그러므로 (9)에서$C = -\frac{0.5^4}{9}$. 따라서 $-0.000695 \le \epsilon \le -0.000094$.
(10)에서 $J_1 = 0.868951$, $J_{0.5} = 0.864956$, 그러므로 $\epsilon_{0.5} \approx \frac{1}{15}(0.864956 - 0.868951) = -0.000266$.

15. 0.945078781, 0.945832072

16. 0.920735492, 0.945078781

17. 0.46118764

18. 0.471624346

19. 0.91936

20. 0.91973

21. $\frac{3}{8} \times \frac{\pi}{6}(\cos(0) + 3\cos(0.5\frac{\pi}{3}) + 3\cos(0.5\frac{\pi}{3} \times 2) + \cos(0.5\frac{\pi}{3} \times 3) = 1.001004923$
$f^4 = \cos x$이므로 $M = 1$, $M^* = 0$ 따라서 $9.3951669592e-04 \le \epsilon \le 0$

22. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$이므로 $M_2 = 2$, $M_2^* = \frac{1}{4}$, 따라서 5-Digit의 정확성을 얻으려면 $|KM_2| = \frac{2}{12n^2} \le \frac{1}{2}10^{-5}$을 만족하는 가장 작은 n은 183이다.
$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$이므로 $M_2 = 24$, $M_2^* = \frac{24}{32}$, 따라서 5-Digit의 정확성을 얻으려면 $|KM_2| = \frac{24}{180\cdot(2m)^4} \le \frac{1}{2}10^{-5}$을 만족하는 가장 작은 $2m$은 14이다.

23. 구간 $[a, b]$일 때, $t = \frac{2}{b-a}(x - \frac{b+a}{2})$로 두면 t의 범위는 [-1, 1]로 변하고, $\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(t)dt \times \frac{b-a}{2}$. 따라서 $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$이고 $n = 5$이면, guauss integration에 의하여 1.000이 나온다.

24. $f(x) = e^{-x}$
1st Step : $J_{11} = 1.135335$, $J_{21} = 0.9355470$이므로 $\epsilon_{21} = \frac{1}{2^2-1}(J_{21} - J_{11}) = -0.066596$, $J_{22} = J_{21} + \epsilon_{21} = 0.868951$
2nd Step : $J_{31} = 0.8826040$이므로 $\epsilon_{31} = \frac{1}{2^2-1}(J_{31} - J_{21}) = -0.066596$ 따라서 $J_{32} = J_{31} + \epsilon 31 = 0.864956$,그리고 $\epsilon_{32} = \frac{1}{2^4-1}(J_{32} - J_{22}) = -0.000266$, $J_{33} = 0.864690$, Thus J_{33} is exact to 4D.
$f(x) = \frac{1}{4}\pi x^4 \cos(\frac{1}{4}\pi x)$
1st Step : $J_{11} = 0$, $J_{21} = 0.555360$, $\epsilon_{21} = 0.185120$, $J_{22} = 0.74048$
2nd Step : $J_{31} = 1.06115$, $\epsilon_{31} = 0.168597$, $J_{32} = 1.22975$, $\epsilon_{32} = 0.003262$, $J_{33} = 1.26236$
$J_{41} = 1.20857$, $\epsilon_{41} = 0.049142$, $J_{42} = 1.25771$, $\epsilon_{42} = 0.001864$, $J_{43} = 1.25958$, $\epsilon_{43} = -0.00004$, $J_{44} = 1.25953$, Thus, J_{44} is exact to 5D.

25. $f(x) = x^4$이므로 $f_0 = 0$, $f_1 = (0.2)^4$, $f_2 = (0.4)^4$, $f_3 = (0.6)^4$, $f_4 = (0.8)^4$ 따라서,$f'(x) = 4x^3$이므로
$f'(0) = 0$, $f_0' \approx -0.048$, $\epsilon = -0.048$,
$f'(0.2) = 0.032$, $f_1' \approx 0.064$, $\epsilon = 0.032$,
$f'(0.4) = 0.256$, $f_2' \approx 0.176$, $\epsilon = 0.08$,
and in (15) $f_2' \approx 0.25600$, $\epsilon = 0.00$

26. 0.240 정확한 값이 아니다. $\epsilon = 0.016$

27. $\Delta f_0 = 0.104$, $\Delta_1 = 0.28$, $\Delta_2 = f_3 - f_2 = 0.5904$, $\Delta_3 = f_4 - f_3 = 1.0736$
first order : 0.520
$\Delta^2 f_0 = 0.176$, $\Delta^2 f_1 = 0.3104$, $Delta^2 f_2 = 0.4832$
second order : 0.08
$\Delta^3 f_0 = 0.1344$, $\Delta^3 f_1 = 0.1728$
third order : 0.3733
$\Delta^4 f_0 = 0.0384$
fourth order : 0.2053

28. Sec 17.3에 있는 식 (14)를 r에 대하여 미분하면 $\frac{df(x)}{dr} = hf'(x) \approx \Delta f_0 + \frac{2r-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3r^2-6r+2}{3!}\Delta^3 f_0 \cdots$. 여기에 $x = x_0$이면 $r = 0$이므로 $f'(x) \approx \frac{1}{h}(\Delta f_0 - \frac{1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{2}{3}\Delta^3 f_0 \cdots)$.

Chapter 17 Review

1. Newton's Method, Secant Method 등등,..
numerical method를 사용하는 이유는 많은 문제의 경우 solution formular가 없거나 있다 할 지라도 실제적으로 이용할 수 없을 경우가 많기 때문이다.

2. a는 참값, $\tilde{a}$는 측정치일 때, $a - \tilde{a}$를 오차라 한다.
Relative Error $= \frac{\text{Error}}{\text{True Value}} = \frac{a-\tilde{a}}{a}$
Error Bound β : $|a - \tilde{a}| \le \beta$인 β

3. 수를 계산할 때, 일정한 자리수(유효숫자)이하는 버리거나(chopping) 반올림(rounding)하기 때문에 생기는 오차를 rounding error라 한다. 이 값이 중요한 이유는 어떤 자리수 이하에서 뺄셈을 할 때, 경우에 따라선 0이나 0에 가까운 수가 될 수 있기 때문에(이 예는 17.1절의 문제에서 충분히 다루었다.) 얼마만큼 유효숫자를 정할 것인가가 매우 중요하다. 이 것은 프로그램의 size에도 영향을 미친다.
규칙은 소수점 이하 k번째 자리까지의 값을 구할 때,
(1) (k+1)자리의 숫자는 모두 버린다.
(2) 만약 k+1번째 자리의 수가 1/2보다 작으면 k번째 자리의 수는 그대로 둔다.
(3) 만약 k+1번째 자리의 수가 1/2보다 크면 k번째 자리의 수에 1을 더해준다.
(2) 만약 k+1번째 자리의 수가 1/2이면 k번째 자리의 수에 가장 가까운 짝수로 바꾸어 준다.

4. floating point로 계산할 때, 정해진 유효숫자로 계산한다.
overflow는 계산할 려고 하는 숫자가 컴퓨터가 표시할 수 있는 숫자보다 더 큰 값이 나올 때를 말하고,

underflow는 계산할 려고 하는 숫자가 컴퓨터가 표시할 수 있는 숫자보다 더 작은 값이 나올 때를 말한다.

5. 값이 stable하다는 뜻은 initial data의 변화가 작을때, 그에 대응되는 결과의 변화도 역시 작을때를 말한다. 그러지 않을 때를 unstable라고 한다.

6. 계산 속도가 빨라짐.

7. Solution of equation by iteration : (1)Fix point iteration (2)Newton Method (3) Secant Method
1.Interpolation : (1) Lagrange interpolation (2)Newton's Divided Difference Interpolation
2.Spline : (1) Cubic Spline
3.Numerical Integration : (1) Trapezoidal Rule (2) Simpson's Rule (3) Gauss Integration formula

8. Solution of equation by iteration : (1)Fix point iteration (2)Newton Method (3) Secant Method

9. Interpolation : x값 $x_0, x_1, \cdots, x_n$에 대하여 각각 $f_0, f_1, \cdots, f_n$이 주어져 있을 때, 함수 $f(x)$찾는 것이다.
spline interpolation : 주어진 구간을 잘게 나눈 다음 그 구간을 한개의 곡선으로 이어 함수 $f(x)$찾는 것이다.

10. algorithm이란 컴퓨터가 계산을 할 때, 다음에 무엇을 할 것인가 정확히 정해놓은 유한한 규칙의 순서도.

11. 언제 프로그램을 멈출가를 결정해 주는 stop rule이 중요하다.

12. Numerical Integration : (1) Trapezoidal Rule (2) Simpson's Rule (3) Gauss Integration formula
부정적분 계산이 어려울 때나 또는 함수가 매번 반복될 때마다 바뀔 때 사용한다.

13. adaptive integration의 생각은 함수 $f(x)$의 변화가 큰 곳에서는 step size h를 작게 하고, 함수 $f(x)$의 변화가 작은 곳에서는 step size h를 크게 하여 계산하는 적분 방법이다. 예는 Example 6을 참고하면 됨.

14. 적분값의 정확성때문이다.

15. 수렴하는 속도가 mesh size의 몇승에 비례하는 가를 나타내는데 필요하다.

16. 17.3절의 식(5)을 기억하자.

17. simpson rule에서 양 끝 점을 제외한 나머지 점에서 두 점씩 Lagrange polynomial $p_2(x)$를 사용하였다. 따라서 이것 대신에 여러 점을 지나는 곡선을 Newton interpolation을 이용하여 구하면 된다.

18. 일정한 구간 [a, b]에서의 적분값을 표현할 때, 구간의 양 끝 값이 들어가지 않는 식을 open formula라고 부르고 그 반대를 closed formula라고 부른다. 그 예로써 먼저 open formula는 Gauss integration formula(식 11)이고, closed formula는 trapezoidal rule(식 2)나 simpson rule(식 7)이다.

19. Bezier curve는 Hemite interpolation polynomial(정의는 p868참조)로 이루어진 곡선으로 $n+1$개의 점에서 $p(x)$나 $p'(x)$의 값을 알고 있을 때, $2n+1$ 또는 그보다 낮은 차수의 다항식을 구할 때 사용한다.

20. 미분의 정의로 부터 얻어지나 좀 더 정확한 값을 얻기 위해선 Lagrange polynomial을 미분하여 얻어진다.

21. -0.4268E1, 0.8002E4, -0.5188E-2, 0.1782E-1, 0.3333E0, 0.4285E-2

22. 0.14910E2, -0.91842E-1, 0.30303E4, -0.81818E-1, 0.97656E-3

23. 4.266, 4.38, 4.25, impossible

24. 8.2586, 8.258, 9.90, impossible

25. $24.885 \le d \le 24.995$

26. $26.855 \le d \le 26.965$

27. relative error는 변하지 않는다.

28. 곱셈에서는 raletive error는 더해진다.

29. (6)의 방법으로 $x_1 = 1/2(200 + sqrt200^2 - 4 \times 4) = 0.20002E-1$, $x_2 = 1/2(200 - \sqrt{200^2 + 4 \times 4}) = 1.9998E2$.
(7)의 방법으로 $x_1 = 0.20002E-1$, $x_2 = 1.9998E2$.

30. 분모, 분자에 $\sqrt{x^2+16}+4$를 곱하여 $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16+4}}$를 계산한다.

31. -0.11979406

32. $x_4 = 0.7390851$, $g(x) = \frac{0.74x+\cos x}{1.74}$, $g'(x) = \frac{0.74-\sin x}{1.74}$, 따라서 $|g'(x)|$는 해 $x = 0.7390815$부근에서 충분히 작기 때문에 ($|g'(0.739085) = 0.038$) 빨리 수렴한다.

33. -1.895494($x_0 = -1$), 0($x_0 = 0.5$), 1.895494 ($x_0 = 2$)

34. 0.641714 ($x_0 = 1$)

35. -2.120601($x_0 = -1$), 2.801386($x_0 = 1$)

36. 0.450184 ($x_0 = 1$)

37. 0.80901($x_0 = 1$),-0.80901($x_0 = -1$)

38. linear interpolation : $p_1(x) = \frac{x-1}{0-1} \times 1 + \frac{x-0}{1-0} \times -1 = -2x+1$,
$p_1(0.3) = 0.4$
quadratic interpolation : $p_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \times 1 +$

$\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \times -1 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \times 0 = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + (x^2 - 2x)$,
$p_2(0.3) = 0.085$

39. $p_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-0.5-1)(-0.5-1)} \times (-0.521) + \frac{(x+0.5)(x-1)}{(0+0.5)(0-1)} \times 0 + \frac{(x+0.5)(x-0)}{(1+0.5)(1-0)} \times 1.175$,
$p_2(0.3) = 0.33388$.

40. $p_3(1.3) = 2.969$

41. $f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ f_2 = 4$이므로, $k_0 = -1,\ k_1 = 2,\ k_2 = 5$이다. 따라서,
$a_{00} = 0,\ a_{01} = -1,\ a_{02} = 0,\ a_{03} = 1$,
$a_{10} = 0,\ a_{11} = 2,\ a_{12} = 3,\ a_{13} = -1$,
그러므로, $p_0(x) = -x + x^3,\ p_1(x) = 2(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3$이다.

42. $f_0 = 3,\ f_1 = 1,\ f_2 = 23,\ f_3 = 45$이므로, $k_0 = 3,\ k_1 = 3,\ k_2 = 15,\ k_3 = 3$이다. 따라서,
$a_{00} = 3,\ a_{01} = 3,\ a_{02} = -6,\ a_{03} = 2$
$a_{10} = 1,\ a_{11} = 3,\ a_{12} = 6,\ a_{13} = -1$
$a_{20} = 23,\ a_{21} = 15,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = -1$
그러므로,
$p_0(x) = 3+3(x+1)-6(x+1)^2+2(x+1)^3,\ p_1(x) = 1 + 3(x-1) + 6(x-1)^2 - (x-1)^3,\ p_2(x) = 23 + 15(x-3) - (x-3)^3$.

43. 0.634226224
$K = -\frac{1}{12} \times \frac{1}{25} = -\frac{1}{300}$
$f''(x) = 6x$, 따라서 $M_2 = 6,\ M_2^* = 0,\ -0.02 \le \epsilon \le 0$.

44. $J_{0.5} = 0.90266,\ J_{0.25} = 0.90450,\ \epsilon_{0.25} = 0.00012$

45. $n = 3$일 때, 0.847077059.
$n = 5$일 때, 0.84913877.

CHAPTER 18

Numerical Methods in Linear Algebra

In this chapter we consider some of the most important numerical methods for solving linear systems of equations (Secs. 18.1–18.4), for fitting straight lines or parabolas (Sec. 18.5), and for matrix eigenvalue problems (Secs. 18.6–18.9). These and similar methods are of great practical importance. Indeed, many engineering or other problems, for instance, in statistics, lead to mathematical models whose solution requires methods of numerical linear algebra.

This chapter is independent of Chap. 17 and can be studied immediately after Chap. 6 or 7.

Prerequisite for this chapter: Secs. 6.1, 6.2, 7.1.
Sections that may be omitted in a shorter course: Secs. 18.4–18.6, 18.9.
References: Appendix 1, Part E.
Answers to problems: Appendix 2.

18.1. Linear Systems:Gauss Elimination

1. $x_1 = 7.3,\ x_2 = -3.2$

2. $x_2 = (25/42)x_1,\ x_1$ is arbitrary

3. $x_1 = 0.699x_2 + 1.2057,\ x_2$ is arbitrary

4. $x_1 = 3.1,\ x_2 = -5.2$

5. $x_1 = -1.533x_2 + 10.667,\ x_2$ is arbitrary. Determinant is 0(or rnak is 1).

6. $x_1 = 120,\ x_2 = 0.3$

7. $x_1 = 3,\ x_2 = -5,\ x_3 = 7$

8. $x_1 = 5.3,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2.1$

9. $x_1 = 3.9080,\ x_2 = -1.9980,\ x_3 = 2.5570$

10. $x_1 = -\frac{5}{8}x_3,\ x_2 = \frac{1}{8}x_3,\ x_3$ is arbitrary; rank of the matrix is 2.

11. $x_1 = -x_3 + 5,\ x_2 = -x_3 + 3,\ x_3$ is arbitrary; rank of the matrix is 2.

12. 식 $5x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$ 양변에 2를 곱하고, 식 $-4x_2 + 8x_3 = -3$ 양변에 -3을 곱한다음 변변끼리 더하면 $10x_1 - 6x_2 + 26x_3 = -5$이다. 그러나 $10x_1 - 6x_2 + 26x_3 = 0$로부터 이 연립방정식의 해는 없다.

13. $x_2,\ x_3$ arbitrary, $x_1 = 1.80x_2 + 0.80x_3$, the rank of matrix is 1.

14. $x_1 = -\frac{1}{12},\ x_2 = \frac{7}{6},\ \frac{-}{5}12$

15. $x_1 = 0.142856,\ x_2 = 0.692307,\ x_3 = -0.173912$

16. x_1 is arbitrary, $x_2 = 3x_1 - 5,\ x_3 = -5x_1 + 14$, the rnak of matrix is 2.

17. $x_1 = 1.5,\ x_2 = -3.5,\ x_3 = 4.5,\ x_4 = -2.5$

18. $x_1 = 4.2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.8,\ x_4 = 2.0$

19. (Program)

20. (a) (i)$a \neq 1$ to make $D = a - 1 \neq 0$;
(ii)$a = 1,\ b = 3$
(b) $x_1 = \frac{1}{2}(3x_3 - 1),\ x_2 = \frac{1}{2}(-5x_3 + 7),\ x_3$ arbitrary is the solution of the first system. The second system has o solution.
(c) det A=0 can change to det rm A $\neq$0 because of round-off.
(d) $(1 - \frac{1}{\epsilon})x_2 = 2 - \frac{1}{\epsilon}$이므로 ϵ이 충분히 작다면 $\frac{x_2}{\epsilon} \approx \frac{1}{\epsilon}$으로 볼 수 있으므로 $x_2 = 1$이다. 또, $x_1 = \frac{1-x_2}{\epsilon} \approx 0$.
정확한 해는 $x_1 = \frac{1}{1-\epsilon},\ x_2 = \frac{1-2\epsilon}{1-\epsilon}$. 만약 $\epsilon \to 0$이면 $x_1 = 1,\ x_2 = 1$이다.
(e) exact solution : $x_1 = 1,\ x_2 = -4$.
without pivoting : $x_1 = -4.5,\ x_2 = 1.27$(3-digit)
with pivoting : $x_2 = -6,\ x_1 = 2.08$(3-digit)
without pivoting : $x_1 = -4.095,\ x_2 = 1.051$(4-digit)
with pivoting : $x_2 = -4,\ x_1 = 1$(4-digit)

18.2. Linear Systems: LU-Factorization, Matrix Inversion.

1. L=$\begin{pmatrix} 1.00 & 0 \\ 0.333 & 1.00 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 0 & 0.333 \end{pmatrix}$
$x_1 = -2,\ x_2 = 3$

2. L=$\begin{pmatrix} 1.00 & 0 \\ -2 & 1.00 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$x_1 = 4.25,\ x_2 = -3.67$

3. L=$\begin{pmatrix} 1.00 & 0 \\ 0.2 & 1.00 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 1.8 & 2.6 \\ 0 & 3.2 \end{pmatrix}$
$x_1 = 3,\ x_2 = 3$

4. L=$\begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$

5. L=$\begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.125 & 1 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 10 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0.375 \end{pmatrix}$
$x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.8$

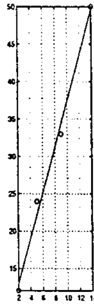
6. L=$\begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ \frac{9}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{13}{61} & 1 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 0 & -\frac{61}{5} & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & \frac{46}{61} \end{pmatrix}$
$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 7$

7. L=$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$x_1 = 17.4,\ x_2 = 23.6,\ x_3 = 30.8$

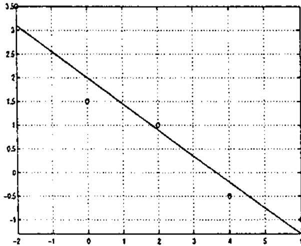
8. L=$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$, U=$\begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$
$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4$

23.9. Regression Analysis. Fitting Straight Lines

1. $y = 6.74074 + 3.0679x$.



2. $y = 2 - 0.55x$.



3. $y = -0.367 + 0.115x$, $R = \dfrac{1}{0.115} = 8.70$.

4. $y = 2.99x$, $k = \dfrac{1}{2.99}$.
5. $y = 0.32923 + 0.00032x$, $y(66) = 0.35035$.
6. $y = -120.5 + 9.15x$, $y(35) = 200$.
7. $q_0 = 6.377$, $c = 4.30$, $K = 0.853$,
   $\mathrm{CONF}_{0.95}\{2.215 \le \kappa_1 \le 3.921\}$.
8. $\bar{x} = 2.5$, $s_x^2 = \dfrac{5}{3}$, $\bar{y} = 7.475$, $s_y^2 = 14.9225$,
   $3s_{xy} = 14.95$, $k_1 = 2.99$, $q_0 = 0.067$, $c = 4.30$,
   자유도 2, $K = 0.35197$,
   $\mathrm{CONF}_{0.95}\{2.63 \le \kappa_1 \le 3.34\}$.
9. $q_0 = 157.65$, $c = 4.30$, $K = 1.707$,
   $\mathrm{CONF}_{0.95}\{7.44 \le \kappa_1 \le 10.86\}$.
10. $$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\bar{x}\sum_{j=1}^{n} x_j + n\bar{x}^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{j=1}^{n} x_j + n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2,$$
$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$$
$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2\right].$$

Chapter 23 Review

1. 표본 : 조사 대상에서 통계 자료로 선정된 것.
   모집단 : 조사의 대상이 되는 전체.
   모집단의 크기가 너무 큰 경우 또는 조사 비용이 많이 들 경우.
2. 그렇지 않다. 약간씩 차이가 난다.
3. 통계에 관한 수학적 모범을 제시한다.
4. 확률 분포에 나타나는 양.
5. Poisson 분포.
6. 불가능.
7. 한점 근사, 구간 근사. 구간의 중점을 근사값으로 택하고 구간의 절반을 오차 한계로 여길 수 있기 때문에 구간 근사를 선호한다.
8. 근사 (likelihood) 함수를 최대로 되게 하는 매개 변수를 근사.
9. 보통의 경우 실수 전 구간을 얻게 되어 의미있는 것을 얻지 못한다.
10. 모집단에서 추출된 표본에서 얻는 결과를 가지고 가설의 진위를 확률로 판정하는 방법. 판단의 근거. 맞는 가설을 기각할 경우와 틀린 가설을 채택할 경우.
11. 가설 : 모집단의 분포에 대한 어떤 예상.
    유의 수준 : 가설 검증에서 기준으로 정한 확률.
12. 줄어 든다.
13. 줄어 든다.
14. 대상 분포를 정규 분포에 근사하는 것으로 두고 그 성향을 조사하는 경우. 정규 분포와 유사한 두 분포를 서로 비교할 경우.
15. 확률 분포 함수가 정규 분포를 따르는 지를 검증.
16. 확률 분포 함수가 알려지지 않았거나 알려졌더라도 특별히 고안된 검증법이 없는 경우. 모든 경우에 적용 가능.
17. 기각역이 양쪽에 있는 경우와 한 쪽에만 있는 경우.
18. UCL, CL, LCL 을 이용.
19. 검증에서와 같이 확률이 일정이사인지에 따라 채택, 기각한다.
20. 검증을 이용하면 적은 비용으로 효율적으로 관리할 수 있다. 검증력이 낮을 때는 표본 크기를 조절한다.
21. F 분포 검증.
22. 직선에서 각 점에 이르는 거리의 제곱의 합이 최소가 되는 직선을 구하라.
23. $\dfrac{s_{xy}}{s_x^2}$.
24. $\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$.
25. 독립인 두 확률 변수는 상관 관계가 없다. 두 확률 변수가 상관 관계가 없어도 종속일 수 있다.
26. $\bar{x} = 20.325$, $s^2 = 4.551$, $s = 2.133$.
27. $\bar{x} = 0.268$, $s^2 = 1.052$, $s = 1.026$.
28. $\hat{\mu} = 20.325$, $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{7}{8}s^2 = 3.982$.

29. $\hat{\mu} = 0.268$, $\hat{\sigma}^2 = 0.947$.
30. $k = \dfrac{c\sigma}{\sqrt{n}} = 0.44$, $\text{CONF}_{0.95}\{21.56 \le \mu \le 22.44\}$.
31. 구간이 2 배로 된다.
32. $k = \dfrac{c\sigma}{\sqrt{n}} = 3.0$, $\text{CONF}_{0.99}\{28.4 \le \mu \le 34.4\}$.
33. $\text{CONF}_{0.99}\{27.94 \le \mu \le 34.81\}$. 15% 더 길다.
34. 자유도 24, t-분포표 이용,
    $k = 2.06 \cdot \dfrac{7}{25} = 2.9$,
    $\text{CONF}_{0.95}\{113.1 \le \mu \le 118.9\}$.
35. $\text{CONF}_{0.95}\{29.85 \le \sigma^2 \le 94.84\}$.
36. $n - 1 = 3$, χ^2-분포표 이용,
    $F(c_1) = 0.025 \Rightarrow c_1 = 0.22$,
    $F(c_2) = 0.975 \Rightarrow c_2 = 9.35$,
    $k_1 = (n-1)\dfrac{s^2}{c_1} = \dfrac{0.05}{0.22} = 0.227$,
    $k_2 = (n-1)\dfrac{s^2}{c_2} = \dfrac{0.05}{9.35} = 0.005$,
    $\text{CONF}_{0.95}\{0.005 \le \sigma^2 \le 0.227\}$.
37. 가설 : $\mu_0 = 15.0$, 대안 : $\mu_1 = 14.5$,
    좌 단측 검증, 정규 분포표 이용,
    $\Phi(\bar{X} < c)_{15.0} = \Phi\left(\dfrac{c - 15.0}{\sqrt{0.025}}\right) = 0.05$
    $\Rightarrow c = 14.74 > 14.5$,
    가설 기각.
38. 양측 검증, $\dfrac{\sigma^2}{n} = 0.025$, 정규 분포표 이용,
    $\Phi(\bar{X} < c)_{15.0} = \Phi\left(\dfrac{c - 15.0}{\sqrt{0.025}}\right) = 0.975$
    $\Rightarrow c = 15.31$,
    신뢰 구간의 좌측 끝점 : $15.0 - 0.31 = 14.69$,
    $\bar{x} = 14.5 < 14.69$, 가설 기각.
39. $\Phi\left(\dfrac{14.74 - 14.50}{\sqrt{0.025}}\right) = 0.9355$.
40. 우 단측 검증, $n - 1 = 19$, t-분포표 이용,
    $\Phi(T > c)_{\mu_0} = 0.01 \Rightarrow \Phi(T \le c)_{\mu_0} = 0.99$
    $\Rightarrow c = 2.54$,
    $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = 7.35 > c$, 가설 기각.
41. 우 단측 검증, $n - 1 = 99$, t-분포표 이용,
    $\Phi(T > c)_{\mu_0} = 0.01 \Rightarrow \Phi(T \le c)_{\mu_0} = 0.99$
    $\Rightarrow c = 2.37$,
    $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = 5 > c$,
    가설 기각. 제작자의 이의 타당.
42. 자유도 2, $\alpha = 5\%$, $c = 2.92$,
    $\bar{x} = 376.3$, $\bar{y} = 335.3$, $s_1^2 = 1009.3$, $s_2^2 = 869.3$,
    $t_0 = 1.64 < c$, 가설 기각 불능.
43. $2.58 \cdot \dfrac{\sqrt{0.00024}}{\sqrt{2}} = 0.028$,
    LCL $= 2.722$, UCL $= 2.778$.
44. 표본 크기 n 이 유한하기 때문이다.
45. (a) $(1-\theta)^5$.
    (b) $(1-\theta)^5 + 5\theta(1-\theta)^4$.
46. $\theta = 0.01$, $\alpha = 1 - (1-\theta)^6 = 5.85\%$,
    $\theta = 15\%$, $\beta = (1-\theta)^6 = 37.7\%$,
    n 이 증가하면 α 는 증가, β 는 감소한다.
47. $\chi_0^2 = \dfrac{20^2 + 30^2 + 0^2 + 20^2 + 30^2}{480}$
    $= 5.42 < c = 9.49$.
    가설 채택.
48. 길이가 같은 막대기 두개는 제외, 표본 수 : 18,
    가설 : 조절할 필요 없슴
    (긴 막대와 짧은 막대의 확률이 $\frac{1}{2}$),
    대안 : 조절할 필요 있슴,
    세개 이하의 짧은 막대가 나올 확률
    $P = \left(\frac{1}{2}\right)^{18}(1 + 18 + 153 + 816) = 0.0038$,
    가설 기각. 대안 채택.
49. $y = 0.2 + 0.067x$.
50. $y = 3.4 - 1.85x$.

9. $L=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&5&0\\4&8&7\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&5&8\\0&0&7\end{pmatrix}$
$x_1 = 8,\ x_2 = 0,\ x_3 = -4$

10. $L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\3&-1&3&0\\2&0&-1&4\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1&-1&3&2\\0&2&-1&0\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$
$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 4,\ x_4 = -1$

11. $L=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&1&0&0\\2&1&1&0\\0&2&1&2\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}2&1&2&0\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$
$x_1 = 3.5,\ x_2 = --0.5714,\ x_3 = -0.7143,\ x_4 = -7.1429$

12. $-\mathbf{A}$: $\mathbf{x^T}(-\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{x^T}\mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{0}$, not positive definite.
$\mathbf{A^T}$: $\mathbf{x^T}(\mathbf{A^T})\mathbf{x} = (\mathbf{x^T}\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathbf{T} > \mathbf{0}$ positive definite.
$\mathbf{A}+\mathbf{B}$: $\mathbf{x^T}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{x^T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x^T}\mathbf{B}\mathbf{x} < \mathbf{0}$ positive definite.
$\mathbf{A}-\mathbf{B}$: $\mathbf{x^T}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{x^T}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x^T}\mathbf{B}\mathbf{x}$ 부호를 정할 수 없다. not positive definite.

13. (Program)

14. (a) $\mathbf{L} = [l_{jk}]$,그리고 $\mathbf{U} = [u_{jk}]$라고하면,
$l_{j1} = a_{j1} \quad ,j = 1,\cdots,n$
$u_{1k} = \frac{a_{1k}}{l_{11}} \quad ,k = 2,\cdots,n$
$l_{jk} = a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{js}u_{sk} \quad ,j = k,\cdots,n;\ k \le 2$
$u_{jk} = \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{jk} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{js}u_{sk}\right)$,
$k = j+1,\cdots,n;\ j \le 2$
(b) $L=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}3&2\\0&5\end{pmatrix}$
$x_1 = 4,\ x_2 = 3$
$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&9&0\\2&12&4\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$
$x_1 = 278,\ x_2 = 41,\ x_3 = -16.5$
(c) Doolittle method:
$L=\begin{pmatrix}1&-4&2\\-4&1&0\\2&\frac{4}{3}&1\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&9&12\\0&0&4\end{pmatrix}$
Cholesky factorization :
$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&3&0\\2&4&2\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1&-4&2\\0&3&4\\0&0&2\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix}-3.5&1.25\\3&-1\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}\frac{11}{2}&-5&1\\-7&\frac{23}{3}&-\frac{5}{3}\\1&-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix}0.1224&-0.4082&0.0612\\0.0816&0.0612&0.0408\\-0.9184&1.0612&0.0408\end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix}0.2222&-0.2222&0.1111\\0.1111&0.2222&0.2222\\0.2222&0.1111&-0.2222\end{pmatrix}$

19. det(A)=0 not exist inverse matrix.

20. 비록 det(A)=0이지만 round error 때문에 det(A)≠0일 수 있다. 따라서 일차연립방정식의 해가 존재할 수 도 있게 된다.
(a)-0.00000035, (b)-0.0001998 (c)-0.00028189 (d)0.002012, (e)0.0002

18.3. Linaer Systems:Solution by iteration

1. 9 step에서 해에 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	3.2	-0.8	4.375
2	2.21	1.135	3.89688
3	2.01425	0.94487	4.01711
4	2.00418	1.00750	3.99613
5	2.0004	0.99805	4.00071
6	2.0001	1.00033	3.99985
7	1.99999	0.99992	4.00002
8	2.	1.00001	3.99999
9	2.	1.	4.
10	2.	1.	4.

2. 7 step에서 해에 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	5.5	-9.625	5.84375
2	2.84375	-9.07812	5.98047
3	2.98047	-9.00977	5.99756
4	2.99756	-9.00122	5.99969
5	2.99969	-9.00015	5.99996
6	2.99996	-9.00001	6
7	3.	-9.	6.
8	3.	-9.	6.

3. 4 step에서 해에 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	0.4	0.46	0.514
2	0.5026	0.49834	0.49991
3	0.50018	0.49999	0.49998
4	0.5	0.5	0.5
5	0.5	0.5	0.5

4. 첫번째 식과 세번째 식을 바꾼다.
9 step에서 해에 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	-1.8125	3.0521	3.95
2	-2.6943	2.2157	4.6554
3	-2.5734	1.9604	4.5587
4	-2.4974	1.9800	4.4980
5	-2.4947	1.9998	4.4958
6	-2.4994	2.0013	4.4995
7	-2.5003	2.0002	4.5002
8	-2.5001	1.9999	4.5001
9	-2.5	2.	4.5

5. 첫번째 식을 두번째로, 두번째 식을 세번째로, 세번째 식을 첫번째로 바꾼다.
9 step에서 해에 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	17.5	2.2778	11.0347
2	15.6146	4.7172	11.8110
3	15.0786	4.9493	11.9740
4	15.0128	4.9928	11.9959
5	15.0019	4.9989	11.9994
6	15.0003	4.9998	11.9999
7	15.	5.	12.

6. 10번째 step에서도 해 2, 0, 1에 수렴하지 않는다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	1.33333	0.22222	1.37037
2	1.72890	-0.15638	1.23320
3	2.02652	-0.16430	1.03709
4	2.09717	-0.05712	0.95426
5	2.05333	0.01272	0.96021
6	2.00478	0.02493	0.98850
7	1.98721	0.01193	1.00455
8	1.99053	0.00012	1.00627
9	1.99783	-0.00346	1.00260
10	2.00144	-0.00221	0.99978
⋮	⋮	⋮	⋮
30	2.	0.	1.

7. (a) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$인 경우 4 step에서 해 0.5, 0.5, 0.5에 다다른다.
(b) (a)와 마찬가자로 5step에서 해에 다다른다.
따라서 일반적으로 시작하는 값에 상관없이 수렴한다.

8. (a)에서
$\mathbf{C} = -(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ -0.09 & -0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -0.100 & -0.100 \\ 0 & 0.010 & -0.090 \\ 0 & 0.009 & 0.019 \end{pmatrix}.$$

따라서 $\|\mathbf{C}\| = 0.2 < 1$. 그러므로 iteration이 수렴한다.
(b)에서
$\mathbf{C} = -(\mathbf{I}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 \\ 99 & -10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 0 & -10 & -99 \\ 0 & 99 & 980 \end{pmatrix}.$$

따라서 고유치를 구해보면

$$\lambda \begin{vmatrix} -\lambda - 10 & -99 \\ 99 & -\lambda + 980 \end{vmatrix}$$

$= \lambda(\lambda^2 - 970\lambda + 1)$.
따라서 적어도 하나의 고유치는 1보다 크므로 iteration이 발산한다.

9. (Program)

10. 5번째 step에서는 해에 다다르지 못하고 12번째 step에서야 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	5.5	-10.75	8.5
2	2.5625	-7.75	5.5625
3	3.3125	-9.2188	6.3125
4	2.9453	-8.8437	5.9453
5	3.0391	-9.0273	6.0391
⋮	⋮	⋮	⋮
12	3.0000	-9.0000	6.0000

Gauss-Seidel에서 5 Step : 2.99969 ,-9.00015,5.99996

11. 5번째 step에서는 해에 다다르지 못하고 10번째 step에서야 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	3.2	-0.25	4.25
2	2.15	0.825	4.16875
3	1.9675	1.04687	4.02812
4	1.97938	1.02219	3.99054
5	1.99934	1.00043	3.99684
⋮	⋮	⋮	⋮
10	2.	1.	4.

Gauss-Seidel에서 5 Step : 2.0004, 0.99805, 4.00071

12. 첫번째 식과 세번째 식을 바꾼다. 5번째 step에서는 해에 다다르지 못하고 18번째 step에서야 다다른다.

n-step	x_1^n	x_2^n	x_3^n
0	1	1	1
1	-1.8125	2.583333	1.7
2	-2.29583	2.81875	3.95
3	-2.63593	2.14930	4.33667
4	-2.51691	2.07710	4.60875
5	-2.53287	1.96657	4.51352
⋮	⋮	⋮	⋮
18	-2.5	2.0	4.5

Gauss-Seidel에서 5 Step : -2.4947, 1.9998, 4.4958

13. 첫번째 식과 세번째 식을 바꾸고 대각원소로 나누면, 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/8 \\ 1/6 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$ 이 된다.따라서 $I - A$의 고유치는 $\lambda^3 - 0.1417\lambda + 0.0667 = 0$의 해이므로 해는 -0.5196, 0.2598 + 0.2466i, 0.2598 - 0.2466이다. 따라서 고유치의 절대값이 모두 1보다 작으므로 수렴한다.

14. $I - A$의 고유치는 0.5, 0.5, -1이므로 고유치의 절대값이 1보다 작지 않다. 따라서 Jacobi iteration에서 발산한다.

15. (9) $\sqrt{128} = 11.3137$. (10) 12. (11) 13.

16. (9) $\sqrt{52} = 7.2$. (10) 6. (11) 6.

17. (9) $\sqrt{3(2t^2+1)}$. (10) $|2t+1|$. (11) $|2t+1|$.

18. (9) $3a$. (10) $3a$. (11) $3a$.

19. (9) $\sqrt{230491} = 480.0948$. (10) 520. (11) 520

20. (9) $\sqrt{300} = 17.32$. (10) 10. (11) 10

18.4. Linear System : Ill-Conditioning, Norms

1. (5) 24 (6) $\sqrt{218} = 14.7648$ (7) 12 , $[\frac{7}{12}\ \ -1\ \ \frac{5}{12}\ \ 0]$

2. (5) 12 (6) $\sqrt{50} = 7.07$ (7) 5, $[\frac{3}{5}\ \ \frac{4}{5}\ \ -1]$

3. (5) 9.3 (6) $\sqrt{0.8^2 + 7.1^2 + 1.4^2}$=7.2808 (7) 7.1, $[\frac{0.8}{7.1}\ \ -1\ \ \frac{1.4}{7.1}]$

4. (5) 5 (6) $\sqrt{5}$ (7) 1, $[1\ 1\ 1\ 1]$

5. (5) 24 (6) 12 (7) 6, $[1\ 1\ 1\ 1]$

6. (5) 1 (6) 1 (7) 1, $[0\ 0\ 0\ 1\ 0]$

7. matrix norm :
l_1 vector norm일 때, 4
l_∞ vector norm일 때, 5
inverse matrix $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$,
condition number :
l_1 vector norm일 때, $4 \cdot 5 = 20$,
l_∞ vector norm일 때, $5 \cdot 4 = 20$.

8. matrix norm :
l_1 vector norm일 때, 2
l_∞ vector norm일 때, 2
inverse matrix $\begin{pmatrix} -0.75 & 1.25 \\ 1.25 & -0.75 \end{pmatrix}$,
condition number :
l_1 vector norm일 때, $2 \cdot 2 = 4$,
l_∞ vector norm일 때, $2 \cdot 2 = 4$.

9. matrix norm :
l_1 vector norm일 때, 22
l_∞ vector norm일 때, 20
inverse matrix $\begin{pmatrix} 4.5 & 6.5 \\ 2.5 & 3.5 \end{pmatrix}$,
condition number :
l_1 vector norm일 때, $22 \cdot 10 = 220$,
l_∞ vector norm일 때, $20 \cdot 11 = 220$.

10. matrix norm :
l_1 vector norm일 때, 5.5
l_∞ vector norm일 때, 5.5
inverse matrix $\begin{pmatrix} 10 & -60 & 60 \\ 3 & -12 & 10 \\ -12 & 64 & -60 \end{pmatrix}$,
condition number :
l_1 vector norm일 때, $5.5 \cdot 136 = 748$,
l_∞ vector norm일 때, $5.5 \cdot 136 = 748$.

11. matrix norm :
l_1 vector norm일 때, 200
l_∞ vector norm일 때, 200
inverse matrix $\begin{pmatrix} -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$,
condition number :
l_1 vector norm일 때, $200 \cdot 25 = 5000$,
l_∞ vector norm일 때, $200 \cdot 25 = 5000$.

12. matrix norm :
l_1 vector norm일 때, 19
l_∞ vector norm일 때, 21
inverse matrix $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,
condition number :
l_1 vector norm일 때, $19 \cdot 13 = 247$,
l_∞ vector norm일 때, $21 \cdot 13 = 273$.

13. $Ax = \begin{pmatrix} 58 \\ 39 \\ -167 \end{pmatrix}$, 따라서 $||Ax|| = 167$.
$||A|| = 21$, $||x|| = 15$, 따라서 $||A|| \cdot ||x|| = 315$. 그

러므로 (11)번의 내용과 같다.

14. $\mathbf{b}_1$일 때, $x_1 = 1,\ x_2 = 1$
$\mathbf{b}_2$일 때, $x_1 = 0.845455,\ x_2 = 1.27273$
l_∞ vector norm으로 condition number를 구해보면 $\kappa(\mathbf{A}) = 200.8$. condition numbe는 크지만 이러한 벡터들에 대해서는 ill-conditioning을 보일 수 없다.

15. $\mathbf{b}_1$일 때, $x_1 = -2,\ x_2 = 4$
$\mathbf{b}_2$일 때, $x_1 = -144,\ x_2 = 184$
l_∞ vector norm으로 condition number를 구해보면 $\kappa(\mathbf{A}) = 21318$,Thus this system is ill-conditioning.

16. The residual is $[0.145\ 0.120]^\mathbf{T}$

17. $\tilde{\mathbf{x}}$=$[-2.03\ 4.038]^\mathbf{T}$로 두면 $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = [5.1994.0999]^\mathbf{T}$. 따라서 residual은 $[0.0001\ 0.0001]^\mathbf{T}$.

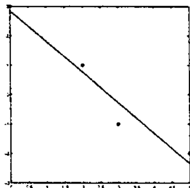
18. (12)번에 의하여
$1 = ||\mathbf{I}|| = ||\mathbf{AA}^{-1}|| \le ||\mathbf{A}||\ ||\mathbf{A}^{-1}|| = \kappa(\mathbf{A})$.
Frobenius norm에 대하여, $\sqrt{n} = ||\mathbf{I}|| \le \kappa(\mathbf{A})$.

19. $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때, condition number는 27, 748, 28375, 943656, 29070279.

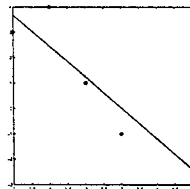
20. (a) $||\mathbf{x}||_\infty = \max|x_j| \le \sum|x_k| = ||\mathbf{x}||_1 \le n\max|x_j| = n\,||\mathbf{x}||_\infty$
식 (18b)는 (18 a)식으로 부터 n을 나눔으로써 쉽게 얻어진다.
(b) To get the first inequality in (19a) consider the sequare of both sides and then take sqare roots on both sides. The second inequality in (19a) follows by means of the Cauchy-Schwarz inequality and a little trick worth remembering,
$\sum|x_j| = \sum 1\cdot|x_j| \le \sqrt{\sum 1^2}\sqrt{\sum|x_j|^2} = \sqrt{n}||\mathbf{x}||_2$
(19b)는 (19a)를 $\sqrt{n}$으로 나눔으로써 얻어진다.
(c) Let $\mathbf{x} \ne 0$. Set $\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||\mathbf{y}$. Then $||\mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}||/||\mathbf{y}|| = 1$. Also,$\mathbf{Ax} = \mathbf{A}(||\mathbf{x}||\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}||\mathbf{Ay}$ since $||\mathbf{x}||$ is a number. Hence $||\mathbf{Ax}||/||\mathbf{x}|| = ||\mathbf{Ay}||$, and in (9), instead of takin the maximun over all $\mathbf{x} \ne 0$, since $||\mathbf{y}|| = 1$ we only take the maximum over all $\mathbf{y}$ of norm 1. Write $\mathbf{x}$ for $\mathbf{y}$ to get (10) from this.
(d) 문제 13번에서 예를 보였고 증명은 당연하다.

18.5. Method of Least Squares

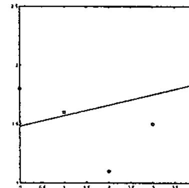
1. $n = 4,\ \sum x_j = 10,\ \sum y_j = 1,\ \sum x_j^2 = 38,\ \sum x_jy_j = -11$
$y = 2.8462 - 1.0385x$.



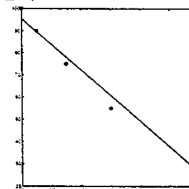
2. $n = 5,\ \sum x_j = 11,\ \sum y_j = 5,\ \sum x_j^2 = 39,\ \sum x_jy_j = -7$
$y = 3.6757 - 1.2162x$.



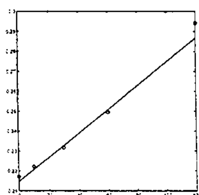
3. $n = 5,\ \sum x_j = 10,\ \sum y_j = 8.3,\ \sum x_j^2 = 30,\ \sum x_jy_j = 17.5$
$y = 1.48 + 0.09x$.



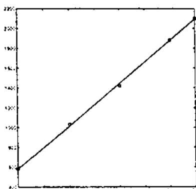
4. $n = 5,\ \sum x_j = 220,\ \sum y_j = 350,\ \sum x_j^2 = 19000,\ \sum x_jy_j = 10050$
$y = 95.2575 - 0.5740t$. $t = 0[min]$은 12:00에 해당한다.



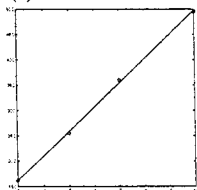
5. $y = [0.2171\ 0.2222\ 0.2316\ 0.2495\ 0.2940]^\mathbf{T}$이므로 $n = 5,\ \sum x_j = 220,\ \sum y_j = 1.2146,\ \sum x_j^2 = 19000,\ \sum x_jy_j = 59.4250$
$y = 0.2147 + 0.0006t$. $t = 0[min]$은 12:00에 해당한다.



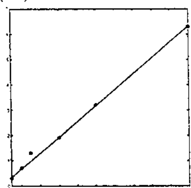
6. $n = 5$, $\sum x_j = 2950$, $\sum y_j = 7010$, $\sum x_j^2 = 1822500$, $\sum x_j y_j = 4490000$
$y = -1145.79 + 4.32x$.



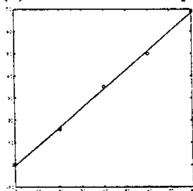
7. $U(i) = 18.7009 + 47.8879 * i$, 따라서 $R = 47.8879$



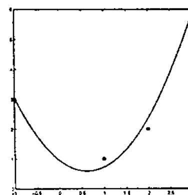
8. $s(F) = 0.033 + 0.314F$, 따라서 $k = F/s = 3.185$.



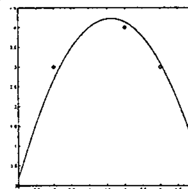
9. $y(t) = -0.4 + 0.86t[mi]$ 따라서 $v = b_1$.



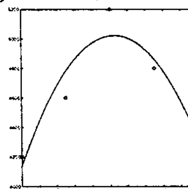
10. $n = 4$, $\sum x_j = 5$, $\sum x_j^2 = 15$, $\sum x_j^3 = 35$, $\sum x_j^4 = 99$, $\sum y_j = 12$, $\sum x_j y_j = 20$, $\sum x_j^2 y_j = 66$
$y = 0.9545 - 1.1591x + 0.9318x^2$.



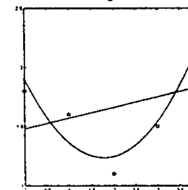
11. $n = 5$, $\sum x_j = 23$, $\sum x_j^2 = 123$, $\sum x_j^3 = 719$, $\sum x_j^4 = 4419$, $\sum y_j = 11$, $\sum x_j y_j = 54$, $\sum x_j^2 y_j = 284$
$y = -8.3571 + 5.4464x - 0.5893x^2$.



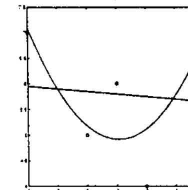
12. $n = 5$, $\sum x_j = 50$, $\sum x_j^2 = 563$, $\sum x_j^3 = 6875$, $\sum x_j^4 = 88828$, $\sum y_j = 23100$, $\sum x_j y_j = 232000$, $\sum x_j^2 y_j = 2601250$
$y = 1660 + 656x - 32x^2$.



13. fit a parabola : $1.8943 - 0.7386x + 0.2071x^2$
fit a line : $y = 1.48 + 0.09x$



14. $5.9 - 0.05x$; $5.9 - 0.95x + 0.23x^2$



15. $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8.3 \\ 17.5 \\ 56.3 \end{pmatrix}$ 따라서
$L = \begin{pmatrix} 2.2361 & 0 & 0 \\ 4.4721 & 3.1623 & 0 \\ 13.4164 & 12.6491 & 3.7417 \end{pmatrix}$, $U = L^T$. 따라서 $x = \begin{pmatrix} 1.8943 \\ -0.7386 \\ 0.2071 \end{pmatrix}$

16. $b_0 n + b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 + b_3 \sum x_j^3 = \sum y_j$
$b_0 \sum x_j + b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 + b_3 \sum x_j^4 = \sum x_j y_j$
$b_0 \sum x_j^2 + b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 + b_3 \sum x_j^5 = \sum x_j^2 y_j$
$b_0 \sum x_j^3 + b_1 \sum x_j^4 + b_2 \sum x_j^5 + b_3 \sum x_j^6 = \sum x_j^3 y_j$

17. $n = 6$, $\sum x_j = 4$, $\sum x_j^2 = 26$, $\sum x_j^3 = 64$, $\sum x_j^4 = 290$, $\sum x_j^5 = 1024$, $\sum x_j^6 = 4226$, $\sum y_j = 87$, $\sum x_j y_j = 362$, $\sum x_j^2 y_j = 1298$, $\sum x_j^3 y_j = 5282$
$y = 0.9161 + 0.2262x + 0.2371x^2 + 1.1630x^3$.

18. (2)의 방법 : $n = 6$, $\sum x_j = -0.25$, $\sum x_j^2 = 10.3125$, $\sum y_j = -1$, $\sum x_j y_j = 3.6250$
$y = -0.1522 + 0.3478x$
(7)의 방법 : $n = 6$, $\sum x_j = -0.25$, $\sum x_j^2 = 10.3125$, $\sum x_j^3 = -0.1094$, $\sum x_j^4 = 34.0664$, $\sum y_j = -1$, $\sum x_j y_j = 3.625$, $\sum x_j^2 y_j = -3.9062$
$y = 0.0899 + 0.3522x - 0.1408x^2$

Cubic parabola : $n = 6$, $\sum x_j = -0.25$, $\sum x_j^2 = 10.3125$, $\sum x_j^3 = -0.1094$, $\sum x_j^4 = 34.0664$, $\sum x_j^5 = -0.0303$, $\sum x_j^6 = 130.0159$, $\sum y_j = -1$, $\sum x_j y_j = 3.625$, $\sum x_j^2 y_j = -3.9062$, $\sum x_j^3 y_j = 21.9297$
$y = -0.0329 - 1.5429x - 0.1091x^2 + 0.5729x^3$

19. (Program)

20. (a) $F_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j y_k$로 두면
$||f - F_m||^2 = \int_a^b f^2 dx - 2\sum_{j=0}^{m} a_j \int_a^b f y_j dx + \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{m} a_j a_k \int_a^b y_j y_k dx.$
이 식에서 $\frac{\partial}{\partial x_l}||f - F_m|| = 0$이어야 한다. 따라서
$0 - 2\int_a^b f y_l dx + 2\sum_{j=0}^{m} a_j \int_a^b y_j y_l dx = 0.$
이 식을 정리하면 된다.
(b) 식은 $\int_a^b y_j y_l dx = \int_a^b x^{j+l} dx$이 되고,
구간 $0 \le x \le 1$일 때, $\int_a^b y_j y_l dx = \frac{1}{j+l+1}$, $(j = 0, 1, \cdots, m)$
(c) $a_l = \frac{b_l}{||y_l||^2}$, $b_l = \int_a^b f(x) y_j(x) dx$ $(l = 0, 1, \cdots, m)$.

18.7. Inclusion of Matrix Eigenvalues

1. $|\lambda - 5.1| \le 0.5$, $|\lambda - 4.9| \le 0.7$, $|\lambda + 6.8| \le 0.4$.
eigenvalue : $4.9957 + 0.3865i$, $4.9957 - 0.3865i$, -6.7915

2. Symmtric matrix; hence we get intervals on the real axis, $9.7 \le \lambda \le 10.3$, $5.9 \le \lambda \le 6.1$, $2.8 \le \lambda \le 3.2$.
eigenvalue : 10.0082, 5.99751, 2.99429

3. Symmtric matrix; hence we get intervals on the real axis,$4.98 \le \lambda \le 5.02$, $7.98 \le \lambda \le 8.02$, $8.98 \le \lambda \le 9.02$.
eigenvalue : 4.99, 4.99, 5.02

4. $|\lambda - i| \le 0.5 + \sqrt{2}$, $|\lambda| \le \sqrt{2} + \sqrt{5}$, $|\lambda - (3+4i)| \le 2$.
eigenvalue : $-0.0933282 + 1.061i$, $-0.403385 - 0.72446i$, $3.49671 + 4.66356i$

5. $|\lambda - 5| \le 4$, $|\lambda| \le 6$, $|\lambda - 7| \le 6$.
eigenvalue : 4, 9, -1

6. $|\lambda| \le 1.3$, $|\lambda - 0.2| \le 2.0$, $|\lambda - 1.2| \le 0.1$.
eigenvalue : $0.108609 + 0.742484i$, $0.108609 - 0.742484i$, 1.182781

7. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$로 잡으면
$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} 5 & 0.0001 & 0.0001 \\ 1 & 5 & 0.01 \\ 1 & 0.01 & 5 \end{pmatrix}$. 그러면 radius는 1/100만큼 줄어든다.

8. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{34} \end{pmatrix}$로 잡으면
$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} 10 & 0.1 & -6.8 \\ 0.1 & 6 & 0 \\ -\frac{0.2}{34} & 0 & 3 \end{pmatrix}$.이때, 3을 중심으로 하는 원은 10을 중심으로 하는 원과 만나지 않으며, 반지름은 줄어들었다.

9. eigenvalue들은 모두 real 이고 대각원소와의 차가 10^{-3}이하이다.

10. 예 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$일 때, eigenvalues : -1, 1

11. $\rho = max\{|\lambda \ : \ \lambda \ eigenvalue \ of \ A\ \}$이므로
$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \ge ||Au|| = ||\lambda u|| = ||\lambda||$

12. Let $S = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_p$ without restriction, where D_j is the Gerschgorin disk with center a_{jj}. We write $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, where $\mathbf{B} = diag(a_{jj})$ is the diagonal matrix with the main diagonal of $\mathbf{A}$ as its diagonal. We now consider
$\mathbf{A}_t = \mathbf{B} + t\mathbf{C}$ *for* $0 \le t \le 1$.
Then $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}$ and $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$. Now by algebra, the rots of the characteristic polynomial $f_t(\lambda)$ of $\mathbf{A}_t$(that is, the eigenvalues of $\mathbf{A}_t$) depend continuously on the coefficients of $f_t(\lambda)$, which in turn depend continuously on t. For $t = 0$, the eigenvalues are $a_{11}, \cdots, a_{nn}$. If we let t increase continuously from 0 to 1, the eigenvalues move continuously and, by Theorem 1, for each t lie in the Gerschgorin disks with centers a_{jj} and radii tr_j where $r_j = \sum_{k \ne j} |a_{jk}|$. Since at the end, S is disjoint from the other disks, the assertion follows.

13. 증명은 'A가 LU decomposition 가능하다'를 귀납법을 사용하여 증명하자.
먼저 A가 1×1 matrix일 때는 당연하다.
A가 $n-1 \times n-1$ matrix일 때까지 LU decomposition 이 되었다고 보자.그러면 $A = \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ v & C \end{pmatrix}$로 두면,(이때, α는 1×1 matrix이다.)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v}{\alpha} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C - \frac{vw^T}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & w^T \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$
따라서 우리는 $B = C - \frac{vw^T}{\alpha}$가 strictly diagonally dominant되어있다는 것만 증명하면 된다.
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n-1} |b_{ij}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n-1} |c_{ij} - \frac{v_i w_j}{\alpha}|$$
$$\le \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n-1} |c_{ij}| + \frac{|w_j|}{\alpha} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n-1} |v_i|$$
$$\le (|c_{jj}| - |w_j|) + \frac{|w_j|}{\alpha}(|\alpha| - |v_j|)$$
$$\le |c_{jj} - \frac{w_j v_j}{\alpha}| = |b_{jj}|.$$

14. A가 Hermitian이란 것은 $A = \overline{A}^T$, 따라서 normal은 당연
A가 skew-Hermitian이란 것은 $A = -\overline{A}^T$, 따라서 normal은 당연
A가 unitary이란 것은 $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = I$, 따라서 normal은 당연

15. $AA^T = \begin{pmatrix} 33 & 18 & 30 \\ 18 & 20 & 36 \\ 30 & 36 & 69 \end{pmatrix}$ not normal.

16. $A^2(A^2)^T = AAA^TA^T = AA^TAA^T = A^TA^TAA$, yes.
$(AB)(AB)^T = (AB)^T(AB)$ iff $B^TA = AB^T$; no, in general.
$CC^T - C^TC$ is symmetic, hence normal.

17. no. $\begin{pmatrix} 26 & 2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$ 에서 보듯이 $|\lambda| \le 44.1475$이지만, Theorem 1에 의하면 $22 \le \lambda \le 30$, $17 \le \lambda \le 27$, $22 \le \lambda \le 34$ 로 (4)식 보다 범위가 더 작다.

18. $x = [1\ 1\ 1]^T$, $y = Ax = [29\ 37\ 29]^T$, 따라서 $29 \le \lambda \le 37$.
$x = [1\ 2\ 1]^T$, $y = Ax = [29\ 37\ 29]^T$, 따라서 $29 \le \lambda \le 37$.
$x = [2\ 3\ 2]^T$, $y = Ax = [66\ 95\ 66]^T$, 따라서 $31.7 \le \lambda \le 33$.

19. $x = [1\ 2\ 1]^T$, $y = Ax = [8\ 12\ 8]^T$, 따라서 $6 \le \lambda \le 8$.
$x = [1\ 1\ 1]^T$, $y = Ax = [7\ 7\ 7]^T$, 따라서 $7 \le \lambda \le 7$.

20. (Program)

18.8. Eigenvalues by iteration(Power Method)

1. $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 145 \\ 73 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1597 \\ 799 \end{pmatrix}$

j	1	2	3
m_0	2	218	26354
m_1	20	2396	289892
m_2	218	26354	3188810
q	10	10.99082	10.99992
error bound	3.0	0.302752	0.027548

2. $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 33 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 195 \\ -101 \end{pmatrix}$

j	1	2	3
m_0	2	34	1090
m_1	-2	94	6334
m_2	34	1090	48226
q	-1	2.76470588	5.81100917
error bound	4	4.94117647	3.23669725

3. $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} 3.6 \\ -1.6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 19.44 \\ -16.16 \\ 16.24 \end{pmatrix}$,
$x_3 = \begin{pmatrix} 128.304 \\ -122.464 \\ 122.48 \end{pmatrix}$

j	1	2	3
m_0	3	19.52	902.796
m_1	4	128.32	6462.3232
m_2	19.52	902.7968	46460.7
q	1.33333	6.57377	7.15811
error bound	2.1746	1.74223	0.47378

4. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix}8\\14\\12\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}88\\172\\144\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}1040\\2072\\1728\end{pmatrix}$

j	1	2	3
m_0	3	404	58064
m_1	34	4840	696736
m_2	404	58064	8360768
q	11.3333	11.9802	11.9994
error bound	2.4944	0.44455	0.074235

5. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\2\\3\end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix}5\\3\\3\\5\end{pmatrix}$

j	1	2	3
m_0	4	10	26
m_1	6	16	42
m_2	10	26	68
q	1.5	1.6	1.6153846
error bound	0.5	0.2	0.0769231

6. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix}7\\15\\9\\11\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}85\\149\\97\\145\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}911\\1843\\1073\\1471\end{pmatrix}$

j	1	2	3
m_0	4	476	59860
m_1	42	5298	669418
m_2	476	59860	7541740
q	10.5	11.13025	11.18306
error bound	2.95804	1.36886	0.9637431

7. x가 고유치이므로 $Ax = \lambda x = y$, 따라서 $m_0 = x^T x$, $m_1 = \lambda x^T x$, $m_2 = \lambda^2 x^T x$. 그러므로 $q = \frac{m_1}{m_0} = \lambda$, $\frac{m_2}{m_0} = \lambda^2$, 따라서 $\delta^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0$. $\epsilon = 0$.

8. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix}8\\14\\12\end{pmatrix}$, 따라서 Collatz로 부터 $8 \le \lambda \le 14$ 이로부터 우리는 고유치를 11로 추정하고 error bound 는 3으로 둔다.
$x_1 = \begin{pmatrix}8\\14\\12\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}88\\172\\144\end{pmatrix}$, 따라서 Collatz로 부터 $11 \le \lambda \le 12.286$ 이로부터 우리는 고유치를 11.643로 추정하고 error bound 는 0.643으로 둔다.

9. $q_1 = -5.666667$, $q_2 = -6.53818313$, $q_3 = -6.63628132$, $\cdots$, $q_10 = -6.79574654$, $\cdots$이므로 $A - 7I$의 고유치는 -6.8이다. 따라서 이 고유치에 대응되는 고유벡터를 V라 하면 $(A - 7I)v = -6.8v$, $Av = 0.2v$이므로 0.2는 A의 고유치이다.

10. A의 고유치는 $\lambda = \pm 5$이고, 이에 대응되는 고유치가 각각 $z_1 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $z_2 \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$이다. 그러므로 $x_0 \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$로 잡으면, $x_0 = z_1 + z_2$이므로 $x_1 = 5(z_1 - z_2)\begin{pmatrix}5\\15\end{pmatrix}$이다. 따라서 $m_0 = 10$, $m_1 = x_0^T x_1 = 0$. 따라서 $q = 0$. $x_2 = 25(z_1 + z_2)$이므로 계속하여 $q = 0$이다.
$\delta = \sqrt{\frac{x_1^T x_1}{x_0^T x_0} - q^2} = \sqrt{\frac{250}{10} - 0} = 5$ 그러므로 고유치는 최대 ± 5의 오차 안에 있다. 실제로 행렬 A의 고유치는 ± 5이고 따라서 우리가 정한 error bound는 가장 좋다는 것을 알 수 있다.

11. $z_1, z_2, \cdots, z_n$을 Theorem에서와 같이 정의한 것이라 하자. 이 때, $x_0 = \sum c_j z_j$라면, $x = x_{s-1} = \sum c_j \lambda_j^{2s-1} z_j$, $y = Ax_{s-1} = x_s = \sum c_j \lambda_j^s z_j$이다. 따라서 $q = \frac{m_1}{m_0} = \frac{(c_1^2 \lambda_1^{2s-1} + \cdots)}{(c_1^2 \lambda_1^{2s-2} + \cdots)} \approx \lambda_1$.

12. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix}-0.6\\1\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}1\\0.030303\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}1\\-0.5179487\end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix}1\\-0.260013578\end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix}1\\-0.365775508\end{pmatrix}$, $\cdots$
결국 $\begin{pmatrix}1\\-0.332868862\end{pmatrix}$으로 수렴한다.

13. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix}1\\-0.4444444\\0.555555\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}1\\-0.8312757\\0.8353909\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}1\\-0.95448310\\0.9546078\end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix}1\\-0.98837032\\0.988373865\end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix}1\\-0.997075974\\0.997076073\end{pmatrix}$ $\cdots$.
결국 $\begin{pmatrix}1\\-0.999997139\\0.999997139\end{pmatrix}$으로 수렴한다.

14. $x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix}0.466666667\\1\\0.6\\0.733333333\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}0.570469799\\1\\0.651006711\\0.973154362\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}0.494302767\\1\\0.58220293\\0.79815518\end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix}0.549713932\\1\\0.618164012\\0.917530024\end{pmatrix}$, $\cdots$.

결국 $\begin{pmatrix} 0.526540958 \\ 1 \\ 0.598398818 \\ 0.864660853 \end{pmatrix}$ 으로 수렴한다.

15. (Program)

18.9. Tridiagonalization and QR-factorization

1. $S^2 = 0.0488$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7384226 \\ 0.6743383 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0905357 & -0.9958932 \\ 0 & -0.9958932 & 0.0905357 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.49 & -0.220907 & 0. \\ -0.220907 & 0.435082 & 0.1859016 \\ 0 & 0.1859016 & 0.244918 \end{pmatrix}$$

2. $S^2 = 25.92$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9238795 \\ -0.3826834 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071068 & 0.7071068 \\ 0 & -0.7071068 & -0.7071068 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5.091169 & 0 \\ 5.091169 & 9.6 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{pmatrix}$$

3. $S^2 = 13$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8816746 \\ 0.4718579 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5547002 & -0.8320503 \\ 0 & -0.8320503 & 0.5547002 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -3.605551 & 0 \\ -3.605551 & 13.46153 & 3.692308 \\ 0 & 3.692308 & 3.538462 \end{pmatrix}$$

4. $S_1^2 = 17$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 20.993 \\ 0 \\ 0.122 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.97 & 0 & -0.243 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.243 & 0 & 0.97 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -4.123 & 0 & 0 \\ -4.123 & 8.706 & -2.425 & -6.823 \\ 0 & -2.43 & 9 & 1.455 \\ 0 & -6.824 & 1.455 & 0.294 \end{pmatrix}$$

$S_2^2 = 52.44$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.817 \\ 0.577 \end{pmatrix}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.335 & -0.942 \\ 0 & 0 & -0.942 & 0.335 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -4.123 & 0 & 0 \\ -4.123 & 8.706 & 7.242 & 0 \\ 0 & 7.242 & 2.189 & 3.876 \\ 0 & 0 & 3.876 & 7.105 \end{pmatrix}$$

5. $S_1^2 = 45.68$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9405 \\ 0.079 \\ 0.3303 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7683 & -0.1480 & -0.6214 \\ 0 & -0.1480 & 0.9876 & -0.052 \\ 0 & -0.6214 & -0.052 & 0.7818 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & -6.7587 & 0 & 0 \\ -6.7587 & 14.3532 & -4.5223 & -0.3415 \\ 0 & -4.5223 & 2.3487 & 0.1206 \\ 0 & -0.3416 & 0.1206 & -3.4019 \end{pmatrix}$$

$S_2^2 = 20.5679$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9993 \\ 0.03768 \end{pmatrix}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9972 & -0.07531 \\ 0 & 0 & -0.07531 & 0.99716 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & -6.7587 & 0 & 0 \\ -6.7587 & 14.3532 & 4.5352 & 0 \\ 0 & 4.53518 & 2.3342 & 0.3126 \\ 0 & 0 & 0.3126 & -3.3874 \end{pmatrix}$$

6. $S_1^2 = 18$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.9856 \\ 0.1196 \\ 0.1196 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9428 & -0.2357 & -0.2357 \\ 0 & -0.2357 & 0.9714 & -0.02859 \\ 0 & -0.2357 & -0.02859 & 0.9714 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4.2426 & 0 & 0 \\ -4.2426 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3.5 & 1.5 \\ 0 & -1 & 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$S_2^2 = 2$, 따라서 $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9239 \\ 0.3827 \end{pmatrix}$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 0 & 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{pmatrix}, \text{ 그러므로,}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4.2426 & 0 & 0 \\ -4.2426 & 6 & 1.4142 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. $$R_0 = \begin{pmatrix} 9.055385 & 1.43560 & 0.11043 \\ 0 & 3.9924 & 1.2127 \\ 0 & 0 & 0.7192 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 9.1585 & 0.4409 & 0 \\ 0.4409 & 4.1452 & 0.1801 \\ 0 & 0.18013 & 0.6963 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 9.1691 & 0.6397 & 0.008662 \\ 0 & 4.1232 & 0.2102 \\ 0 & 0 & 0.6877 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 9.1893 & 0.1983 & 0 \\ 0.1983 & 4.1236 & 0.03005 \\ 0 & 0.03005 & 0.6871 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 9.1914 & 0.2872 & 0.0006481 \\ 0 & 4.1185 & 0.03505 \\ 0 & 0 & 0.6868 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 9.1955 & 0.08883 & 0 \\ 0.08883 & 4.1177 & 0.005011 \\ 0 & 0.005011 & 0.6868 \end{pmatrix}$$

8. $$R_0 = \begin{pmatrix} 14.2003 & -0.055632 & -0.0014084 \\ 0 & -6.30372 & 0.133267 \\ 0 & 0 & 2.105288 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 14.20039 & 0.044391 & 0 \\ 0.044391 & -6.30462 & -0.066795 \\ 0 & -0.066795 & 2.10423 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 14.20046 & 0.0246825 & -0.0002088 \\ 0 & -6.305082 & -0.044499 \\ 0 & 0 & 2.10482 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 14.2004 & -0.01971 & 0 \\ -0.01971 & -6.3052 & 0.022298 \\ 0 & 0.022298 & 2.1047 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 14.20048 & -0.01096 & -3.0949E-5 \\ 0 & -6.3052 & 0.01485 \\ 0 & 0 & 2.1048 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 14.2005 & 0.008752 & 0 \\ 0.008752 & -6.3052 & -0.007443 \\ 0 & -0.007443 & 2.1048 \end{pmatrix}$$

9. $$R_0 = \begin{pmatrix} 7.0178 & 0.7481 & 0.007125 \\ 0 & 3.4569 & 0.05631 \\ 0 & 0 & -1.5023 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 7.0533 & 0.2463 & 0 \\ 0.2463 & 3.4483 & -0.04346 \\ 0 & -0.04346 & -1.5016 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 7.0576 & 0.3665 & -0.001517 \\ 0 & 3.4379 & -0.02445 \\ 0 & 0 & -1.5021 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 7.0661 & 0.1200 & 0 \\ 0.1200 & 3.4358 & 0.01899 \\ 0 & 0.01899 & -1.5019 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 7.0671 & 0.1783 & 0.0003223 \\ 0 & 3.4334 & 0.01068 \\ 0 & 0 & -1.502 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 7.0691 & 0.05829 & 0 \\ 0.05829 & 3.4329 & -0.008306 \\ 0 & -0.008306 & -1.5020 \end{pmatrix}$$

10. $$R_0 = \begin{pmatrix} 0.5375 & -0.3802 & -0.07640 \\ 0 & 0.3579 & 0.2720 \\ 0 & 0 & 0.1213 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.6463 & -0.1471 & 0 \\ -0.1471 & 0.4201 & 0.06298 \\ 0 & 0.06298 & 0.1036 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.6628 & -0.2367 & -0.01398 \\ 0 & 0.3822 & 0.07765 \\ 0 & 0 & 0.09209 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0.6988 & -0.08483 & 0 \\ -0.08483 & 0.3804 & 0.01517 \\ 0 & 0.01517 & 0.09083 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0.7039 & -0.1301 & -0.001829 \\ 0 & 0.3677 & 0.01880 \\ 0 & 0 & 0.09013 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0.7145 & -0.04431 & 0 \\ -0.04431 & 0.3655 & 0.003719 \\ 0 & 0.003719 & 0.09005 \end{pmatrix}$$

11. $$R_0 = \begin{pmatrix} 7.8740 & -9.3694 & -1.6907 \\ 0 & 10.9571 & 4.2829 \\ 0 & 0 & 2.2254 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 11.2903 & -5.0173 & 0 \\ -5.0173 & 10.6144 & 0.7499 \\ 0 & 0.7499 & 2.0952 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 12.3550 & -8.8955 & -0.3045 \\ 0 & 7.6988 & 0.8861 \\ 0 & 0 & 2.0185 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 14.9028 & -3.1265 & 0 \\ -3.1265 & 7.0883 & 0.1966 \\ 0 & 0.1966 & 2.0089 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 15.2272 & -4.5153 & -0.04037 \\ 0 & 6.2984 & 0.2550 \\ 0 & 0 & 2.002 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 15.8299 & -1.2932 & 0 \\ -1.2932 & 6.1692 & 0.06249 \\ 0 & 0.06249 & 2.0010 \end{pmatrix}$$

12. (Program)

Chapter 18. Review

1. $Ax = b$,A는 $n \times n$ 행렬, x, b는 벡터일 때,A와 b가 주어졌을 때, x를 구하는것.

2. pivot란 어떤 행(열)과 또 다른 행(열)을 바꾸어 주는 것을 말한다.
pivot를 하는 이유는 round off error의 양이 정확도에 심각한 영향을 미칠 수 도 있으며 심지어는 바라는 해가 아닌 엉뚱한 해가 나오기도 한다.

3. Gauss 소거법은 full matrix이나 matrix size가 작을 때 사용하고, Gauss Seidel iteration은 matrix size는 크나 sparse matrix일 때 사용한다.

4. Gauss elimination으로 얻어진 상삼각행렬이 Doolittle's method의 U와 같다. 따라서 Doolittle's methods는 Gauss소거법과 같은 방법으로 먼저 U를 구하고 그 다음 L을 구한다.

5. $||-(I+L)^{-1}U|| < 1$이면 Gauss-Seidel iteration은 수렴한다.

6. ill-conditioning : data에서의 작은 변화가 그에 대응하는 해의 큰 변화를 가져올 때, 그 문제는 ill-conditioning이라고 한다.
condition number($\kappa(A)$) : $||A|| \cdot ||A||^{-1}$
condition number가 클수록 linear system 은 ill-conditioning되어 있다.

7. least squares approximation :주어진 n개의 점 $(x_1, y_1) \cdots (x_n, y_n)$을 m차 다항식 $p(x)$으로 fitting할 때, $\sum_{j=1}^{n}(y_j - p(x_j))^2$이 최소가 되는 $p(x)$찾는 방법
이 때, 최소가 되는 $p(x) = b_0 + \cdots + b_m x^m$를 찾기 위해선, $\frac{\partial q}{\partial b_i} = 0,\ i = 0,\ \cdots, m$이어야 한다. 이 식을 정리한 방정식이 normal equation이다.

8. $Ax = \lambda x$인 0가 아닌 λ.
eigenvalue는 condition number에 관계되어 있으므로 eigenvalue가 0에 가까울 수록 condition number가 커지고 따라서 linear system은 ill-conditioning되어 있다.

9. Power Method

10. 행렬 A와 B가 similar하다는 뜻은 역행렬이 존재하는 행렬 P가 존재하여 $P^{-1}AP = B$인 관계가 있을 때를 말한다.
sysmetric matrix인 경우 행렬 P를 잘 잡으면 대각행렬로 만들 수 있다.

11. power method : a simple standard procedure for computing approximate values of an $n \times n$ matrix A.
Thus in this methods starting any vector $x_0 \neq 0$, compute successively $x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1 \cdots$
이 방법의 장점은 간단한 계산과정과 size가 큰 sparse matrix에도 적용할 수 있다는 것이다. 단점은 느림 수렴성이다.

12. 고유벡터가 수렴한다.

13. (Gerschgorin's theorem)
Let λ be eigenvalue of arbitrary $n \times n$matrix A. Then for any some integer $j (1 \le j \le n)$ we have $|a_{jj} - \lambda| \le |a_{j1} + cdots + |a_{j,j-1}| + |a_{j,j+1}| + |a_{jn}|$.
18.7의 예제 1 참조.

14. tridiagonal matrix : matrix having all its nonzero entries on the main diagonal and in the positions immediately adjacent to main diagonal.
이러한 행렬은 QR분해를 할 때 적용한다.

15. 행렬 A를 QR의 곱으로 나타내어 고유치 를 구하는데 사용한다.

16. $x_1 = 4,\ x_2 = 2x_3$

17. $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 5$

18. $x_1 = 3,\ x_2 = 3x_3 + 2$

19. $x_1 = 2.2,\ x_2 = 3.0,\ x_3 = -0.9$

20. $x_1 = 4,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

21. $x_1 = 3.9,\ x_2 = 4.3,\ x_3 = 1.8$

22. Doolittle's method나 Cholesky's method는
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
해는 $x_1 = 4,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$.

23. $$L = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1.00 & 0 \\ 0.25 & 0.33 & 1.00 \end{pmatrix},\quad U = \begin{pmatrix} 8.00 & 5.00 & 13.00 \\ 0 & -0.75 & 2.25 \\ 0 & 0 & -2.00 \end{pmatrix}.$$
해는 $x_1 = 2.2,\ x_2 = 3.0,\ x_3 = -0.9$.

24. $$\frac{1}{226}\begin{pmatrix} 48 & -8 & -6 \\ -8 & 39 & 1 \\ -6 & 1 & 29 \end{pmatrix}$$

25. $$\begin{pmatrix} 2.8193 & -1.5904 & -0.0482 \\ -1.5904 & 1.2048 & -0.0241 \\ -0.0482 & -0.0241 & 0.1205 \end{pmatrix}$$

26. $$\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -2.99240 & 3.18590 & 2.95784 \\ -5.66690 & 5.96406 & 5.97097 \end{pmatrix}$$

27. $x_1 = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 1.18 \\ 4.0432 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1.9863 \\ 0.9992 \\ 4.0016 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2.0002 \\ 0.9999 \\ 4.000 \end{pmatrix}$

28. 1번째 식을 2번째 식으로, 2번째 식을 3번으로, 3번의 식을 1번으로 식의 순서를 바꾼다.
$x_1 = \begin{pmatrix} -1.5067 \\ 8.1753 \\ -1.0846 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} -2.0193 \\ 7.9925 \\ -0.9967 \end{pmatrix}, \ x_3 = \begin{pmatrix} -1.9992 \\ 8.0003 \\ -1.0001 \end{pmatrix}$

29. $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.925 \\ 0.45 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3.2312 \\ 1.7875 \\ 0.5078 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3.1969 \\ 1.8020 \\ 0.4992 \end{pmatrix}$

30. 2, $\sqrt{2}$, 1

31. 4, $\sqrt{10}$, 3

32. 24, $\sqrt{136}$, 8

33. 1, 1, 1

34. 2.4, $\sqrt{2.48}$, 1.2

35. 22, $\sqrt{186}$, 11

36. 11

37. 29

38. 9.1

39. 11.5×4.4579=51.2659

40. 8.8×19.15=168.5

41. 9×0.2687=2.4183

42. $y = 2.89 + 0.505x$

43. $y = 4.09 + 0.205x$

44. $y = 1.95 - 2.217x + 1.067x^2$

45. Triangularizd Matrix : $\begin{pmatrix} 1.5 & -2.2361 & 0 \\ -2.2361 & 5.8 & -3.1 \\ 0 & -3.1 & 6.7 \end{pmatrix}$

1 QR-step : $\begin{pmatrix} 6.5345 & -2.8160 & 0 \\ -2.8160 & 7.0050 & -1.0387 \\ 0 & -1.0387 & 0.4604 \end{pmatrix}$

2 QR-step : $\begin{pmatrix} 8.6551 & -2.1447 & 0 \\ -2.1447 & 5.0808 & -0.05157 \\ 0 & & \\ -0.05157 & 0.2640 & \end{pmatrix}$

3 QR-step : $\begin{pmatrix} 9.4497 & -1.06216 & 0 \\ -1.06216 & 4.2868 & -0.003076 \\ 0 & -0.003076 & 0.2634 \end{pmatrix}$

CHAPTER 19

Numerical Methods for Differential Equations

Numerical methods for differential equations are of great importance to the engineer and physicist because practical problems often lead to differential equations that cannot be solved exactly by one of the methods in Chaps. 1–5, and 11 or by similar methods. Also, there are differential equations for which the solutions in terms of formulas are so complicated that one often prefers to apply a numerical method to such an equation.

This chapter includes basic methods for the numerical solution of ordinary differential equations (Secs. 19.1–19.3) and partial differential equations (Secs. 19.4–19.7).

Sections 19.1 and 19.2 may also be studied immediately after Chaps. 1 and Sec. 19.3 after Chap. 2, since these sections are independent of Chaps. 17 and 18.

Sections 19.4–19.7 may also be studied immediately after Chap. 11, provided the reader has some knowledge of linear systems of algebraic equations.

Prerequisite for Secs. 19.1–19.3: Secs. 1.1–1.6, 2.1–2.3.
Prerequisite for Secs. 19.4–19.7: Secs. 11.1–11.3, 11.5, 11.11.
References: Appendix 1, Part E (see also Parts A and C).
Answers to problems: Appendix 2.

19.1. Methods for First-Order Differential Equations

1. true solution : $y = 2e^{-0.1x}$

x_n	y_n	Error
0.1	1.98	9.9668E-5
0.2	1.9602	1.9735E-4
0.3	1.940598	2.93068E-4
0.4	1.921192	3.8686E-4
0.5	1.90198	4.7875E-4
0.6	1.88296	5.6877E-4
0.7	1.86413	6.5694E-4
0.8	1.84548	7.4330E-4
0.9	1.82703	8.2788E-4
1.0	1.80876	9.1069E-4

2. true solution : $y = \sin \frac{1}{2}\pi x$. Since the values obtained give $y_9 = 1.0110 > 1$, y_10 comes out complex and is meaningless.

x_n	y_n	Error
0.1	0.15708	-6.4E-4
0.2	0.31221	-3.19E-3
0.3	0.46144	-7.45E-3
0.4	0.60079	-1.301E-2
0.5	0.72636	-1.926E-2
0.6	0.83433	-2.531E-2
0.7	0.92092	-2.991E-2
0.8	0.98214	-3.109E-2
0.9	1.01170	-2.401E-2
1.0		

3. true solution : $y = \frac{1}{1+x^5}$

x_n	y_n	Error
0.2	1	-3.199E-4
0.4	0.9984	-8.536E-3
0.6	0.972881	-0.04503
0.8	0.85021	-0.0970
1.0	0.55413	-0.05413
1.2	0.24707	0.03960
1.4	0.12049	0.03629
1.6	0.06472	0.02235
1.8	0.037269	0.01299
2.0	0.022688	7.615E-3

4. true solution : $y = tanx - x$.

x_n	y_n	Error
0.1	0.00000	3.35E-4
0.2	0.001	1.710E-3
0.3	0.005	4.296E-3
0.4	0.014345	8.448E-3
0.5	0.031513	1.4789E-2
0.6	0.059764	2.4373E-2
0.7	0.103292	3.8996E-2
0.8	0.167820	6.1818E-2
0.9	0.261488	9.8670E-2
1.0	0.396393	0.161014

5. true solution : $y = e^x$

x_n	y_n	Error
0.1	1.105	0.000170916
0.2	1.22103	0.000377756
0.3	1.34923	0.000626181
0.4	1.49090	0.00092264
0.5	1.64744	0.0012745
0.6	1.82043	0.00169011
0.7	2.01157	0.00217901
0.8	2.22279	0.00275199
0.9	2.45618	0.00342132
1.0	2.71408	0.00420096

6. true solution : $y = \frac{1}{1+e^x}$

x_n	y_n	Error
0.1	0.524969	1.0E-5
0.2	0.549813	2.1E-5
0.3	0.574411	3.2E-5
0.4	0.598645	4.2E-5
0.5	0.622407	5.3E-5
0.6	0.645593	6.3E-5
0.7	0.668114	7.4E-5
0.8	0.689890	8.4E-5
0.9	0.710855	9.4E-5
1.0	0.730955	1.04E-4

7. true solution : $y = \frac{1}{1+x^2}$

x_n	y_n	Error
0.2	0.96	0.0015385
0.4	0.86029	0.0017712
0.6	0.73504	0.00025161
0.8	0.611571	-0.0018156
1.0	0.50334	-0.003338
1.2	0.41388	-0.0040476
1.4	0.34197	-0.0041344
1.6	0.28476	-0.0038671
1.8	0.23929	-0.0034458
2.0	0.20299	-0.00299

8. true solution : $y = \tan 2x$

x_n	y_n	Error
0.05	0.10050	-1.7E-4
0.1	0.20304	-3.3E-4
0.15	0.30981	-4.8E-4
0.2	0.42341	-6.2E-4
0.25	0.54702	-7.2E-4
0.3	0.68490	-7.6E-4
0.35	0.84295	-6.6E-4
0.4	1.02989	-2.5E-4
0.45	1.25930	8.6E-4
5.0	1.55379	3.62E-3

9. true solution : $y = \frac{1}{1+x^2}$

x_n	Error of Euler's method	Error of improved Euler's methods
0.2	-0.03846153	0.0015385
0.4	-0.0579310	0.0017712
0.6	-0.04928	0.00025161
0.8	-0.027085	-0.0018156
1.0	-0.0070601	-0.003338
1.2	0.005619901	-0.0040476
1.4	0.01204921	-0.0041344
1.6	0.0145476	-0.0038671
1.8	0.0149013	-0.0034458
2.0	0.01420116	-0.00299

10. The error of y(1) is -0.036, hence comparable to that in Prob.7.The eoor of y(2) is 0.0067, hence twice that in Prob.7 and of the opposite sign.

11. 해가 된다는 것은 쉽게 보여진다.

x_n	y_n	Error
1.1	0.1	0.00439421018
1.2	0.203360415	0.0122022924
1.3	0.310868382	0.0203308893
1.4	0.421674001	0.0280118014
1.5	0.534801626	0.0350654358
1.6	0.649419475	0.0414875661
1.7	0.764866364	0.0473282279
1.8	0.880628896	0.0526509326

12. The error is about less 20%.

x_n	y_n	Error
1.2	0.205493379	0.0100693282
1.4	0.427624023	0.0220617797
1.6	0.658699667	0.0322073733
1.8	0.892368066	0.040911762

13. The error is about less 36.84%.

x_n	y_n	Error
1.4	0.435227219	0.0144585834
1.8	0.90744067	0.025839158

14. The error is about less 82.55%.

x_n	y_n	Error
1.1	0.103290244	0.00110396624
1.2	0.213379526	0.00218318073
1.3	0.32803516	0.00316411183
1.4	0.445615762	0.00407004017
1.5	0.564954245	0.00491281691
1.6	0.68520607	0.0057009712
1.7	0.805753346	0.0064412456
1.8	0.926140678	0.00713915041

15. true solution : $y = -e^{-2x} + 1$

x_n	Error of Euler's method	Error of improved Euler's methods
0.1	-0.0187307531	0.00126924573
0.2	-0.0303200484	0.00207995168
0.3	-0.0368116356	0.00255636203
0.4	-0.0397289685	0.00279279434
0.5	-0.0401994435	0.00286040029
0.6	-0.0390502126	0.00281245701
0.7	-0.0368817645	0.00268850452
0.8	-0.034124359	0.00251756507
0.9	-0.031081161	0.00232066052
1.0	-0.0279611009	0.00211274747

16. The error is substantially less.

x_n	y_n	Error
0.1	0.181266667	2.57947652E-06
0.2	0.329675728	4.2258817E-06
0.3	0.451183174	5.18985215E-06
0.4	0.550665371	5.66525951E-06
0.5	0.63211476	5.79874758E-06
0.6	0.69880009	5.69813247E-06
0.7	0.753397595	5.44116939E-06
0.8	0.798098391	5.09071087E-06
0.9	0.834696424	4.6882677E-06
1.0	0.864660452	4.26495382E-06

17. true solution : $y = e^{-0.1x^2}$

x_n	y_n	Error
0.2	0.996007989	-1.27165944E-10
0.4	0.98412732	7.85976839E-11
0.6	0.964640293	3.36949801E-10
0.8	0.938004999	7.92162447E-10
1.0	0.904837417	5.57596858E-10
1.2	0.865887748	4.78398654E-10
1.4	0.822012235	-4.21883972E-10
1.6	0.774141972	-3.34722927E-09
1.8	0.723250253	-1.04978299E-08
2.0	0.670320067	-2.06498385E-08

18. The error of Runge-Kutta is substantially less.

x_n	Error of Euler's method	Error of improved Euler's methods
0.2	-0.00399201066	7.98925458E-06
0.4	-0.00787268012	1.55762624E-05
0.6	-0.0114877065	2.18345117E-05
0.8	-0.0146959283	2.54447733E-05
1.0	-0.0173770811	2.482018E-05
1.2	-0.0194381725	1.82844515E-05
1.4	-0.0208180418	4.25410799E-06
1.6	-0.0214898124	-1.85709391E-05
1.8	-0.021461106	-5.10472233E-05
2.0	-0.0207720845	-9.34521723E-05

19. $\epsilon = (1.402709878 - 1.402707408)/15$
$= 1.6467E - 7$
$\epsilon = (1.822792993 - 1.822788993)/15$
$= 2.6667E - 7$

20.

x_n	y_n	Error Estimate $\times 10^9$	Error $\times 10^9$
0.1	1.2003346725	3.0	-0.4
0.2	1.4027100374	3.7	-1.9
0.3	1.6093362546	5.9	-5.0
0.4	1.8227932298	9.4	-11.0
0.5	2.0463025124	13.1	-22.5
0.6	2.2841368531	14.4	-44.7
0.7	2.5422884689	5.0	-88.4
0.8	2.8296387346	-38.8	-177.6
0.9	3.1601585865	-191.1	-369.0
1.0	3.5574085377	-699.0	-813.0

19.2. Multistep Methods

1. exact solution : $y = e^x + x + 1$
Starting y_n
$y_0 = 0$
$y_1 = 0.0051708333$
$y_2 = 0.0214025709$
$y_3 = 0.0498584971$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.4	0.09182	0.09182	1.57286E-7
0.5	0.14872	0.14872	-3.76386E-8
0.6	0.22211	0.22212	-2.73068E-7
0.7	0.31375	0.31375	-5.57891E-7
0.8	0.42554	0.42554	-8.99635E-7
0.9	0.55960	0.55960	-1.30709E-6
1.0	0.71826	0.71828	-1.79029E-6

2. exact solution : $y = e^x$
Starting y_n
$y_0 = 1$
$y_1 = 1.10517083$
$y_2 = 1.22140257$
$y_3 = 1.3498585$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.4	1.49182	1.49182	1.57286E-7
0.5	1.64872	1.64872	-3.76386E-8
0.6	1.82211	1.82212	-2.73068E-7
0.7	2.01375	2.01375	-5.57891E-7
0.8	2.22554	2.22554	-8.99635E-7
0.9	2.45960	2.45960	-1.30709E-6
1.0	2.71828	2.71828	-1.79029E-6

3. exact solution : $y = \tan x + x + 1$
Starting y_n
$y_0 = 1$
$y_1 = 1.20033459$
$y_2 = 1.40270988$
$y_3 = 1.60933604$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.4	1.82272	1.82280	-4.86249E-6
0.5	2.04620	2.04631	-1.24163E-5
0.6	2.28398	2.28416	-2.42425E-5
0.7	2.54203	2.54233	-4.35021E-5

4. exact solution : $y = (\ln x)^2 - (\ln x)$
Starting y_n
$y_0 = 0$
$y_1 = 0.103290239$
$y_2 = 0.213379522$
$y_3 = 0.32803515$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
1.4	0.445290	0.445586	0.0040997
1.5	0.564968	0.564917	0.0049495
1.6	0.685212	0.685164	0.0057429
1.7	0.805731	0.805705	0.0064890
1.8	0.926106	0.926087	0.0071925

5. exact solution : $y = e^{-0.1x^2}$
Starting y_n
$y_0 = 1$
$y_1 = 0.996007989$
$y_2 = 0.98412732$
$y_3 = 0.964640293$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.8	0.93801	0.93800	5.7006E-7
1.0	0.90484	0.90483	1.3123E-6
1.2	0.86590	0.86589	2.1831E-6
1.4	0.82202	0.82201	3.1250E-6
1.6	0.77415	0.77414	4.0739E-6
1.8	0.72326	0.72325	4.9632E-6
2.0	0.67033	0.67031	5.7301E-6

6. exact solution : $y = \sqrt{8 + x^2}$
Starting y_n
$y_0 = 3$
$y_1 = 3.07245832$
$y_2 = 3.15594681$
$y_3 = 3.24961542$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.8	3.35260	3.35261	-7.82118E-7
1.0	3.46409	3.46410	-1.27380E-6
1.2	3.58329	3.58330	-1.56472E-6
1.4	3.70945	3.70945	-1.69210E-6
1.6	3.84187	3.84188	-1.69662E-6
1.8	3.97995	3.97995	-1.61590E-6
2.0	4.12311	4.12311	-1.48134E-6

7. 각 번호의 해답 참조

8. exact solution : $y = \tan x + x + 1$
   $\tan x$ approaches infinity as $x \to \frac{1}{2}\pi$

9. (GAS PROJECT)

10. $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)dx$이므로 $r = \frac{x - x_{n+1}}{h}$로 두면,
    $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \tilde{p}_2(x)dx = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \frac{1}{2}r(r+1)\nabla^2 f_{n+1}$
    $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \tilde{p}_2(x)dx = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$. 이때, f_{n+1}은 다음과 같은 값 f^*_{n+1}으로 대채한다.
    $h\int_0^1 p_2(x)dx = h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n\right)$
    $= h\left(f_n + \frac{1}{2}(f_n - f_{n-1}) + \frac{5}{12}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}\right)$
    $= \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$
    따라서
    $y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$
    $f^*_{n+1} = f(x_{n+1}, y^*_{n+1})$
    그러므로 주어진 식이 나온다.

11. exact solution : $y = e^{x^2}$
    Starting y_n
    $y_0 = 1$
    $y_1 = 1.01005017$
    $y_2 = 1.04081077$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.3	1.09367	1.09422	-4.98128E-5
0.4	1.17297	1.17362	-1.11721E-4
0.5	1.28339	1.28422	-1.93718E-4
0.6	1.43253	1.43363	-3.06694E-4
0.7	1.63126	1.63278	-4.66015E-4
0.8	1.89504	1.89717	-6.93969E-4
0.9	2.24587	2.24893	-1.02337E-3
1.0	2.71533	2.71978	-1.50294E-3

12. exact solution : $y = e^{x^2}$
    Starting y_n
    $x_0 = 0,\ y_0 = 1$
    $x_1 = 0.05,\ y_1 = 1.00250313$
    $x_2 = 0.1,\ y_2 = 1.01005017$

x_n	($h = 0.05$) y_n	($h = 0.05$) Error	(h=0.1) Error
0.3	1.09417	-1.41926E-5	-4.98128E-5
0.4	1.17354	-2.4295E-5	-1.11721E-4
0.5	1.28406	-3.8258E-5	-1.93718E-4
0.6	1.43339	-5.8241E-5	-3.06694E-4
0.7	1.63240	-8.7496E-5	-4.66015E-4
0.8	1.89661	-1.3103E-4	-6.93969E-4
0.9	2.24810	-1.9667E-4	-1.02337E-3
1.0	2.71858	-2.9682E-4	-1.50294E-3

13. exact solution : $y = e^x - x - 1$
    Starting y_n
    $y_0 = 0$
    $y_1 = 0.0214$
    $y_2 = 0.09181796$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.6	0.22131	0.22215	-2.7236E-5
0.8	0.42460	0.42562	-7.7660E-5
1.0	0.71718	0.71843	-1.4888E-4

14. exact solution : $y = \tan x - x + 4$
    Starting y_n
    $y_0 = 4$
    $y_1 = 4.00270741$
    $y_2 = 4.02278899$

x_n	predicted y^*	Corrected y_n	Error
0.6	4.08035	4.08451	-3.7406E-4
0.8	4.21988	4.23069	-1.0469E-3
1.0	4.52785	4.55905	-1.63812E-3
1.2	5.24655	5.36422	7.92805E-3
1.4	7.32509	8.06095	0.336930

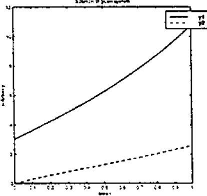
15. One step methods 에서는 Runge-Kutta Methods가 제일 빨리 수렴하고 또 multistep methods보다 더 error가 적다. 문제점은 함수가 작은 x값에 대하여 y값이 매우 빨리 변할 때, 그 값을 찾지 못한다.

19.3. Methods for Systems and Higher Order Equations

1. Computation Result :

x	y_1	y_2
0	3	0
0.1	3.6	0.3
0.2	4.2	0.57
0.3	4.812	0.819
0.4	5.447	1.0545
0.5	6.114	1.2828
0.6	6.8241	1.5094
0.7	7.5852	1.7390
0.8	8.4066	1.9758
0.9	9.2976	2.2237
1.0	10.2675	2.4864

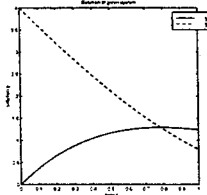
The graph of the solution y_1, y_2



2. Computation Result :

x	y_1	y_2
0	0	4
0.2	0.8	3.2
0.4	1.28	2.4
0.6	1.504	1.6640
0.8	1.536	1.0304
1.0	1.435	0.5171

The graph of the solution y_1, y_2



3. Exact Solution : $y_1 = e^{-x} - x,\ y_2 = -e^{-x} - 1$

x	y_1	Error $\times 10^4$	y_2	Error $\times 10^4$
0.1	0.8	48.37	-1.9	-48.37
0.2	0.61	87.30	-1.81	-87.31
0.3	0.429	11.81	-1.73	-118.2
0.4	0.256	142.2	-1.656	-142.2

4. Exact Solution : $y_1 = x^3 - 3x,\ y_2 = 3x^2 - 3$

x	y_1	Error $\times 10^4$	y_2	Error $\times 10^3$
0.05	-0.15	1.25	-3	7.5
0.1	-0.3	10	-2.99	14.99
0.15	-0.449	26.24	-2.95	22.43
0.2	-0.597	49.96	-2.91	29.70
0.25	-0.742	81.06	-2.85	36.75

5. (RK system)

x	y_1	y_2
0.5	6.21875	1.2734375
1.0	10.7287598	2.57672119

6. Exact Solution : $y_1 = e^{-x} - x,\ y_2 = -e^{-x} - 1$

x	y_1	Error $\times 10^8$	y_2	Error $\times 10^8$
0.1	0.8048	-8.10	-1.9048	8.30
0.2	0.61873	-14.6	-1.8187	15.1
0.3	0.4408	-19.8	-1.7408	20.33
0.4	0.2703	-23.8	-1.6703	24.53

Error가 2배 이상으로 줄어든다.

7. Solution : $y_1 = 0.3x^4,\ y_2 = 1.2x^3$

x	y_1	Error $\times 10^4$	y_2	Error $\times 10^4$
1.2	0.62189	1.8518	2.07294	6.63004
1.4	1.15197	5.1316	3.29126	15.3715
1.6	1.96505	10.314	4.91253	26.6382

8. Solution : The solution is taken from Ref[1] in Appendix.

x	y_1	Error $\times 10^5$	y_2
1.5	0.511903	-7.6	-0.558002
2.0	0.224008	-11.7	-0.576897
2.5	-0.048288	-9.5	-0.497386
3.0	-0.260055	0.3	-0.339446
3.5	-0.380298	17.0	-0.137795

9.

x	y_1	y_2
$\pi + 0.2$	0.198669	0.980131
$\pi + 0.4$	0.389494	0.922061
$\pi + 0.6$	0.565220	0.830020
$\pi + 0.8$	0.719632	0.709991
$\pi + 1.0$	0.84790	0.568572

10. $y_{n+1} = f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_n) + O(h^3)$

$y'_{n+1} = f'(x_n + h) = f'(x_n) + hf''(x_n) + O(h^2)$

$y''_{n+1} = f(x_{n+1}, y'_{n+1})$

따라서 $y_{n+1} = y_{x_n} + hy'_{x_n} + \frac{1}{2}h^2 y_{x_n} + O(h^3)$

$y'_{n+1} = y_{x_n} + hy''_{x_n} + O(h^2)$

$y''_{n+1} = f(x_{n+1}, y'_{n+1})$

x	y_n $\times 10^2$	y'_n	y''_n	Exact (4S) $\times 10^2$	Error $\times 10^3$
0	0	0	1	0	0
0.2	2	0.2	1.21	2.14	1.4
0.4	8.42	0.442	1.463	91.8	7.6
0.6	20.19	0.735	1.768	22.21	20.2
0.8	38.42	1.088	2.136	42.55	413
1.0	64.46			71.83	73.7

11. Airy's equation : $y'' = xy$

따라서 $f(x, y) = xy$로 두고 $h = 0.2$이므로

$k_1 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times f(x_n,\ y_n) = 0.1 x_n y_1$

$k_2 = k_3 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times f(x_n + \frac{1}{2} \times 0.2, y_n + \frac{1}{2} \times 0.2 \times (y'_n + \frac{1}{2}k_1)) = 0.1(x_n + 0.1)(y_n + 0.1y'_n + 0.05k_1)$.
$k_4 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times f(x_n + 0.2, y_n + 0.2 \times (y'_n + k_2))$
$= 0.1(x_n + 0.2)(y_n + 0.2y'_n + 0.2k_2)$

12. $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$ by (25); now use interpolation in Table A2, etc.

13. Solution : $y = x^4 - 6x^2 + 3$

x_n	y_n	Error $\times 10^6$	y_2
0.2	2.76161	-7.99662	-2.36808
0.4	2.06565	-46.0698	-4.54417
0.6	0.96970	-103.992	-6.33632
0.8	-0.43024	-161.327	-7.55253
1.0	-1.99981	-187.457	-8.00087

14.

x	y_n	Error$\times 10^6$
1.0	0.765198	0
1.5	0.511819	9
2.0	0.223946	-55
2.5	0.048241	-143
3.0	-0.259845	-207
3.5	-0.379914	-214

15. (GAS PROJECT)

19.4. Methods for Elliptic Partial Differential Equations

1. $u(x,\ y+k) = u(x,\ y) + ku_y(x,\ y) + O(k^2)$
$u(x,\ y-k) = u(x,\ y) - ku_y(x,\ y) + O(k^2)$이므로, 이 두식의 양변을 각각 빼면 (5b)가 나온다.
$u(x,\ y+k) = u(x,\ y) + ku_y(x,\ y) + \frac{1}{2}k^2 u_{yy}(x,\ y) + O(k^3)$
$u(x,\ y-k) = u(x,\ y) - ku_y(x,\ y) + \frac{1}{2}k^2 u_{yy}(x,\ y) + O(k^3)$이므로, 이 두식의 양변끼리 더하면 (6b)의 식이 나온다.
$u(x+h,\ y+k) = u(x,\ y+k) + hu_x(x,\ y+k) + O(h^2) = u(x,\ y) + ku(x,y) + h(u_x(x,y) + ku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) = u(x,\ y) + ku(x,y) + hu_x(x,y) + hku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) \cdots$ 첫번째 식
$u(x-h,\ y+k) = u(x,\ y+k) - hu_x(x,\ y+k) + O(h^2) = u(x,\ y) + ku(x,y) - h(u_x(x,y) + ku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) = u(x,\ y) + ku(x,y) - hu_x(x,y) - hku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) \cdots$ 두번째 식
$u(x+h,\ y-k) = u(x,\ y-k) + hu_x(x,\ y-k) + O(h^2) = u(x,\ y) - ku(x,y) + h(u_x(x,y) - ku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) = u(x,\ y) - ku(x,y) + hu_x(x,y) - hku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) \cdots$ 세번째 식
$u(x-h,\ y-k) = u(x,\ y+k) - hu_x(x,\ y+k) + O(h^2) = u(x,\ y) - ku(x,y) - h(u_x(x,y) - ku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) = u(x,\ y) - ku(x,y) - hu_x(x,y) + hku_{xy}(x,y)) + O(h^2) + O(k^2) \cdots$ 네번째 식
위식에서 첫번째식 -두번째식-세번째식+네번째식을 한다음 $4hk$로 나누면 $u_{xy}(x,\ y)$가 나온다.

2. exact solution : $u_{11} = u_{21} = 87.5,\ u_{12} = u_{22} = 62.5$
따라서 $(u_{11}\quad u_{21}\quad u_{12}\quad u_{22})^T$는
(step 2) $(93.75\quad 90.625\quad 65.625\quad 64.062)^T$
(step 3) $(89.0625\quad 88.2813\quad 63.2813\quad 62.8906)^T$
(step 4)
$(87.89063\quad 87.69531\quad 62.69531\quad 62.59766)^T$
(step 5)
$(87.59766\quad 87.54883\quad 62.54883\quad 62.52441)^T$
(step 6)
$(87.52441\quad 87.51221\quad 62.51221\quad 62.50610)^T$
(step 7)
$(87.5061\quad 87.50305\quad 62.50305\quad 62.50153)^T$
(step 10)
$(87.5001\quad 87.50005\quad 62.50005\quad 62.50002)^T$
따라서 3S로 보아 6step에서 exact solution와 같다.

3. exact solution : $u_{11} = u_{12} = 146.25,\ u_{21} = u_{22} = 118.75$
(step 2) $(130\quad 110\quad 137.5\quad 114.375)^T$
(step 3) $(141.875\quad 116.563\quad 144.063\quad 117.656)^T$
(step 4) $(145.156\quad 118.203\quad 145.703\quad 118.477)^T$
(step 5) $(145.977\quad 118.613\quad 146.113\quad 118.682)^T$
(step 8) $(146.246\quad 118.748\quad 146.248\quad 118.749)^T$
따라서 5S로 보아 8step에서 exact solution와 같다.

4. exact solution : $u_{11} = -2,\ u_{21} = 2,\ u_{12} = -11,\ u_{22} = -16$
(step 2)
$(50.25\quad 44.0625\quad 31.0625\quad 5.03125)^T$
(step 3)
$(19.0313\quad 12.5156\quad -0.484375\quad -10.7422)^T$
(step 4)
$(3.25781\quad 4.62891\quad -8.37109\quad -14.6855)^T$
(step 5)
$(-0.685547\quad 2.65723\quad -10.3428\quad -15.6714)^T$
(step 9)
$(-1.99487\quad 2.00257\quad -10.9974\quad -15.9987)^T$
(step 14)
$(-1.99999\quad 2.00000\quad -11.0000\quad -16.0000)^T$
따라서 6S로 보아 14step에서 exact solution와 같고, 3S로 보아 9step에서 exact solution와 같다.

5. (step 2)
$(50\quad 37.5\quad 37.7165\quad 19.0206)^T$

(step 3)
$(18.8041 \quad 9.4562 \quad 9.6727 \quad 4.9987)^T$
(step 4)
$(4.7822 \quad 2.4452 \quad 2.6617 \quad 1.4933)^T$
(step 5)
$(1.2767 \quad 0.6925 \quad 0.9090 \quad 0.6169)^T$
(step 10)
$(0.10940 \quad 0.10882 \quad 0.32533 \quad 0.32504)^T$
(step 16)
$(0.10825 \quad 0.10825 \quad 0.32476 \quad 0.32476)^T$

6. 이 문제는 시작하는 값의 중요성을 말해주고 있다. 시작하는 값을 $[0,\ 0,\ 0,\ 0]^T$로 두면 위의 문제(16 번째 step)보다 더 빨리 (11번째 step) 수렴한다.
(step 2)
$(0 \quad 0 \quad 0.21651 \quad 0.27063)^T$
(step 3)
$(0.054127 \quad 0.081190 \quad 0.297696 \quad 0.311228)^T$
(step 4)
$(0.094722 \quad 0.101487 \quad 0.317994 \quad 0.321377)^T$
(step 5)
$(0.104870 \quad 0.106561 \quad 0.323068 \quad 0.323914)^T$
(step 11)
$(0.108252 \quad 0.108252 \quad 0.324759 \quad 0.324759)^T$

7. $u_{21} = u_{11} = x,\ u_{22} = u_{12} = y$로 두면
식은 $-3x + y = -200,\ x - 3y = -100$으로 바뀐다.
따라서 $x = 87.5,\ y = 62.5$.

8. $u_{11} = 92.85714,\ u_{21} = 90.17857,\ u_{31} = 92.85714,\ u_{12} = 81.25,\ u_{22} = 75,\ u_{23} = 81.25,\ u_{31} = 57.14286,\ u_{32} = 47.32143,\ u_{33} = 57.14286$

9. $u_{11} = 25,\ u_{21} = 18.75,\ u_{31} = 25,\ u_{12} = 31.25,\ u_{22} = 25,\ u_{23} = 31.25,\ u_{31} = 25,\ u_{32} = 18.75,\ u_{33} = 25$

10. $P_{11},\ P_{31},\ P_{31},\ P_{33},\ P_{22}$는 $25°$, $P_{21},\ P_{32}$는 $18.75°$, $P_{12},\ P_{23}$는 $31.25°$.

11. $u_{11} = 0.0631345,\ u_{21} = 0.4267767,\ u_{31} = 0.4671956,\ u_{12} = -0.1742386,\ u_{22} = 0.1767767,\ u_{23} = 0.0277919,\ u_{31} = 0.0631345,\ u_{32} = 0.4267767,\ u_{33} = 0.4671956$

12. (a) $u_{11} = -u_{12} = -66$
(a) By symmetry, we can reduce the problem to four equations in four unknowns.
$u_{11} = u_{31} = -u_{15} = -u_{35} = -92.92$
$u_{21} = -u_{25} = -87.45$
$u_{12} = u_{32} = -u_{14} = -u_{34} = -64.22$
$u_{22} = -u_{24} = -53.98$
$u_{13} = u_{23} = u_{33} = 0$

13. (a) Coarse grid : $u_{11} = -u_{12} = -66.000$ in 6 step.
(b) solution of fine grid :

$$\text{(step 10)} \begin{pmatrix} -93.45 & -88.06 & -93.26 \\ -64.99 & 54.84 & -64.71 \\ -0.74 & -0.82 & -0.4548 \\ 63.71 & 53.41 & 63.91 \\ 92.68 & 87.19 & 92.78 \end{pmatrix}$$

(step 30)

$$\begin{pmatrix} -92.92 & -87.45 & -92.92 \\ -64.22 & -53.98 & -64.22 \\ -4.96E-5 & -5.52E-5 & -3.07E-5 \\ 64.22 & 53.98 & 64.22 \\ 92.92 & 87.45 & 92.92 \end{pmatrix}$$

(step 50)

$$\begin{pmatrix} -92.92 & -87.45 & -92.92 \\ -64.22 & -53.98 & -64.22 \\ -2.07E-9 & -2.31E-9 & -1.28E-9 \\ 64.22 & 53.98 & 64.22 \\ 92.92 & 87.45 & 92.92 \end{pmatrix}$$

14. First Step :
1st approximation $u_{11} = 0,\ u_{21} = 0\ ,u_{12} = 0.2886751,\ u_{22} = 0.2886751$
2nd approximation :
$u_{11} = 0.0769800,\ u_{21} = 0.3079201\ ,u_{12} = 0.0769800,\ u_{22} = 0.3079201$
Second Step :
1st approximation $u_{11} = 0.1026400,\ u_{21} = 0.1026400\ ,u_{12} = 0.3143351,\ u_{22} = 0.3143351$
2nd approximation :
$u_{11} = 0.1060613,\ u_{21} = 0.1060613\ ,u_{12} = 0.3216054,\ u_{22} = 0.3216054$
Third Step :
1st approximation $u_{11} = 0.1072018,\ u_{21} = 0.1072018\ ,u_{12} = 0.3240289,\ u_{22} = 0.3240289$
2nd approximation :
$u_{11} = 0.1079241,\ u_{21} = 0.1079241\ ,u_{12} = 0.1079241,\ u_{22} = 0.3244946$
Fourth Step :
1st approximation $u_{11} = 0.1081648,\ u_{21} = 0.1081648\ ,u_{12} = 0.3246498,\ u_{22} = 0.3246498$
2nd approximation :
$u_{11} = 0.1082223,\ u_{21} = 0.1082223\ ,u_{12} = 0.32472438,\ u_{22} = 0.32472438$
따라서 3S로 보아 exact solution : $u_{11} = u_{21} = 0.108,\ u_{12} = u_{22} = 0.325$

15. $p_0 = 1.7$일 때, 1st approximation
$u_{11} = 0,\ u_{21} = 0,\ u_{12} = 0.3207501,\ u_{22} = 0.3207501$,
2nd approximation
$u_{11} = 0.0859378,\ u_{12} = 0.3179698,\ u_{21} = 0.0859378,\ u_{22} = 0.3179698$
$p_1 = 0.077$일 때,
1st approximation
$u_{11} = 0.1417933,\ u_{21} = 0.1417933,\ u_{12} = 0.3161627,\ u_{22} = 0.3161627$,
2nd approximation
$u_{11} = 0.0912449,\ u_{12} = 0.3203910,\ u_{21} = 0.0912449,\ u_{22} = 0.3203910$
$p_1 = 0.308$일 때,
1st approximation

$u_{11} = 0.1319289$, $u_{21}0.1319289 =$, $u_{12} = 0.3164818$, $u_{22} = 0.3164818$,
2nd approximation
$u_{11} = 0.1008378$, $u_{12} = 0.32402849$, $u_{21} = 0.1008378$, $u_{22} = 0.32402849$

16. (GAS PROJECT)

19.5. Neumann and Mixed Problems. irregular Boundary

1. $$L = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2500 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.5000 & -0.1333 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -0.5333 & -0.3269 & 1.0000 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} -4.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & -3.7500 & 0.2500 & 1.0000 \\ 0 & 0 & -3.4667 & 1.1333 \\ 0 & 0 & 0 & -3.0962 \end{pmatrix}$$
이를 이용하면 해를 쉽게 구할 수 있다.

2. $0 = u_{01,x} = \frac{1}{2h}(u_{11} - u_{-1,1})$이므로 $u_{-1,1} = u_{11}$이다. 비슷하게 오른쪽 경계로부터 $u_{41} = u_{21} + 3$이므로, 방정식은
$-4u_{01} + 2u_{11} = 1$
$u_{01} - 4u_{11} + u_{21} = -0.25 + 0.75 = 0.5$
$u_{11} - 4u_{21} + u_{31} = -1$
$2u_{21} - 4u_{31} = -2.25 - 1.25 - 3 = -6.5$
따라서 해는 $u_{01} = -0.25$, $u_{11} = 0$, $u_{21} = 0.75$, $u_{31} = 2$. 이 값은 exact solution인 $u(x,y) = x^2 - y^2$의 값과 일치한다.

3. $u_{11} = 1.1429$, $u_{21} = 1.1429$, $u_{12} = 1.4286$, $u_{22} = 1.4286$
exact solution : $u(x,y) = x + y$

4. exact solution : $u(x,y) = x^2y^2$
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \\ 1 \\ -20 \\ -103 \end{pmatrix}$$
따라서 해는 $u_{11} = 1$, $u_{21} = 3$, $u_{31} = 9$, $u_{12} = 4$, $u_{22} = 16$, $u_{32} = 36$.

5. $b = (2 \quad 0 \quad -12 \quad -9 \quad -36 \quad 129)^T$
$u_{11} = 5.7778$, $u_{21} = 14.3333$, $u_{31} = 23.2222$, $u_{12} = 10.7778$, $u_{22} = 28.3333$, $u_{32} = 52.2222$

6. exact solution : $u(x,y) = 9y\sin\frac{1}{3}\pi x$.
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \\ 2a \\ 3a+c \\ 3a+c \end{pmatrix}$$
단, $a = 8.54733$, $c = -\sqrt{243} = -15.5885$
따라서, $u_{11} = u_{21} = 8.46365$, $u_{12} = u_{22} = 16.8436$, $u_{13} = u_{23} = 24.9726$.

7. (GAS PROJECT)

8. $u_A - a^2u_P \approx (1-a^2)u_0 + ah(1-a)\frac{\partial u_0}{\partial x}$ 따라서 양변을 $ah(1-a)$로 나눈 다음 식을 정리하면 원하는 식이 나온다.

9. $\nabla^2 u_0 = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}$이므로 주어진 두 식을 더하면 간단히 나온다.

10. $u_A = u_O + ah\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}(ah)^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots\cdots(1)$
$u_P = u_O - ph\frac{\partial u_O}{\partial x} + \frac{1}{2}(ph)^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} + \cdots\cdots(2)$
$p\times(1) + a\times(2) \approx (p+a)u_O + \frac{1}{2}(a^2p + p^2a)h^2\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2}$
그러므로 간단한 대수적인 계산에 의하여
$\frac{\partial^2 u_O}{\partial x^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{a(p+a)}u_A + \frac{1}{p(a+p)}u_A - \frac{1}{ap}u_O\right]$.
비슷하게 $\frac{\partial^2 u_O}{\partial y^2} \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{b(p+b)}u_B + \frac{1}{p(b+p)}u_Q - \frac{1}{bp}u_O\right]$.
따라서 두 식을 더하면
$\nabla^2 u_0 \approx \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{a(p+a)}u_A + \frac{1}{b(p+b)}u_B + \frac{1}{p(a+p)}u_P + \frac{1}{p(b+p)}u_Q - \frac{ap+bq}{abpq}u_O\right]$

11. $h = 3$이므로, P_{21}에서는 $a = \frac{2}{3}$, $b = 1$으로 두면 $a(a+1) = \frac{10}{9}$, $b(b+1) = 2$, $1+a = \frac{5}{3}$, $1+b = 2$이므로 (7)의 P_{21}이 나온다.
P_{22}에서는 $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{3}$으로 두면 $a(a+1) = b(b+1) = \frac{10}{9}$, $a+1 = b+1 = \frac{3}{5}$이므로 (7)의 P_{22}가 나온다.

12. $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_{xx} = 6x$, $u_y = -6xy$, $u_{yy} = -6x$,따라서, $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

13. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -4 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \\ -3.5 \end{pmatrix}$

따라서 $u_{11} = 2.1214$, $u_{21} = 3.9777$, $u_{12} = 1.5080$, $u_{22} = 1.7893$

14. 경계에서의 모르는 값을 v라 하면, $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -4 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -v \\ -v \\ -\frac{8}{3}v \end{pmatrix}$

따라서 $u_{11} = \frac{v}{19}5$, $u_{21} = \frac{v}{19}10$, $u_{12} = \frac{v}{19}10$, $u_{22} = \frac{v}{19}16$

그러므로 $\frac{5v}{19} = 100$. 따라서 $v = 380$

15. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -4 \end{pmatrix}$

$u = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -380 \\ -190 \\ -190 \\ 0 \end{pmatrix}$

따라서 $u_{11} = 152$, $u_{21} = 95$, $u_{12} = 133$, $u_{22} = 38$

16. $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} - 2 = 2$

$u_{11} - 4u_{21} - 0.5 = 2$

그리고, $a = p = q = 1$, $b = \frac{1}{2}$이므로

$P_{22} : \begin{pmatrix} & \frac{4}{3} & \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ & \frac{2}{3} & \end{pmatrix}$ 따라서 세번째 식은 $\frac{4}{3}u_{11} - 6u_{12} = 4$.

따라서 해는 $u_{11} = -1.5$, $u_{21} = -1$, $u_{12} = -1$

19.6. Methods for Parabolic Equations

1. $u(x,\ t) = \frac{1}{u_0}\tilde{u}(\tilde{x},\ \tilde{t})$이므로, $\tilde{u}_{\tilde{t}} = u_0 u_t(x,\ t)\frac{c^2}{L^2}, \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = u_0 u_{xx}(x,\ t)\left(\frac{1}{L}\right)^2$. 따라서 이 식들을 $\tilde{u}_{\tilde{t}} = c^2\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$에 대입하면 $u_t = u_{xx}$가 나온다.

2. Sec 19.4 (6a)의 식에 의해 당연히 나온다.

3.

t	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
0.5	1.05	2	2.3	2.4	2.3
1.0	1	1.67	2.2	2.3	2.2
1.5	0.84	1.6	1.99	2.2	2.1
2.0	0.8	1.41	1.9	2.04	2

t	$x=6$	$x=7$	$x=8$	$x=9$
0.5	2	1.5	0.8	0.45
1.0	1.9	1.4	0.98	0.4
1.5	1.8	1.4	0.9	0.49
2.0	1.77	1.35	0.96	0.45

4. The first term in (10), Sec.11.5, gives $\exp\left[-\frac{1}{100}\pi^2 t\right] = 0.1t$, $t = 100(\ln 10)/pi^2 = 23.3$

5.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.01	0.136	0.15	0.1	0.05
0.02	0.106	0.134	0.1	0.05
0.03	0.087	0.119	0.096	0.05
0.04	0.073	0.105	0.090	0.049
0.04	0.063	0.093	0.084	0.047

6.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.01	0.2	0.35	0.35	0.2
0.02	0.188	0.313	0.313	0.188
0.03	0.172	0.281	0.281	0.172
0.04	0.156	0.254	0.254	0.156
0.05	0.142	0.229	0.229	0.142

값이 $u(x,\ t) = u(1-x, t)$를 만족한다.

7. $u_x(0,\ t) = 0$이므로 $u_{1j} - u_{-1j} \approx 2h\frac{\partial u_{0j}}{\partial x} = 0$. 따라서 $u_{0j} \approx u_{1j}$이다. 따라서 이 식을 (5)에 대입하면 원하는 식을 얻는다.

8. 문제 7의 도움을 받아 formular를 써 보면

$u_{0,j+1} = \frac{1}{2}(u_{0j} + u_{1j})$

$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}u_{ij} + frac14(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),\ i \geq 2$

t	$x=0.0$	$x=0.2$	$x=0.4$
0.01	0	0	0
0.02	0	0	0
0.03	0	0	0
0.04	0	0	0.008
0.05	0	0.002	0.025
0.06	0.001	0.007	0.049
0.07	0.004	0.016	0.073
0.08	0.010	0.027	0.091
0.09	0.019	0.039	0.097
0.10	0.029	0.048	0.089
0.11	0.039	0.054	0.040
0.12	0.046	0.047	-0.002

t	$x=0.6$	$x=0.8$	$x=1.0$
0.01	0	0	0.5
0.02	0	0.125	0.866
0.03	0.031	0.279	1
0.04	0.085	0.397	0.866
0.05	0.144	0.437	0.5
0.06	0.187	0.379	0
0.07	0.201	0.236	-0.5
0.08	0.178	0.043	-0.866
0.09	0.122	-0.601	-1
0.10	-0.065	-0.520	-0.866
0.11	-0.140	-0.493	-0.5
0.12	-0.183	-0.406	0

9.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.04	0.1636	0.2546	0.2546	0.1636
0.08	0.1074	0.1752	0.1752	0.1074
0.12	0.0734	0.1187	0.1187	0.0734
0.16	0.0498	0.0807	0.0807	0.0498
0.20	0.03387	0.05482	0.05482	0.03387

10. $t=2$일 때, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$의 값은 0, 0.6691, 1.2619, 1.7212, 2.0075, 2.1043, 2.0075, 1.7212, 1,2619, 0.6691, 0 .

11. $h=0.2$이므로 $k=0.04$. 따라서
$t=0.08$일 때, $x=0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$의 값은 0.04533, 0.067233, 0.067092, 0.0393789.

12. (GAS PROJECT)

19.7. Methods for Hyperbolic Equations

1.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.2	0.012	0.02	0.02	0.012
0.4	0.04	0.08	0.08	0.04
0.6	-0.04	-0.08	-0.08	-0.04
0.8	-0.012	-0.02	-0.02	-0.012
1.0	-0.016	-0.024	-0.024	-0.012
1.2	-0.012	-0.02	-0.02	-0.012
1.4	-0.004	-0.008	-0.008	-0.004
1.6	-0.004	-0.008	-0.008	-0.004
1.8	0.012	0.02	0.02	0.012
2.0	0.016	0.024	0.024	0.016

2.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.2	0.048	0.088	0.112	0.072
0.4	0.056	0.064	0.016	-0.016
0.6	0.016	-0.016	-0.064	-0.056
0.8	-0.072	-0.112	-0.088	-0.048
1.0	-0.128	-0.144	-0.096	-0.032

여기서 $1 \le t \le 2$는 위의 값의 반대 부호를 붙인 값이다.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
1.2	-0.072	-0.112	-0.088	-0.048
1.4	0.016	-0.016	-0.644	-0.056
1.6	0.056	0.064	0.016	-0.016
1.8	0.048	0.088	0.112	0.072
2.0	0.032	0.096	0.144	0.128

3.

t	$x=0.2$	$x=0.4$	$x=0.6$	$x=0.8$
0.2	0.075	0.15	0.1	0.05
0.4	-0.05	0.025	0.1	0.05
0.6	-0.05	-0.1	-0.025	0.05
0.8	-0.05	-0.1	-0.15	-0.075
1.0	-0.05	-0.1	-0.15	-0.2

4. Sev 11.4 (14)식에 의하여 $c=1$로 두면, (6)식에서 왼쪽은
$u_{i,j+1} = u(ih,)j+1)h) = \frac{1}{2}[f(ih+(j+1)h) + f(ih-(j+1)h]\cdots$(가)
(6)의 오른쪽에서
$u_{i-1,j} = \frac{1}{2}[f((i-1)h+jh) + f((i-1)h-jh)]$,
$u_{i+1,j} = \frac{1}{2}[f((i+1)h+jh) + f((i+1)h-jh)]$,
$-u_{i,j-1} = -\frac{1}{2}[f(ih+(j-1)h) + f(ih-(j-1)h)]$.
변변끼리 더하면 (가)식의 오른쪽이 나온다.

5. true solution : $u(x,\ t) = \frac{1}{2\pi}[\cos\pi(x-t) - \cos\pi(x+t)]$.

x	$t=0.2$	$t=0.4$
0.2	0.11755705	0.190211303
0.4	0.190211303	0.307768354
0.6	0.190211303	0.307768354
0.8	0.11755705	0.190211303

6.

t	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$
0.0	0	0	0
0.1	0.030901699	0.058778525	0.080901699
0.2	0.058778525	0.111803399	0.153884177
0.3	0.080901699	0.153884177	0.211803399
0.4	0.09510565	0.180901699	0.248989828

t	$x=0.4$	$x=0.5$
0.0	0	0
0.1	0.0951056516	0.1
0.2	0.180901699	0.190211303
0.3	0.248989828	0.261803399
0.4	0.292705098	0.307768354

7. $f(x) = 1-\cos 2\pi x,\ g(x) = x - x^2,\ k = h = 0.1$이므로
$t = 0.01$일 때,
$u_{i1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,0} + u_{i_1,0}) + kg_i\ ,i = 1,2,\cdots n-1\cdots$(가)
이계산을 위하여 $u_{i,0} = f(0.1i) = 1-\cos(2\pi 0.1\times i)$, $g_i = g(0.1i) = (0.1i) - (0.1i)^2$이다. 따라서 (가)로부터 $u_{i,1},\ ,i = 1,2,\cdots n-1$을 구한다.
$t = 0.02$일 때,
$u_{i2} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j-1}\ ,i = 1,2,\cdots n-1$
이 식으로 구한다. 결과는 다음과 같다.

x	$t = 0.1$	$t = 0.2$
0.0	0	0
0.1	0.354491503	0.575016994
0.2	0.766	0.934508497
0.3	1.271	1.1354915
0.4	1.6785085	1.296
0.5	1.83401699	1.35701699
0.6	1.6785085	1.296
0.7	1.271	1.1354915
0.8	0.766	0.934508497
0.9	0.354491503	0.575016994
1.0	0	0

8. Sec 11.4의 (13)식에 의하여, $u(x,y) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$이고, $f(x) = u(x,0)$이므로 위 식에 대입하면 우리가 원하는 식이 나온다. 또한 $\int_{x_i-k}^{x_i+k} g(s)ds \approx 2kg_i$이므로 (8)식이 유도된다.

9. $x = 0.1, 0.2, \cdots, 0.9$일 때, 해는 0.346358169, 0.751566667, 1.25206667, 1.65687516, 1.81148366, 1.65687516, 1.25206667, 0.751566667, 0.346358169이 된다.

10.

t	$x=0$	$x=0.2$	$x=0.4$
0	0	0.04	0.16
0.2	0.04	0.16	0.36
0.4	0.16	0.36	0.64
0.6	0.36	0.64	1
0.8	0.64	1	1.44
1.0	1	1.44	1.96

t	$x=0.6$	$x=0.8$	$x=1.0$
0	0.36	0.64	1
0.2	0.64	1	1.44
0.4	1	1.44	1.96
0.6	1.44	1.96	2.56
0.8	1.96	2.56	3.24
1.0	2.56	3.24	4

이 값들은 true solution $u(x,y) = (x+t)^2$과 거의 일치한다.

Chapter 19. Review

1. Geometrically it is an approxmation of the curve of $y(x)$ by a polygon whose first side is tangent to the curve at x_0.

2. Tayer formular에서 $y(x+h) - y(x) = hy'(x) + O(h^2)$로 표시할 수 있을 때, $O(h^2)$을 local order라고 부른다.
   Euler method에서 풀고자 하는 구간에서 오차가 $O(h)$일 때, 이 오차를 global order이라고 부른다.

3. error estimate = ||true value - calculated value||

4. 정확도는 O(h)이다. 정확도를 증가시키는 방법은 improved euler method가 있다.

5. Tayer Method : $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$
   numerical method에서는 나머지 부분을 버리고 사용한다.

6. y_{n+1}의 값을 구하기 위하여.

7. 6개의 function값으로써 y_{n+1}을 구한 방법이다. 식은 (12a)와 (12b) 그리고 (14)식이다.

8. Euler Method, Runge-Kutta Method

9. automatic step size contral이란 해의 오차가 주어진 tolerance 값 보다 더 커지지 않도록 h_n의 크기를 자동적으로 조절하는 것이다.

10. Euler Method를 보면 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$으로 바로 그 전의 값만을 이용하는 방법을 One step method라고 한다.
    Adams-Bashforth Method를 보면 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$으로 바로 앞의 값 뿐만 아니라 그 전의 값들 까지도 이용하여 값을 구하는 방법이다.

11. improved euler method에서 $y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$으로 미리 y_{n+1}값을 y^*_{n+1}값으로 예측하여 $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})]$을 구한다.

12. 예를 들어 One step method는 self-starting 이라고 말한다. 왜내하면 처음에 시작할 때, 미리 계산해야 할 값이 없기 때문이다.
    그러나 Muliti step method는 non-self starting라고 말하는데 왜냐하면 처음에 시작할 때, 미리 f_1, f_2, f_3등을 계산해야 하기 때문이다.

13. Second differential equation에서 y'항이 없는 식이 관심이 있다.

14. space 방향으로든 time방향으로든 한쪽으로만 미분값을 구해야 하므로 finite dofference가 쓰인다.

15. five point difference methods.

16. Because boundary condition.

17. 경우에 따라서 다르다.

18. Laplace equation : ADI-method
    Parabolic equation : Crank-Nicolson method
    Hyperbolic equation : explicit method

19. 18번의 답과 같음.

20. wave equation : initial displacement $u(x,0)$, initial velocity $u_t(x,0)$
heat equation : initial condition $u(x,0)$

21. Solution : $y = e^x$

x_n	y_n	Error
0.1	1.1	0.005170
0.2	1.21	0.011403
0.3	1.331	0.018859
0.4	1.4641	0.027725
0.5	1.6105	0.038211
0.6	1.7716	0.050558
0.7	1.9487	0.065036
0.8	2.1436	0.081952
0.9	2.3579	0.101655
1.0	2.5937	0.124539

22.

x_n	y_n	Error
0.01	1.01	5.0167E-5
0.02	1.0201	1.0134E-4
0.03	1.03030	1.5353E-4
0.04	1.04060	2.0676E-4
0.05	1.05101	2.6105E-4
0.06	1.06152	3.1640E-4
0.07	1.07214	3.7283E-4
0.08	1.08286	4.3036E-4
0.09	1.09369	4.8901E-4
1.00	1.10462	5.4879E-4

23. Solution : $y = \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$

x_n	y_n	Error
0.1	0.50526	-4.13114E-4
0.2	0.51959	-7.34721E-4
0.3	0.54241	-9.90473E-4
0.4	0.57336	-1.20038E-3
0.5	0.61227	-1.38007E-3
0.6	0.65911	-1.54182E-3
0.7	0.71405	-1.69530E-3
0.8	0.77734	-1.84822E-3
0.9	0.84942	-2.00687E-3
1.0	0.93083	-2.17639E-3

24. Solution : $y = 2e^{-x} + x^2 + 1$

x_n	y_n	Error$\times 10^4$
0.1	2.8205	-8
0.2	2.6790	-15
0.3	2.5738	-22
0.4	2.5033	-27
0.5	2.4662	-32
0.6	2.4612	-36
0.7	2.4871	-39
0.8	2.5429	-42
0.9	2.6276	-44
1.0	2.7404	-46

25. Solution : $y = e^x$

x_n	y_n	Error(5S)	Error(9S)
0.1	1.10517	0	8.60E-8
0.2	1.22140	0	1.91E-7
0.3	1.34985	0	3.15E-7
0.4	1.49182	0	4.64E-7
0.5	1.64872	0	6.39E-7
0.6	1.82212	0	8.44E-7
0.7	2.01375	0	1.08E-6
0.8	2.22554	0	1.37E-6
0.9	2.45960	0	1.70E-6
1.0	2.71828	0	2.09E-6

유효숫자를 5자리로 하면 값이 정확하게 구해진다.

26. Solution : $y = e^{\frac{x^2}{2}}$

x_n	y_n	Error
0.2	1.02020133	6.1E-9
0.4	1.08328699	7.40E-8
0.6	1.19721701	3.53E-7
0.8	1.37712642	1.344E-6
1.0	1.64871669	4.582E-6

27. Solution : $y = e^{x+\ln x}$

x_n	y_n	Error
1.2	3.98395076	0.000189546
1.4	5.67681876	0.000461198
1.6	7.92400548	0.000846399
1.8	10.8879797	0.001385703
2.0	14.7759806	0.002131595

28. From $y' = x + y$ and the given formaula we get, with $h - 0.2$
$k_1 = 0.2(x_n + y_n)$
$k_2 = 0.2[x_n + 0.1 + y_n + 0.1(x_n + y_n)]$
$k_3^* = 0.2[x_n + 0.2 + y_n - 0.2(x_n + y_n) + 0.4[1.1(x_n + y_n) + 0.1]]$
$= 0.2[1.24(x_n + y_n) + 0.24]$
and from this
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[1.328(x_n + y_n) + 0.128]$
The computed values are

x_n	y_n	Error$\times 10^6$
0.0	0	0
0.2	0.021333	69
0.4	0.091655	170
0.6	0.221808	311
0.8	0.425035	506
1.0	0.717509	772

29.

x_n	y_n	Error
0.1	1.105	0.00017092
0.2	1.22102	0.00037777
0.3	1.34923	0.00062619
0.4	1.49090	0.00092266
0.5	1.64745	0.00127452
0.6	1.82043	0.00169014
0.7	2.01157	0.00217904
0.8	2.22279	0.00275202
0.9	2.45618	0.00342137
1.0	2.71408	0.00420099

30. Solution : $y = \tan x - x + 4$

x_n	y_n^*	y_n	Error
0.8	4.2234	4.2297	-5.1845E-5
1.0	4.5376	4.5569	5.4813E-4

31. Solution : $y = \sin x$

x_n	y_n^*	y_n	Error
0.8	0.717249	0.717366	-1.03999E-5
1.0	0.841382	0.841496	-2.50596E-5
1.2	0.931975	0.932076	-3.67559E-5
1.4	0.985398	0.985499	-4.93619E-5

32. $y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)dx$이므로 $r = \frac{x - x_{n+1}}{h}$로 두면,
$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \tilde{p}_1(x)dx = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1}$
$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \tilde{p}_1(x)dx = y_n + h(f_{n+1} - \frac{1}{2}(f_{n+1} - f_n)) = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$. 이때, f_{n+1}은 다음과 같은 값 f_{n+1}^*으로 대체한다.
$h\int_0^1 p_1(x)dx = h\left(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n\right)$
$= h\left(f_n + \frac{1}{2}(f_n - f_{n-1})\right)$
$= \frac{h}{12}(3f_n - f_{n-1})$
따라서
$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$
$f_{n+1}^* = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)$
그러므로 주어진 식이 나온다.

33. Solution : $y = e^x - x + 1$

x_n	y_n	Error	Error as third degree
0. 4	0.04977	0.04206	
0.6	0.09826	0.12386	
0.8	0.16870	0.25684	1.3050E-5
1.0	0.26303	0.45525	1.3137E-5

34. Solution : $y_1 = 2\cos(2x)$, $y_2 = -4\sin(2x)$

x_n	y_1	y_2
0.2	2.	-1.6
0.4	1.68	-3.2
0.6	1.04	-4.544
0.8	0.1312	-5.376
1.0	-0.944	-5.481
1.2	-2.0402	-4.7258
1.4	-2.9853	-3.0936
1.6	-3.6041	-0.7053
1.8	-3.7451	2.1779
2.0	-3.3095	5.1740

35.

x_n	y_1	y_2
0.2	1	0
0.4	1.	0.008
0.6	1.0016	0.04
0.8	1.0096	0.11211
1.0	1.03202	0.24134

36. True Solution : $y_1 = -6e^{9x} + 3e^{3x}$, $y_2 = -2e^{9x} - e^{3x}$

x_n	y_1	Error	y_2	Error
0.05	-5.9234	-9.9468E-4	-4.2981	-3.3284E-4
0.1	-10.705	-3.1212E-3	-6.2680	-1.0434E-3
0.15	-18.432	-7.3450E-3	-9.2807	-2.4536E-3

37. Solution : $y_1 = -\cos x + e^x$, $y_2 = \sin x + e^x$

x_n	y_1	Error	y_2	Error
0.2	0.24134	-1.7151E-6	1.42007	6.559E-6
0.4	0.57077	-1.9625E-6	1.88123	1.412E-5
0.6	0.99678	-6.9491E-7	2.38674	2.246E-5
0.8	1.52883	2.0736E-6	2.94287	3.139E-5
1.0	2.17797	6.2482E-6	3.55971	4.081E-5

38. Solution : $y = x^3 - 3x$

x_n	y_1	Error	y_2	Error
0.1	-0.3	0.001	-3.	0.03
0.2	-0.597	0.005	-2.94	0.06
0.3	-0.8850	0.01198	-2.8197	0.0897
0.4	-1.1579	0.02191	-2.6388	0.1188
0.5	-1.4097	0.03470	-2.3970	

39. Solution : $y = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

x_n	y_1	Error	y_2	Error
0.1	-0.485	0	0.3	0
0.2	-0.44	0	0.6	0
0.3	-0.365	0	0.9	0
0.4	-0.26	0	1.2	0
0.5	-0.125	0	1.5	0

40. $u(P_{11}) = u(P_{12}) = 105$, $u(P_{21}) = 155$, $u(P_{22}) = 115$

41. $u_{ij} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})/4$이므로 주변의 4개의 값의 평균이 나온다.

42. $P_{11} = 1.96$, $P_{12} = 7.86$, $P_{13} = 29.46$

43. Liebmann's method's에 의하여 15 Setp(5S)에서 해에 수렴한다.
$u(P_{11}) = 267$, $u(P_{21}) = 30$, $u(P_{31}) = 270$, $u(P_{12}) = 90$, $u(P_{22}) = 60$, $u(P_{32}) = 90$, $u(P_{13}) = 30$, $u(P_{23}) = 30$, $u(P_{33}) = 30$

44.

t	$x = 0$	$x = 0.2$	$x = 0.4$
0.02	0	0	0
0.04	0	0	0
0.06	0	0	0
0.08	0	0	0.062
0.10	0	0.031	0.108
0.12	0	0.054	0.172
0.14	0	0.086	0.189
0.16	0	0.095	0.188
0.18	0	0.094	0.135
0.20	0	0.068	0.067
0.22	0	0.034	-0.019
0.24	0	-0.009	-0.086

t	$x = 0.6$	$x = 0.8$	$x = 1.0$
0.02	0	0	0.5
0.04	0	0.250	0.8660
0.06	0.125	0.433	1
0.08	0.217	0.562	0.8660
0.10	0.312	0.541	0.5
0.12	0.325	0.406	0
0.14	0.289	0.162	-0.5
0.16	0.176	-0.105	-0.8660
0.18	0.041	-0.345	-1
0.20	-0.105	-0.479	-0.8660
0.22	-0.206	-0.485	-0.5
0.24	-0.252	-0.353	0

45. 우리는 $x = 0, \cdots, 0.5$까지의 값을 구하면 나머지는 0.5에 대하여 대칭이다.

t	$x = 0.0$	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$
0.1	0.00	0.08	0.15	0.2
0.2	0.00	0.06	0.12	0.17
0.3	0.00	0.04	0.08	0.12

t	$x = 0.4$	$x = 0.5$	$x = 0.6$
0.1	0.23	0.24	0.23
0.2	0.2	0.21	0.2
0.3	0.15	0.16	0.15

CHAPTER 20

Unconstrained Optimization, Linear Programming

This chapter provides an introduction to the more important concepts, methods, and results of optimization. Optimization principles are of increasing importance in modern engineering design and systems operation in various areas. The recent development has been affected by computers capable of solving large-scale problems, and by the corresponding creation of new optimization techniques, so that the entire field is in the process of becoming a large area of its own.

Prerequisite: A modest knowledge of linear systems of equations.
References: Appendix 1, Part F.
Answers to problems: Appendix 2.

20.1. Basic Concepts. Unconstrained Optimization

1. $n = 0$일 때, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(6,3) = (12,18)$
$n = 1$일 때, $\nabla f(\mathbf{x}_1) = \nabla f(3.484, -0.774) = (6.968, -4.644)$
그러므로 $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_1) = 12 \times 6.968 + 18 \times (-4.644) = 0.024$
$n = 2$일 때, $\nabla f(\mathbf{x}_2) = \nabla f(1.327, 0.664) = (2.654, 3.984)$
그러므로 $\nabla f(\mathbf{x}_1) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_2) = 6.968 \times 2.654 + (-4.644) \times (3.984) = -0.0086$. 등등. 연속하는 gradient는 수직이다.
실재로 구하는 t값은 $g'(t) = 0$인 $t = t_n$이므로 $g'(t_n) = [f(\mathbf{z}(t_n))]' = \nabla f(\mathbf{z}(t_n)) \cdot \mathbf{z}'(t_n) = 0$이다. 그런데 $\mathbf{z}(t_n) = x_{n+1}$, $\mathbf{z}'(t_n) = \nabla f(x_n)$이므로 $\nabla f(x_{n+1}) \cdot \nabla f(x_n) = 0$.

****

다음 문제부터는 모든 $f(x_1,\ x_2)$가 quadratic function이므로, 다음과 같이 계산한다.
$f(x_1,\ x_2) = ax_1 + bx_2 + cx_1 + dx_2 + ex_1x_2$로 둘 때,
$\nabla f(x_1,\ x_2) = (2ax + c + ex_2,\ 2by + d + ex_1)$
$z(t) = (x_1, x_2) - t(2ax_1 + c + ex_2, 2bx_2 + d + ex_1) = (x_1 - (2ax_1 + c + ex_2)t, x_2 - (2bx_2 + d + ex_1)t)$

$$t = \frac{df1(2ax_1 + c + ex_2) + df2(2bx_2 + d + ex_1)}{2a(df1)^2 + 2b(df2)^2 + 2e(df1)(df2)}$$

단, $df1 = 2ax_1 + c + ex_2$. $df2 = 2bx_2 + d + ex_1$

2.

n	t	x_1	x_2
0		4	0
1	0.13077	3.7385	1.0462
2	0.425	3.11077	0.889231
3	0.13077	3.08180	1.00511

3.

n	t	x_1	x_2
0		1	-2
1	0.22368	1.67105	0.68421
2	0.283333	1	0.851974
3	0.22368	1.03311	0.984418

4.

n	t	x_1	x_2
0		5	2
1	0.633598	-1.4880	0.97991
2	1.38540	-1.29286	-0.261496
3	0.633598	-1.40147	-0.278573

5.

n	t	x_1	x_2
0		0	0
1	0.021511	0.688352	-0.860441
2	0.284722	1.76390346	0
3	0.02151102	1.845162	-0.1015735

6. $f(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2$이므로
$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x} - t[2x_1,\ -1] = [(1-2t)x_1, {}^{\backprime}x_2 + t]$,
그러므로, $g(t) = (1-2t)^2 x_1^2 - x_2 - t$, $g'(t) = -4(1-2t)x_1^2 - 1 = 0$. 이로부터, $1 - 2t = -\frac{1}{4x_1^2}$, $t = \frac{1}{2} + 1\frac{1}{8x_1^2}$. 이로부터 t는,
$z(t) = \left[-\frac{1}{4x_1},\ x_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8x_1^2}\right]$
이로부터 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$로 두면
$\mathbf{z}_1 = [-\frac{1}{4},\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}]$
$\mathbf{z}_2 = [1,\ 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 2]$
$\mathbf{z}_3 = [-\frac{1}{4},\ 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2]$, etc

7. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + cx_2$이므로 $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 2cx_2)$.
$\mathbf{z}(t) = (x_1, x_2) - t(2x_1, 2cx_2) = (x_1 - 2tx_1, x_2 - 2ctx_2)$
$g(t) = (x_1 - 2tx_1)^2 + c(x_2 - 2ctx_2)^2$
$g'(t) = -2x_1(x_1 - 2tx_1) - 2c^2x_2(x_2 - 2ctx_2) = 0$
따라서 $t = \dfrac{x_1^2 + c^2x_2^2}{2x_1^2 + 2c^3x_2^2}$
$x_0 = [c,\ 1]$일 때, $t = \frac{1}{t+1}$, $x_1 = [\frac{c(c-1)}{c+1}, -\frac{c-1}{c+1}]$ 등등..
계속 구해나가면 원하는 식이 나온다.

8.

n	t	x_1	x_2
0		2	1
1	0.83	-1.33	2.67
2	-0.83	-3.56	-1.78
3	0.833	2.370	-4.740
4	-0.83	6.321	3.1605
5	0.83	-4.214	8.428

9. t값이 구해지지 않으므로 이 방법을 적용할 수 없다.

10. (PROGRAM)

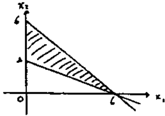
20.2. Linear Programming

1. 있을 수 없다. 영역이 convex set이므로 경계에서 최대, 또는 최소값을 갖는다.

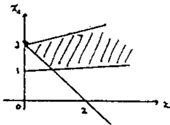
2. 아니오. 예를 들어 $f = 5x_1 + 2x_2$로 잡으면 최대값은 12이고 이 값은 선분 AB위의 모든 점에서 12가 나온다.

3. 제한 범위에서 부등식을 등식으로 바꾸어준다.

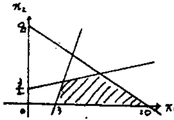
4.



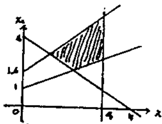
5.



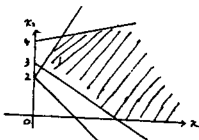
6.



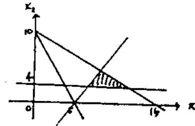
7.



8.



9.



10. 문제가 잘못됨. 첫번째 식을 $-x_1 + x_2 \leq -5$를 $-x_1 + x_2 \geq -5$로 바꾸어야 한다. 이때, 최대값 : $f(9,4) = 270 + 40 = 310$

11. 문제 10번과 마찬가지로 바꾸면 최소가 되는 x는 유일하지 않고 점(0,10)과 점 (3,4)를 이은 선분 위에서 최소값은 225이다.

12. 경계가 유한하지 않으므로 최대값은 없다.

13. 최소값 : $f\left(\frac{5}{6},\ \frac{7}{6}\right) = \frac{100}{3}$

14. 최대값 : $f(9,\ 6) = 360$

15. 최대값 : $f(0,\ 5) = 10$

16. 총 생산량 : $P = x_1 + 2x_2$, 제한조건 : $2x_1 + 4x_2 \leq 800$, $5x_1 + 2x_2 \leq 600$,
따라서 P의 최대값은 $x_1 = 50$, $x_2 = 175$일 때, 225이다.

17. x_1을 L_1제품의 개수, x_2을 L_2제품의 개수라 할 때, 최대 이익 $S = 15x_1 + 10x_2$이고, 제한 조건은 $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 100$, $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \leq 80$. 따라서 최대값은 $x_1 = 210$, $x_2 = 60$일 때, 3750을 갖는다.

18. x_1=Number of days of operation of kiln I.
x_2=Number of days of operation of kiln II.
Object function : $f = 400x_1 + 600x_2$
Constraints :
(Grey bricks) $3000x_1 + 2000x_2 \leq 9000$
(Red bricks) $2000x_1 + 5000x_2 \leq 17000$
(Glazed bricks) $300x_1 + 1500x_2 \leq 4500$
최소값은 $x_1 = 1$, $x_2 = 3$일 때, 2200을 갖는다.

19. x_1=the product of B_1. x_2=the product of B_2.
Object function : $f = 120x_1 + 100x_2$
Constraints :
(Copper) $0.5x_1 + 0.75x_2 \leq 15$
(Zinc) $0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 10$
최대값은 $x_1 = 15$, $x_2 = 10$일 때, 2800을 갖는다.

20. x_1=units of A, x_2=units of B
Object function : $f = 1.5x_1 + 2x_2$
Constraints :
(Protein) $0.5x_1 + 0.75x_2 \leq 15$
(Calories) $0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 10$
최소값은 $x_1 = 3$, $x_2 = 2$일 때, 8.50을 갖는다.

20.3. Simplex Method

1. The normal form is
$z - 30x_1 - 20x_2 = 0$
$-x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 10$
계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -30 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ & -1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

-20이 -30보다 더 크기 때문에 2번째 열을 선택하고, $\frac{5}{1}$이 $\frac{10}{1}$보다 작기 때문에 두번째 열로 pivot한다.

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & -50 & 0 & 20 & 0 & 100 & \text{열1} \\ & & & & & & +20 \times \text{열2} \\ & -1 & 1 & 1 & 0 & 5 & \\ & 3 & 0 & -1 & 1 & 5 & \text{열3} \\ & & & & & & -\text{열2} \end{bmatrix}$$

-50만 음수이고, 3만 양수이므로 세번째 열로 pivot한다.

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{50}{3} & \frac{550}{3} & \text{열1} \\ & & & & & & +\frac{50}{3} \times \text{열3} \\ & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} & \text{열2} \\ & & & & & & +\frac{1}{3} \times \text{열3} \\ & 3 & 0 & -1 & 1 & 5 & \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2,
nonbasic variables : x_3, x_4
$x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{20}{3}$일 때, 최대값 $\frac{550}{3}$

2. The normal form is
$z - x_1 - x_2 = 0$
$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 800$
$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 600$
계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 4 & 1 & 0 & 800 \\ & 5 & 2 & 0 & 1 & 600 \end{bmatrix}$$

-1이 -1이 둘 다 같으므로 1번째 열을 선택하고, $\frac{600}{5}$이 $\frac{800}{2}$보다 작기 때문에 세번째 열로 pivot한다.

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 120 & \text{열1} \\ & & & & & & +\frac{1}{5} \times \text{열3} \\ & 0 & \frac{16}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & 560 & \text{열2} \\ & & & & & & -\frac{2}{5} \times \text{열3} \\ & 5 & 2 & 0 & 1 & 600 & \end{bmatrix}$$

$560/\frac{16}{5} < 600/2$, pivot 16/5

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & 225 & \text{열1} \\ & & & & & & +\frac{3}{16} \times \text{열2} \\ & 0 & \frac{16}{5} & 1 & -\frac{2}{5} & 560 & \\ & 5 & 0 & -\frac{5}{8} & \frac{5}{4} & 250 & \text{열3} \\ & & & & & & -\frac{5}{8} \times \text{열2} \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2,
nonbasic variables : x_3, x_4
$x_1 = 50$, $x_2 = 175$일 때, 최대값 225

3. Matrices with rows 2 and 3 and columns 4 and 5 interchaged.

4. The normal form is
$z - x_1 - x_2 = 0$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 550$
$5x_1 + 4x_2 + x_4 = 650$
계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 4 & 1 & 0 & 550 \\ & 5 & 4 & 0 & 1 & 650 \end{bmatrix}$$

550/3>650/5, pivot 5

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 130 & \text{열1} \\ & & & & & & +\frac{1}{5} \times \text{열3} \\ & 0 & \frac{8}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & 160 & \text{열2} \\ & & & & & & -\frac{3}{5} \times \text{열3} \\ & 5 & 4 & 0 & 1 & 650 & \end{bmatrix}$$

$160/\frac{8}{5}$ <650/4, pivot 8/5

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 150 & \text{열1} \\ & & & & & & +\frac{1}{8} \times \text{열2} \\ & 0 & \frac{8}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & 160 & \\ & 5 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 250 & \text{열3} \\ & & & & & & -\frac{5}{2} \times \text{열2} \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2,
nonbasic variables : x_3, x_4
$x_1 = 50$, $x_2 = 100$일 때, 최대값 150

5. The normal form is
$z - 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$
$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 12$
계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -2 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ & 4 & 3 & 6 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & 3 & x_4 & b \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 4 \\ & 4 & 3 & 6 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ & 4 & 3 & 6 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

따라서 $x_1 = 3,\ x_2 = 2, x_3 = 2$일 때, 최대값 6

6. The normal form is

$z - 90x_1 - 50x_2 = 0$
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$
$x_1 + x_2 + x_4 = 10$
$3x_1 + x_2 + x_5 = 24$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -90 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 18 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 24 \end{bmatrix}$$

pivot 3 in row 4

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 10 \\ & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 2 \\ & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 24 \end{bmatrix}$$

pivot 2/3 in row 3

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 30 & 20 & 780 \\ & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 2 \\ & 3 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 21 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_1,\ x_2, x_3$,
nonbasic variables : $x_4,\ x_5$
$x_1 = 7,\ x_2 = 3$일 때, 최대값 780

7. The normal form is

$z - 5x_1 + 20x_2 = 0$
$-2x_1 + 10x_2 + x_3 = 5$
$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ 1 & -5 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ & -2 & 10 & 1 & 0 & 5 \\ & 2 & 5 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

5/10=1/2<10/5=2, pivot 10

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b & \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & -10 & \text{열1} \\ & & & & & & -2\text{열2} \\ & -2 & 10 & 1 & 0 & 5 & \\ & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{2} & \text{열3} \\ & & & & & & -\frac{1}{2}\times\text{열2} \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_2,
nonbasic variables : $x_1, x_3,\ x_4$
$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$일 때, 최소값 -10

8. The normal form is

$z - 54x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 0$
$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 60$
$2x_1 + x_2 + x_5 = 20$
$2x_1 + 3x_3 + x_6 = 30$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & -5 & 10 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 20 \\ & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

60/4=15<20/1=20, pivot 4

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & \frac{23}{2} & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -150 \\ & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 5 \\ & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

60/5=12<30/3=10, pivot 3

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & \frac{33}{2} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{2} & -225 \\ & -\frac{1}{3} & 4 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 10 \\ & \frac{25}{12} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{5}{12} & \frac{35}{2} \\ & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_2,\ x_3$,
nonbasic variables : $x_1,\ x_4,\ x_5,\ x_6$
$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_3 = 10$일 때, 최소값 -225

9. The normal form is

$z - 10x_1 - 10x_2 - 20x_3 - 20x_4 = 0$
$12x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 120$
$3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 24x_4 + x_6 = 180$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & -10 & -10 & -20 & -20 & 0 & 0 & 0 \\ & 12 & 8 & 6 & 4 & 1 & 0 & 120 \\ & 3 & 6 & 12 & 24 & 0 & 1 & 180 \end{bmatrix}$$

120/8<180/6, pivot 8

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & 5 & 0 & -\frac{25}{2} & -15 & \frac{5}{4} & 0 & 150 \\ & 12 & 8 & 6 & 4 & 1 & 0 & 120 \\ & -6 & 0 & \frac{15}{2} & 21 & \frac{3}{4} & 1 & 90 \end{bmatrix}$$

$120/6=20>90/\frac{15}{2} = 12$ pivot $\frac{15}{2}$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & -5 & 0 & 0 & 20 & 0 & \frac{5}{3} & 300 \\ & \frac{84}{5} & 8 & 0 & -\frac{64}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 48 \\ & -6 & 0 & \frac{15}{2} & 21 & \frac{3}{4} & 1 & 90 \end{bmatrix}$$

pivot $\frac{84}{5}$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{80}{21} & \frac{5}{42} & \frac{180}{126} & \frac{2200}{7} \\ & \frac{84}{5} & 8 & 0 & -\frac{64}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & 48 \\ & 0 & \frac{20}{7} & \frac{15}{2} & \frac{115}{7} & -\frac{25}{28} & \frac{5}{7} & \frac{750}{7} \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_1,\ x_3$,
nonbasic variables : $x_2,\ x_4,\ x_5,\ x_6$

$x_1 = \frac{60}{21}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1500}{105}$, $x_4 = 0$일 때, 최소값 $\frac{2200}{7}$

10. (PROGRAM)

20.4. Simplex Method : Degeneracy, Difficulties in Starting

1. The normal form is

$z - 6x_1 - 12x_2 = 0$
$x_1 + x_3 = 4$
$x_2 + x_4 = 4$
$6x_1 + 12x_2 + x_5 = 72$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -6 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ & 6 & 12 & 0 & 0 & 1 & 72 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -12 & 6 & 0 & 0 & 24 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ & 0 & 12 & -6 & 0 & 1 & 48 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 72 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & 6 & -12 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2, x_5
nonbasic variables : x_3, x_4
$x_1 = 4$, $x_2 = 4$일 때, 최대값 72

2. The normal form is

$z - 6x_1 - 12x_2 = 0$
$x_1 + x_3 = 4$
$x_2 + x_4 = 4$
$6x_1 + 12x_2 + x_5 = 72$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 6 & 12 & 0 & 1 & 0 & 72 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 72 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & -6 & -12 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2, x_5
nonbasic variables : x_3, x_4
$x_1 = 4$, $x_2 = 4$일 때, 최대값 72

3. The normal form is

$z - x_1 - x_2 = 0$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 130$
$3x_1 + 8x_2 + x_4 = 300$
$4x_1 + 2x_2 + x_5 = 140$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 130 \\ & 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 300 \\ & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 140 \end{bmatrix}$$

pivot 4

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 35 \\ & 0 & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 60 \\ & 0 & \frac{13}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 195 \\ & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 140 \end{bmatrix}$$

pivot 2

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 50 \\ & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 60 \\ & 0 & 0 & -\frac{13}{4} & 1 & \frac{8}{7} & 0 \\ & 4 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & 80 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2, x_4
nonbasic variables : x_3, x_5
$x_1 = 20$, $x_2 = 30$일 때, 최대값 50

4. The normal form is

$z - 300x_1 - 500x_2 = 0$
$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 30$
$4x_1 + 4x_2 + x_5 = 60$

계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -300 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

pivot 2

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -350 & 0 & 150 & 0 & 4500 \\ & 0 & 7 & 1 & -1 & 0 & 30 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot 4

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -200 & 175 & 4500 \\ & 0 & 0 & 1 & 6 & -\frac{7}{2} & 30 \\ & 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 30 \\ & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot 6

$$T_3=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & \frac{100}{3} & 0 & \frac{175}{3} & 5500 \\ & 0 & 0 & 1 & 6 & -\frac{7}{2} & 30 \\ & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 20 \\ & 0 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & 10 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_1,\ x_2,\ x_4$
nonbasic variables : $x_3,\ x_5$
$x_1 = 10,\ x_2 = 5$일 때, 최대값 5500

5. The normal form is
$z - 300x_1 - 500x_2 = 0$
$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 60$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 30$
$4x_1 + 4x_2 + x_5 = 60$
계산 과정및 결과 :

$$T_0=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -300 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & 8 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

pivot 4

$$T_1=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -200 & 0 & 75 & 0 & 4500 \\ & 0 & 6 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 30 \\ & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 60 \\ & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot 6

$$T_2=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & \frac{200}{6} & \frac{175}{3} & 0 & 5500 \\ & 0 & 6 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 30 \\ & 4 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 40 \\ & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{11}{12} & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_1,\ x_2,\ x_5$
nonbasic variables : $x_3,\ x_4$
$x_1 = 10,\ x_2 = 5$일 때, 최대값 5500

6. The normal form is
$z - x_1 - x_2 - x_3 = 0$
$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 12$
$8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_5 = 12$
계산 과정및 결과 :

$$T_0=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 4 & 5 & 8 & 1 & 0 & 12 \\ & 8 & 5 & 4 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

pivot 8

$$T_1=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{2} \\ & 0 & \frac{2}{5} & 6 & 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ & 8 & 5 & 4 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

pivot $\frac{5}{2}$

$$T_2=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20} & \frac{12}{5} \\ & 0 & \frac{2}{5} & 6 & 1 & -\frac{1}{2} & 6 \\ & 8 & 0 & -8 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_1,\ x_2$
nonbasic variables : $x_3,\ ,x_4,\ x_5$
$x_1 = 0,\ x_2 = 2.4,\ x_3 = 0$일 때, 최대값 2.4

7. The normal form is
$z - 6x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 0$
$x_1 + x_3 + x + x_4 = 1$
$x_2 + x_3 + x_5 = 1$
계산 과정및 결과 :

$$T_0=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -6 & -6 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$T_1=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -6 & -3 & 6 & 0 & 6 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$T_2=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 3 & -6 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$T_3=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$T_4=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 12 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : $x_1,\ x_2,\ x_5$
nonbasic variables : $x_3,\ x_4$
$x_1 = 1,\ x_2 = 1, x_3 = 0$일 때, 최대값 12

8. 구하는 문제가 최소값을 구하는 문제이므로 문제를 objective function $\tilde{f} = -2x_1 + x_2$의 최대값을 구하는 것으로 바꾸어 푼다.
artificial variable x_6을 도입하면
$x_3 = -5 + x_1 + x_2 + x_6$
따라서 새로운 objective function $\hat{f}$를 정의하자.
$\hat{f} = f - Mx_6 = (-2+M)x_1 + (1+M)x_2 - Mx_3 - 5M.$
The new normal form is
$z + (2 - M)x_1 + (-1 - M)x_2 + Mx_3 = -5M$
$x_1 + x_2 - x_3 = 5$
$-x_1 + x_2 + x_4 = 1$
$5x_1 + 4x_2 + x_5 = 40$
계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 2-M & -1-M & M & 0 & 0 & -5M \\ & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & -10 \\ & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 6 \\ & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}$$

pivot 2

$$\mathbf{T}_2=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 6 \\ & 0 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_2, x_5
nonbasic variables : x_3, x_4
$x_1 = 2$, $x_2 = 3, x_3 = 0$일 때, 최대값 -1
그러므로 원래의 문제의 최소값은 1이다.

9. The normal form is
$z - 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$
계산 과정및 결과 :

$$\mathbf{T}_0=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

pivot 1

$$\mathbf{T}_2=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot 2

$$\mathbf{T}_3=\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 basic variables : x_1, x_3
nonbasic variables : x_2, x_4, x_5
$x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$일 때, 최대값 3

10. artificial variable x_6을 $x_4 = x_1 + 2x_2 - 6 + x_6$으로 도입하면 대응되는 objective function은 $\tilde{f} = 2x_1 + x_2 - Mx_6$
$= (2+M)x_1 + (1+2M)x_2 - Mx_4 - 6M$
The normal form is
$z - (2+M)x_1 - (1+2M)x_2 + Mx_4 = -6M$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + 2x_2 - x_4 = 6$
$x_1 + x_2 + x_5 = 4$
계산 과정및 결과 :
$\mathbf{T}_0=$

$$\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & -2-M & -1-2M & 0 & M & 0 & -6M \\ & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

pivot 2
$\mathbf{T}_1=$

$$\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2}M & 1+\frac{1}{2}M & M & 0 & 2-5M \\ & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 5 \\ & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

pivot 1
$\mathbf{T}_2=$

$$\begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 1 & 3M & 0 & 1+2M & M & 0 & 2-2M \\ & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & -3 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

아직도 M이 남아 있다.

Chapter 20. Review

1. constraint optimization : 최적화를 하는데 control variable에 대한 조건이 있는 문제
unconstraint optimization : 최적화를 하는데 control variable에 대한 조건이 없는 문제

2. 최소값을 찾아나갈 때, 값이 가장 많이 감소하는 방향이 $-\nabla f(x)$방향이라는 데에 idea가 있다.

3. $||\nabla f(x_n)||$

4. (1) take initial x_0
(2)for $n = 1$, *cdots*
$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x_n} - t\nabla f(\mathbf{x}_n)$
find t minimize $g(t) = f(\mathbf{z}(t))$
if $\nabla f(\mathbf{z}(t)) \leq TOL$ then stop.
$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{z}(t)$
end

5. object function : function optimized .

6. 최적화의 해가 제한범위의 경계에 있다는 점이다.

7. slack variables : object function이나 constraint에 들어있는 변수
artificial variables : object function이나 constraint에 없는 변수.

사용하는 이유는 basic variables을 무엇으로 잡을지를 모를 때, artificial variables을 사용한다.

8. 모서리 점에서는 미분불가능하기 때문에.

9. a feasible solution at which more the usual number n-m of variables ae zero . 문제 20-4, 6번 문제를 보면 변수는 5개인데 0가 아닌 변수는 하나뿐이다.

10. basic variable을 잡기 어려울 때, 또는, 제한 범위의 영역이 convex가 아닐 때,

11.

n	t	x_1	x_2
0		6	3
1	0.112403	4.65116	-0.372093
2	0.32	1.65375	0.826873
3	0.112403	1.28197	-0.102558
4	0.32	0.455813	0.227907
5	0.112403	0.35334	-0.0282675

12.

n	t	x_1	x_2
0		2	4
1	0.0558264	-1.01462	3.77669
2	0.479085	-0.888521	2.07432
3	0.0558264	-1.00054	2.06602
4	0.479085	-0.995857	2.00276
5	0.055826	-1.00002	2.00245

13.

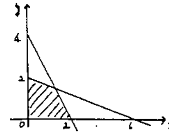
n	t	x_1	x_2
0		0	0
1	0.05798	-1.0437	0.2319
2	0.3632	-0.7582	1.516
3	0.0580	-1.011	1.5725
4	0.3632	-0.94153	1.8831
5	0.0580	-1.003	1.897

14. $\nabla f(x_0) = (18, -4)$, $\nabla f(x_1) = (-0.7858,\ -3.536)$
따라서 $\nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_1) = 5.15E - 14$
$\nabla f(x_2) = (4.3522,\ -0.96715)$, 따라서 $\nabla f(x_1) \cdot \nabla f(x_2) = -1.0755E - 16$등등
수직인 이유는 Sec 20.1 문제 1번에 설명이 있다.

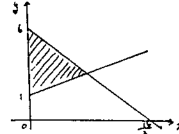
15. $z(t) = x - tf'(x)$, t는 $g'(t) = f'(z(t))z'(t) = 0$인 값으로 정한다.

16. ∇f대신에 $-\nabla f$를 대입한다.

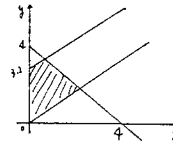
17.



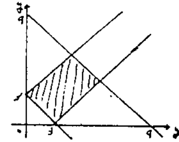
18.



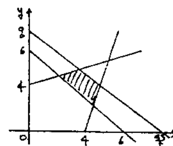
19.



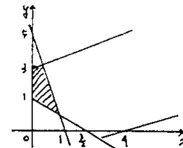
20.



21.



22.



23. 최대값은 $x_1 = 2$, $x_2 = 4$일 때, 50을 갖는다.
24. 최대값은 $x_1 = 6$, $x_2 = 3$일 때, 180을 갖는다.
25. 최소값은 $x_1 = 3$, $x_2 = 6$일 때, -54을 갖는다.

CHAPTER 21

Graphs and Combinatorial Optimization

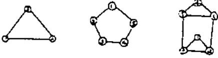
Graphs and **digraphs** (= directed graphs) are presently developing into more and more powerful tools in electrical and civil engineering, communication networks, industrial management, operations research, computer science, economics, management science, marketing sociology, and in other areas. An accelerating factor of this growth is the impact of computers and their use in large-scale optimization problems that can be modeled in terms of graphs and solved by algorithms provided by graph theory. This approach yields models of general applicability and economic importance. It lies at the center of **"combinatorial optimization,"** a term introduced about thirty years ago for denoting optimization problems that have pronounced discrete or combinatorial structures.

This chapter gives an introduction to this wide area, which is full of new ideas as well as unsolved problems—in connection, for instance, with efficient computer algorithms and computational complexity. The classes of problems we shall consider include problems on transportation of minimum cost or time, best assignment of workers to jobs, most efficient use of telephone networks, and many others. These classes often form the core of larger and more involved practical problems.

Prerequisites: None.
References: Appendix 1, Part F.
Answers to problems: Appendix 2.

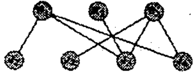
21.1. Graphs and Digraph

1.
2.



3. ←, → 또는 ↔로 표시한다.

4.



5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

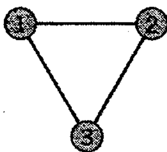
7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

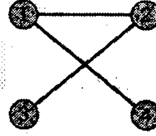
9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

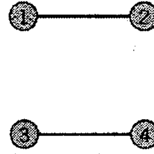
11. ____________________



12.



13.



14. adjacency matrix의 i행 j열 원소와 j행 i열 원소의 값이 i 꼭지점과 j 꼭지점이 연결되어 있을 때, 1이 되고, 연결되지 않을 땐 0이 되므로 adjacency matrix는 대칭행렬이 된다.

15. 양쪽 방향으로 화살표가 나가는 digraph.

16. 모서리의 개수는 적어도 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$보다 작고 만약 G가 complete일 때,모서리의 개수는 ${}_nC_2$이다.

17. When G is complete.

18. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

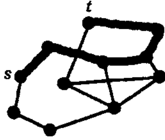
19. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20.

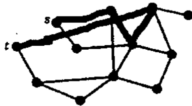
Vertex	Incident Edges
1	$-e_1,\ -e_2,\ e_3,\ -e_4$
2	e_1
3	$e_2,\ -e_3$
4	e_4

21.2. Shortest Path Problems Complexity

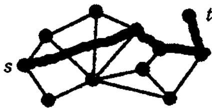
1.



2.



3.



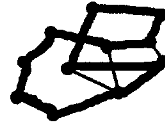
4. $n-1$개, 만약 더 많다면 짝지점은 하나 더 나타날 것이고, 따라서 그에 대응되는 cycle은 없어진다.
   complete graph인 경우는 one edge.

5. The idea is to go backward. There is v_{k-1} adjacent to v_k and labeled $k-1$, etc. Now the only vertex labeled 0 is s. Hence $\lambda(v_0) = s$, so that $v_0 - v_1 - \cdots - v_{k-1} - v_k$ is a path $s \to v_k$ that has length k.

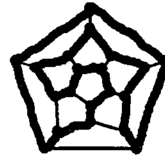
6. 수학적 귀납법을 사용하자.
   먼저 $l = 0$일 때, $v = s$이므로 당연하다.
   길이가 $l-1$에 대하여 사실이라고 가정하자. 그러면 $S \to v$로 가는 가장 짧은 길 중에서 v보다 앞에 있는 v_{k-1}에 대하여 $\lambda(v_{l-1}) = l-1$이다. 따라서 $\lambda(v) = l$이다. 만약 아니라면 v의 라벨은 l보다 작을 것이고 그러면 문제 5번에 의하여 $s \to v$까지의 거리가 l보다 작을 것이고 이것은 v가 거리 l을 갖는다는 데에 모순이다.

7.
8. No.

9.



10.



11.



12. Delete the edge (2,4)

13. No, (3,4)를 한번만 지나는 방법은 없다.

14. 1-2-3-4-5-3-1, 1-3-4-5-3-2-1

15. Police patrol, track repair crew, farmer's best route for seeding his fields.

16. Let $T : s \to s$ be a shortest postman trail and v any vertex. Since T includes each edge, T visit v. Let $T_1 : s \to v$ be the portion of T from s to the first visit of v and $T_2 : v \to s$ the other portion of T. Then the trail $v \to v$ consisting of T_2 followed by T_1 has the same length as T and solves the postman problem.

17. 1-2-3-4-5-6-4-3-1, L=25

18. $O(m^3)+O(m^3) = a_1m^3+b_1m^2+c_1m+d_1+a_2m^3+b_2m^2+c_2m+d_2 = am^3+bm^2+cm+d = O(m^3)$
    $kO(m^p) = k(am^p+\cdots) = kam^p+\cdots = O(m^p)$
    $0.02e^m + 100m^2 = e^m + slowly\ term = O(e^m)$

19. $O(m)$에서는 $100m$, $O(m^2)$에서는 $10m$, $O(m^5)$에서는 $2.5m$, $O(e^m)$에서는 $m+4.6$

20. algrithm

21.3. Bellman's Opimality Principle Dijkstra's Algorithm

1. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 6,\ \tilde{L}_3 = 20,\ \tilde{L}_4 = 18$
   2.L_2=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4\}$=6, k=2
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{20,\ L_2 + l_{23}\}$=min$\{20,\ 6+14\}$=20
   $\tilde{L}_4$=min$\{18,\ L_2 + l_{24}\}$=min$\{18,\ 6+8\}$=14
   2.L_4=min$\{\tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4\}$=14, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{20,\ L_4 + l_{43}\}$=min$\{20, 14+4\} = 18$
   2.$L_3 = 18$, $k = 3$
   그래서 가장 짧은 길은 1-2-4-3

2. Let j be the vertex that gave k its present label L_k, namely, $L_j + l_{jk}$. After this label was assigned, j did not change its label, since it was then removed from TL. Next, find the vertex that gave j its permanent label, etc. This backward search traces a path from 1 to k, whose length is exactly L_k.

3.
4. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 2,\ \tilde{L}_3 = 6,\ \tilde{L}_4 = 8,\ \tilde{L}_5 = \infty$
   2.L_2=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ tildeL_5\}$=2, k=2
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{6,\ L_2 + l_{23}\}$=min$\{6,\ 5\}$=5
   $\tilde{L}_4$=min$\{8,\ L_2 + l_{24}\}$=min$\{8,\ 9\}$=8
   $\tilde{L}_5$=min$\{\infty,\ L_2 + l_{25}\} = \infty$
   2.L_3=min$\{\tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ \tilde{L}_5\}$=5, $k = 3$
   3.$\tilde{L}_4$=min$\{8,\ L_3 + l_{34}\}$=min$\{8, 10\} = 8$
   $\tilde{L}_5$=min$\{\infty,\ L_3 + l_{35}\} = \infty$
   2.$L_4 = 8$, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_5$=min$\{\infty,\ L_4 + l_{45}\} = 28$
   2.$L_5 = 28$, $k = 5$
   그래서 가장 짧은 길은 1-2-3-4-5

5. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 10,\ \tilde{L}_3 = 17,\ \tilde{L}_4 = \infty$
   2.L_2=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4\}$=10, k=2
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{17,\ L_2 + l_{23}\}$=min$\{17,\ 10+6\}$=16
   $\tilde{L}_4$=min$\{\infty,\ L_2 + l_{24}\}$=min$\{\infty,\ 10+3\}$=13
   2.L_4=min$\{\tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4\}$=13, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{16,\ L_4 + l_{43}\}$=min$\{16, 13+2\} = 15$
   2.$L_3 = 15$, $k = 3$
   그래서 가장 짧은 길은 1-2-4-3

6. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 15,\ \tilde{L}_3 = 2,\ \tilde{L}_4 = 10,\ \tilde{L}_5 = 6$
   2.L_3=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ tildeL_5\}$=2, k=3
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{15,\ L_3 + l_{32}\}$=min$\{15,\ 2+13\}$=15
   $\tilde{L}_4$=min$\{10,\ L_3 + l_{34}\}$=min$\{10,\ 2+9\}$=10
   $\tilde{L}_5$=min$\{6,\ L_3 + l_{35}\}$=min$\{6,\ 2+3\} = 5$
   2.L_5=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_4,\ \tilde{L}_5\}$=5, $k = 5$
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{15,\ L_5 + l_{25}\}$=min$\{15, 5+\infty\} = 15$
   $\tilde{L}_4$=min$\{10,\ L_5 + l_{45}\}$=min$\{10,\ 5+4\} = 9$
   2.$L_4 = 9$, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{15,\ L_4 + l_{24}\}$=min$\{15,\ 9+5\} = 14$
   2.$L_2 = 14$, $k = 2$
   그래서 가장 짧은 길은 1-3-5-4-2

7. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 2,\ \tilde{L}_3 = \infty,\ \tilde{L}_4 = 5,\ \tilde{L}_5 = \infty$
   2.L_2=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ tildeL_5\}$=2, k=2
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{\infty,\ L_2 + l_{23}\}$=min$\{\infty,\ 2+3\}$=5
   $\tilde{L}_4$=min$\{5,\ L_2 + l_{24}\}$=min$\{5,\ 2+1\}$=3
   $\tilde{L}_5$=min$\{\infty,\ L_2 + l_{25}\}$=min$\{\infty,\ 2+\infty\} = \infty$
   2.L_4=min$\{\tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ \tilde{L}_5\}$=3, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{5,\ L_4 + l_{43}\}$=min$\{5, 3+1\} = 4$
   $\tilde{L}_5$=min$\{\infty,\ L_4 + l_{45}\}$=min$\{\infty,\ 3+4\} = 7$
   2.$L_3 = 4$, $k = 3$
   3.$\tilde{L}_5$=min$\{7,\ L_3 + l_{35}\}$=min$\{7,\ 4+2\} = 6$
   2.$L_5 = 6$, $k = 5$
   그래서 가장 짧은 길은 1-2-4-3-5

8. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 8,\ \tilde{L}_3 = 10,\ \tilde{L}_4 = \infty,\ \tilde{L}_5 = 5,\ \tilde{L}_6 = \infty$
   2.L_5=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ tildeL_5,\ \tilde{L}_6\}$=5, k=5
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{8,\ L_5 + l_{52}\}$=min$\{8,\ 5+2\}$=7
   $\tilde{L}_3$=min$\{10,\ L_5 + l_{53}\}$=min$\{10,\ 5+6\}$=10
   $\tilde{L}_4$=min$\{\infty,\ L_5 + l_{54}\}$=min$\{\infty,\ 5+5\}$=10
   $\tilde{L}_6$=min$\{\infty,\ L_5 + l_{56}\}$=min$\{\infty,\ 5+2\}$=7
   2.L_2=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ \tilde{L}_6\}$=7, $k = 2$
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{10,\ L_2 + l_{23}\}$=min$\{10,\ 7+2\} = 9$
   $\tilde{L}_4$=min$\{10,\ L_2 + l_{24}\}$=min$\{10,\ 7+8\} = 10$
   $\tilde{L}_6$=min$\{7,\ L_2 + l_{26}\}$=min$\{7,\ 7+6\} = 7$
   2.$L_6 = 7$, $k = 6$
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{9,\ L_6 + l_{63}\}$=min$\{9,\ 7+\infty\} = 9$
   $\tilde{L}_4$=min$\{10,\ L_6 + l_{64}\}$=min$\{10,\ 7+1\} = 8$
   2.$L_4 = 8$, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_3$=min$\{9,\ L_4 + l_{43}\}$=min$\{9,\ 8+\infty\} = 9$
   2.$L_3 = 9$, $k = 3$
   그래서 가장 짧은 길은 1-5-2-6-4, 2-3

9. The algorithm gives
   1.$L_1 = 0, \tilde{L}_2 = 10,\ \tilde{L}_3 = \infty,\ \tilde{L}_4 = \infty,\ \tilde{L}_5 = 4,\ \tilde{L}_6 = 15$
   2.L_5=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ tildeL_5,\ \tilde{L}_6\}$=4, k=5
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{10,\ L_5 + l_{52}\}$=min$\{10,\ 4+\infty\}$=10
   $\tilde{L}_3$=min$\{\infty,\ L_5 + l_{53}\}$=min$\{\infty,\ 4+3\}$=7
   $\tilde{L}_4$=min$\{\infty,\ L_5 + l_{54}\}$=min$\{\infty,\ 4+6\}$=10
   $\tilde{L}_6$=min$\{15,\ L_5 + l_{56}\}$=min$\{15,\ 4+\infty\}$=15
   2.L_3=min$\{\tilde{L}_2,\ \tilde{L}_3,\ \tilde{L}_4,\ \tilde{L}_6\}$=7, $k = 3$
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{10,\ L_3 + l_{32}\}$=min$\{10,\ 7+2\} = 9$
   $\tilde{L}_4$=min$\{10,\ L_3 + l_{34}\}$=min$\{10,\ 7+1\} = 8$
   $\tilde{L}_6$=min$\{15,\ L_3 + l_{36}\}$=min$\{15,\ 7+\infty\} = 15$
   2.$L_4 = 8$, $k = 4$
   3.$\tilde{L}_2$=min$\{9,\ L_4 + l_{42}\}$=min$\{9,\ 8+3\} = 9$
   $\tilde{L}_6$=min$\{15,\ L_4 + l_{46}\}$=min$\{15,\ 8+\infty\} = 15$
   2.$L_2 = 9$, $k = 2$
   3.$\tilde{L}_6$=min$\{15,\ L_2 + l_{26}\}$=min$\{15,\ 9+5\} = 14$
   2.$L_6 = 14$, $k = 6$
   그래서 가장 짧은 길은 1-5-3-4-2-6

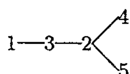
10. Algorithm

21.4. Shortest Spanning Trees Kruskal's Greedy Algorithm

1.

Edge	Length	Choice
(2,3)	1	1st
(2,5)	2	2nd
(1,3)	3	3rd
(2,4)	4	4th
(1,2)	5	
(4,5)	5	
(1,4)	6	

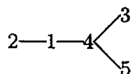
A shortest path is



2.

Edge	Length	Choice
(1,4)	2	1st
(4,3)	2	2nd
(4,5)	3	3rd
(3,5)	4	reject
(1,2)	5	4th
(1,3)	6	
(1,5)	7	
(2,3)	8	
(2,4)	20	

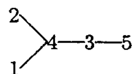
A shortest path is



3.

Edge	Length	Choice
(3,4)	1	1st
(1,4)	2	2nd
(2,4)	2	3rd
(2,3)	3	reject
(1,3)	4	reject
(3,5)	5	4th
(4,5)	7	
(1,2)	8	

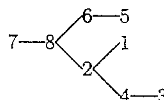
A shortest path is



4.

Edge	Length	Choice
(7,8)	2	1st
(2,8)	3	2nd
(5,6)	3	3rd
(3,4)	5	4th
(1,2)	7	5th
(1,7)	8	reject
(6,8)	9	6th
(5,7)	10	reject
(2,4)	11	7th
(3,5)	12	
(4,6)	12	
(1,3)	13	

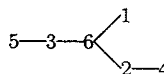
A shortest path is



5.

Edge	Length	Choice
(1,6)	1	1st
(2,6)	2	2nd
(3,5)	3	3rd
(3,6)	4	4th
(2,5)	5	reject
(1,5)	6	reject
(2,4)	7	5th
(1,4)	8	

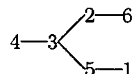
A shortest path is



6.

Edge	Length	Choice
(3,4)	2	1st
(2,3)	4	2nd
(2,4)	6	reject
(3,5)	6	3rd
(1,5)	8	4th
(2,6)	10	5th
(4,5)	12	
(1,2)	20	
(1,6)	30	

A shortest path is



7. New York - Washington - Chicago - Dallas - Denver - Los Angeles

8. Order the edges in descending order of length and delete them in this order, retaining an edge only

if it would lead to the omission of a vertex or to a disconnected graph.

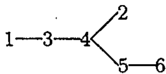
9. Yes.

10. 모서리의 순서를 길이가 큰 것부터 나열한 다음 cycle을 이루는 모서리를 없애면서 모서리를 뽑아나간다.

11.

Edge	Length	Choice
(2,4)	11	1st
(5,6)	9	2nd
(3,4)	8	3rd
(2,3)	7	reject
(4,5)	6	4th
(1,3)	4	5th
(1,2)	2	
(3,6)	1	

A longest path is



12. Algorithm

13. 만약 G가 tree가 아니라면 G는 cycle을 가지고 있고 따라서 그 cycle에서 두 꼭지점 사이의 path는 유일하지 않는다.

14. 두 꼭지점 u, v사이의 path가 유일하지 않는다면 $u \to v \to u$라는 cycle이 있고 따라서 tree의 정의에 모순이 된다.

15. connected graph G에서 한번 지난 edge를 다시 지난다면 G는 cycle을 갖거나 vertex의 degree가 2이상인 경우이다. 따라서 G가 tree라면 cycle을 갖지 않고, 따라서 vertex의 degree가 1인 경우는 path뿐이다.

16. $n = 2$에서는 당연히 성립한다.
n보다 작은 vertex를 가진 모든 tree에 대하여 성립한다고 하자. 이 때, T를 n개의 vertex를 가진 tree라 하고, $(u,\ v)$를 T안의 edge라 하자. 그러면 T에서 $(u,\ v)$를 뺀 graph 는 disconnected이고, G_1, G_2를 각각 connected된 성분이라 하자.이 때, 각각의 graph G_1, G_2의 vertex를 n_1, n_2라 할 때, n_1, n_2는 n보다 작으며 따라서 가정에 의하여 G_1, G_2의 edge의 개수는 $n_1 - 1$, $n_2 - 1$을 갖는다. 따라서 G의 edge의 개수는 $n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = n - 1$이다.

17. 그림 457참조

18. Expand an edge e into a path by adding edges to its ends if such exist. A new edge attached at the end of the path introduces a new vertex, or close a cycle, which is impossible. This extension terminates on both sides of e, yielding two verteces of degree 1.

19. 만약 모서리 (u, v)를 T에 새로운 모서리로 붙인다면 T는 연결되어 있으므로 T안에 $u \to v$인 path가 있다. 따라서 그 path는 모서리 $(u,\ v)$를 포함하는 cycle이 된다.

20. 만약 G가 tree라면 정의에 의하여 cycle을 갖고 있지 않고 문제 16번에 의하여 $n-1$개의 모서리를 갖는다. 역으로 G가 cycle을 갖고 있지 않고, $n-1$개의 모서리를 갖고 있다고 하자. 그러면 모든 vertex의 degree는 1이고, 따라서 두 모서리사이의 path는 유일하다. 따라서 문제 13번에 의하여 G는 tree이다.

21.5. Prim's Algorithm for Shortest Spanning Trees

1. G가 tree일 때

2. Step 2에서 먼저 U에 속하지 않는 $n-1$개의 꼭지점에 대하여 최단거리 l_{ij}를 선택한다. Step 3은 $n-2$번의 updating을 요구한다. 다음 번째에는 Step 2와 Step 3을 반복하면서 $n-3$번의 비교와 $n-3$번의 updating를 요구한다. 따라서 이런식으로 계속하면 마지막엔 1번의 비교와 1번의 updating에 이르므로 이 모든 수의 합은 $(n-2)(n-1) = O(n^2)$이다.

3. U안에 있지 않는 꼭지점에서 최단거리가 되는 점을 선택하면서 나가므로 cycle이 없다.

4. 최단거리를 갖는 spanning tree를 구하는 algorithm은 적어도 한번은 distance matrix의 모든 원소를 한번은 지나야 한다. 따라서 이것만 생각해도 작업양은 이미 $O(n^2)$이 된다.

5. vertex 1을 갖는 연결된 graph에서 가장 짧은 길을 찾을 수 있다.

6. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	Relabelling (II)	Relabelling (III)
2	$l_{12} = 6$	$l_{32} = 3$		
3	$l_{13} = 1$			
4	∞	$l_{34} = 10$	$l_{34} = 10$	$l_{54} = 2$
5	$l_{15} = 15$	$l_{15} = 15$	$l_{25} = 9$	

따라서 T는 (1,3),(3,2),(2,5),(5,4) 따라서 L=1+3+9+2=15

7. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	Relabelling (II)	Relabelling (III)
2	$l_{12} = 16$	$l_{42} = 4$	$l_{42} = 4$	
3	$l_{13} = 8$	$l_{43} = 2$		
4	$l_{14} = 4$			
5	∞	$l_{45} = 14$	$l_{35} = 10$	$l_{35} = 10$

따라서 T는 (1,4),(4,3),(4,2),(3,5) 따라서 L=4+2+4+10=20

8. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	(II)
2	$l_{12}=3$		
3	∞	$l_{23}=4$	
4	∞	∞	$l_{34}=3$
5	∞	∞	$l_{35}=5$
6	∞	$l_{26}=10$	$l_{36}=2$
7	∞	$l_{27}=7$	$l_{37}=6$
8	$l_{18}=8$	$l_{28}=7$	$l_{28}=7$

vertex	Relabelling (III)	(IV)	(V)	(VI)
2				
3				
4	$l_{64}=1$			
5	$l_{65}=5$	$l_{35}=5$		
6				
7	$l_{37}=6$	$l_{37}=6$	$l_{37}=6$	
8	$l_{28}=7$	$l_{28}=7$	$l_{28}=7$	$l_{28}=7$

따라서 T는 (1,2),(2,3),(3,6),(6,4),(3,5),(3,7),(2,8)
따라서 L=3+4+2+1+5+6+7=28

9. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	(II)
2	$l_{12}=6$	$l_{12}=6$	$l_{12}=6$
3	$l_{13}=4$	$l_{13}=4$	
4	$l_{14}=2$		
5	∞	$l_{45}=20$	$l_{53}=12$
6	∞	*infty*	$l_{63}=12$

vertex	Relabelling (III)	(IV)
2		
3		
4		
5	$l_{53}=12$	$l_{53}=12$
6	$l_{26}=8$	

따라서 T는 (1,4), (1,3), (1,2), (2,6), (3,5); 그러므로 L=2+4+6+8+12=32

10. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	(II)
2	$l_{12}=20$	$l_{12}=20$	$l_{32}=4$
3	∞	$l_{53}=6$	
4	∞	$l_{54}=12$	$l_{34}=2$
5	$l_{15}=8$		
6	$l_{16}=30$	$l_{16}=30$	$l_{16}=30$

vertex	Relabelling (III)	(IV)
2	$l_{32}=4$	
3		
4		
5		
6	$l_{16}=30$	$l_{26}=10$

따라서 T는 (1,5), (5,3), (3,4), (3,2), (2,6); 그러므로 L=8+6+2+4+10=30

11. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	(II)	(III)
2	$l_{12}=5$	$l_{12}=5$	$l_{12}=5$	$l_{12}=5$
3	$l_{13}=6$	$l_{34}=2$		
4	$l_{14}=2$			
5	$l_{15}=7$	$l_{45}=3$	$l_{45}=3$	

따라서 T는 (1,4), (3,4), (4,5), (1,2); 그러므로 L=2+2+3+5=12

12. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	(II)	(III)
2	$l_{12}=7$			
3	$l_{13}=13$	$l_{13}=13$	$l_{13}=13$	$l_{13}=13$
4	∞	$l_{24}=11$	$l_{24}=11$	$l_{24}=11$
5	∞	∞	∞	$l_{75}=10$
6	∞	∞	$l_{86}=9$	$l_{86}=9$
7	$l_{17}=8$	$l_{17}=8$	$l_{87}=2$	
8	∞	$l_{28}=3$		

vertex		Relabelling (IV)	(V)	(VI)
2				
3	$l_{13}=13$	$l_{53}=12$	$l_{34}=5$	
4	$l_{24}=11$	$l_{24}=11$		
5	$l_{65}=3$			
6				
7				
8				

따라서 T는 (1,2),(2,8),(8,7),(8,6),(6,5),(2,4),(4,3); 그러므로 L=7+3+2+9+3+11+5=40

13. Labelling of Vertices

vertex	initial label	Relabelling (I)	(II)	(III)
2	$l_{12}=5$	$l_{32}=1$		
3	$l_{13}=3$			
4	$l_{14}=6$	$l_{14}=6$	$l_{24}=4$	$l_{24}=4$
5	∞	∞	$l_{25}=2$	

따라서 T는 (1,3),(3,2),(2,5),(2,4); 그러므로 L=3+1+2+4=10

14. (a) $\epsilon(1)=16$, $\epsilon(2)=22$, $\epsilon(3)=12$
(b)$d(G)=24$, $r(G)=12=\epsilon(3)$, center(3)=12
(c) 20, 14, center {3, 4}
(e) Let T^* be obtained from T by deleting all endpoints (=vertices of degree 1) together with the edges to which they belong. Since for fixed u, max$d(u,\ v)$ occurs only when v is an endpoint, $\epsilon(u)$ is one less in T^* than it is in T. Hence T has same center as that of T^*. Delete the endpoints of T^* to et a tree T^{**} whose center is the same that of T, etc. The process terminates when only one vertex or two adjancent vertices are left.
(f) 먼저 꼭지점 u를 선택한 다음 가장 멀리 있는 점 v_1을 찾는다. v_1으로부터 가장 멀리있는 v_2를 찾는다. 그런다음 $d(w,\ v_1)$는 $\frac{1}{2}d(v_1,\ v_2)$와 가능한한 가깝도록 w를 찾는다.

21.6. Networks. Flow Augumenting Paths

1. $T = \{4,\ 5,\ 6\}$, cap(S, T)=10+5+13=28

2. $T = \{2,\ 4,\ 6\}$, cap(S, T)=20+10+4+13+3=50

3. $T = \{3,\ 6\}$, cap(S, T)=11+3=14

4. $T = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, cap($S$, T)=7+8=15

5. $T = \{3,\ 6,\ 7\}$, cap(S, T)=8+4+4=16

6. $T = \{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, cap(S, T)=7+10=17

7. $T = \{3,\ 6\}$, cap(S, T)=14

8. One is interested in flows from s to t, not in the opposite direction.

9. $S = \{1, 4\}$, cap(S, T)=6+8=14

10. 또다른 flow augumenting path $1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3 \to 6$
$\Delta_{14} = 6,\ \Delta_{45} = 3,\ \Delta_{52} = 1,\ \Delta_{23} = 3,\ \Delta_{36} = 7$

11. 모서리 (2,3)과 (5,6)의 inflow-outflow=0이기 때문에 flow augumenting path가 없다.

12. flow augumenting paths ;
P_1 : $1-2-4-5$, $\Delta_{12} = 5,\ \Delta_{24} = 8,\ \Delta_{45} = 2$, 따라서 $\Delta = 2$
P_2 : $1-2-5$, $\Delta_{12} = 5,\ \Delta_{25} = 5$, 따라서 $\Delta = 3$
P_3 : $1-3-5$, $\Delta_{13} = 4,\ \Delta_{35} = 9$, 따라서 $\Delta = 4$

13. flow augumenting paths ;
P_1 : $1-2-4-6$, $\Delta_{12} = 3,\ \Delta_{24} = 2,\ \Delta_{46} = 3$, 따라서 $\Delta = 2$
P_2 : $1-4-6$, $\Delta_{14} = 3,\ \Delta_{46} = 3$,, 따라서 $\Delta = 3$
P_3 : $1-4-5-6$, $\Delta_{14} = 3,\ \Delta_{45} = 3,\ \Delta_{56} = 4$, 따라서 $\Delta = 3$
P_4 : $1-3-5-6$, $\Delta_{13} = 3,\ \Delta_{35} = 4,\ \Delta_{56} = 4$, 따라서 $\Delta = 3$

14. flow augumenting paths ;
P_1 : $1-2-4-6$, $\Delta_{12} = 1,\ \Delta_{24} = 1,\ \Delta_{46} = 7$, 따라서 $\Delta = 1$
P_2 : $1-3-5-6$, $\Delta_{13} = 1,\ \Delta_{35} = 1,\ \Delta_{56} = 7$, 따라서 $\Delta = 1$
P_3 : $1-2-3-5-6$, $\Delta_{12} = 1,\ \Delta_{23} = 1,\ \Delta_{35} = 1,\ \Delta_{56} = 7$, 따라서 $\Delta = 1$
P_4 : $1-2-3-4-5-6$, $\Delta_{12} = 1,\ \Delta_{23} = 1,\ \Delta_{34} = 2,\ \Delta_{45} = 6,\ \Delta_{56} = 7$, 따라서 $\Delta = 1$

15. flow augumenting paths ;
P_1 : $1-2-5$, $\Delta_{12} = 3,\ \Delta_{25} = 3$, 따라서 $\Delta = 3$
P_2 : $1-2-4-5$, $\Delta_{12} = 3,\ \Delta_{24} = 4,\ \Delta_{45} = 3$, 따라서 $\Delta = 3$
P_3 : $1-3-5$, $\Delta_{13} = 2,\ \Delta_{35} = 2$, 따라서 $\Delta = 2$
P_3 : $1-3-2-5$, $\Delta_{13} = 2,\ \Delta_{32} = 4,\ \Delta_{25} = 3$, 따라서 $\Delta = 2$
P_3 : $1-3-2-4-5$, $\Delta_{13} = 2,\ \Delta_{32} = 4,\ \Delta_{24} = 4,\ \Delta_{45} = 3$, 따라서 $\Delta = 2$

16. $f_{12} = 8,\ f_{13} = 6$으로부터 $f = 14$임을 추측한다.

17. $f = 17$

18. $f_{12} = 2,\ f_{13} = 2$으로부터 $f = 4$임을 추측한다.

19. $f = 15$

20. 방사형일 때, 등등

21.7. Ford-Fulkerson Algorithm for Maximun Flow

1. 1-2-5에서 $\Delta_t = 2$;, 1-4-2-5에서 $\Delta_t = 1$ 따라서, maximum flow $f = 6 + 2 + 1 = 9$.

2. 1-2-4-6에서 $\Delta_t = 1$;, 1-3-4-6에서 $\Delta_t = 1$ 따라서, maximum flow $f = 2 + 1 + 1 = 4$.

3. 1-2-4-6에서 $\Delta_t = 2$;, 1-3-5-6에서 $\Delta_t = 1$ 따라서, maximum flow $f = 4 + 2 + 1 = 7$.

4. 둘 다 최소값을 구하는 문제이다.
1-2-5에서 $\Delta_t = 2$;, 1-3-5에서 $\Delta_t = 5$, 1-2-3-5에서 $\Delta_t = 1$ 따라서, maximum flow $f = 9 + 2 + 5 + 1 = 17$.

5. $S = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $T = \{3,\ 6\}$, cap(S, T)=14.

6. No. 이것은 Sec 21.6의 정리 4로 부터 나온다.

7. (2,3)과 (5,6)

8. Not more work than in Example 1. Step 1-7 는 예제와 비슷하고 flow augmenting path P_1 : $1-2-3-6$이 나온다.
두번째 flow augumenting path를 찾기위하여 먼저 scan 1을 하고 labelling 2,4를 붙이고 $\Delta_2 = 9$, $\Delta_4 = 10$을 얻는다. 그 다음 scan 2을 하면 $c_{ij} = c_{23} = f_{ij} = f_{23} = 11$이기 때문에 label 3과 5를 붙일수 없고, 또 $f_{52} = 0$이어서 label 5를 붙일 수 없다. scan 4를 하면 $\Delta_5 = 7$, $\Delta_6 = 3$. 그러므로 flow augumenting path는 P_2 : $1-4-5-6$이고,$\Delta_t = 3$이다. 따라서 더 이상 flow augmenting paths을 찾을 수 없기 때문에 maximum flow

$11 + 3 = 14$이다.

9.

10. forward egdes은 capacity까지 사용할 수 있다. 왜냐하면 그럴 수 없다면 끝 점까지 label을 붙일 수 없기 때문이다. 비슷하게 backward edges에 대해서도 마찬가지이다.

11. Algorithm

12. Let G have k edge-disjoint paths $s \to t$, and let $\tilde{f}$ be a maximum flow in G. Define on those paths a flow f by $f(e) = 1$ on each of their edges. Then $f = k \le \tilde{f}$ since $\tilde{f}$ is maximum. Now let G^* be obtain from G by deleting edges that carry no portion of $\tilde{f}$. Then, since each edge has capacity 1, there exist $\tilde{f}$ edge-disjoint paths in G^*, hence also in G, and $\tilde{f} \le k$. Together, $\tilde{f} = k$.

13. 모든 흐름의 양은 보존되기 때문에.

14. $(G,\ T)$가 cut set이기 때문에 $(S,\ T)$의 edges가 없는 G에서 $s \to t$로 바로 가는 path가 없다. 그리고 모든 edges는 용량이 1이기 때문에 cap$(S,\ T) \le q$.
따라서 E_0를 방향이 없는 q개의 edge들의 집합이라 하고 G_0를 q개의 edge가 없는 G라 하자. 그리고 V_0를 G_0안에서 $s \to v$로 가는 direct path가 존재하는 모든 v들의 집합이라 하고 V_1을 그 외의 다른 모든 점들의 집합이라 하자. 그러면 $s \in V_0,\ t \in V_1$이기 때문에 $(V_0,\ V_1)$는 cut set이다. 이 cut set은 V_0의 정의에 의하여 G_0의 edge들을 포함할 수 없다. 그러므로 $(V_0,\ V_1)$의 모든 egdes는 E_0안에 있고 따라서 q개의 edge를 갖는다. 결국 $(S,\ T)$는 minimum cut set이다. 따라서 cap$(S,\ T) \le$ cap $(V_0,\ V_1) \le q$. 그러므로 cap$(S,\ T) = q$

15. 2000

21.8. Assignment Problems. Bipartite Matching

1. $S = \{1,\ 4\},\ T = \{2,\ 3\}$

2. $S = \{1,\ 5\},\ T = \{2,\ 3, 4\}$

3. No.

4. Yes. $S = \{1,\ 4,\ 5,\ 8\}$

5. $S = \{1,\ 3,\ 5\},\ T = \{2,\ 4,\ 6\}$

6. 아니오. 3각형,5각형, 7각형 등 대해서는 아니다. 반면 4각형, 6각형, 8각형 등은 bipartite이다.

7. 5-1—4-3—6-2

8. 1-2—3-7—5-4

9. 1-4—3-6—7-8

10. (1,4), (2,3), (5,7)

11. (1,5), (2,6), (3,4)

12. (1,4), (3,6), (7,8), (2,5)

13. 4

14. 5

15. $n_1 n_2$

16.

	Period			
	1	2	3	4
T_1	c_4	c_3	c_1	
T_2	c_1	c_4	c_3	c_2
T_3		c_2	c_4	c_3

17. 3

18.

19.

20. One might perhaps mention that particular significance of K_5 and $K_{3,3}$ results from Kuratowski's Theorem, starting that a graph is planar iff it contains no subdivision of K_5 or $K_{3,3}$.

Chapter 21. Review

1. graph : two finit sets of vertices and edges, such that each edge conneced two vertices.
   digraph : a graph in which each edge $e = (i, j)$has a direction from its initial point i to its terminal point j.
   tree : a graph which is connected and has no cycles.
   cycle : a closed path.
   path : the trail whose each vertex may occur at most once.

2. 행렬을 이용하므로 보통 $O(n^2)$정도의 용량이 필요하다.

3. graph : salesmann peobelm , postman problem
   digraph : network

4. 화살표로

5. bipartite graph : a graph in which the vertex set V is partitioned into two sets S and T (without common elements, by the definition of a partition) such that every edge of G has one edge in S and the other in T.
   배치도의 문제 즉, 작업하기 위하여 일군은 어디에, 기계는 어디에 두어야 하느냐 등등..

6. graph나 digraph를 표시하기 위하여.

7. ford-fulkerson algorithm.

8. label을 붙이기 위하여.

9. 최적화를 하는데 사용되었다. 특히 ford-fulkerson algorith에 사용되었음.

10. 모든 꼭지점을 포함하는 최단거리 cycle을 구하는 문제.

11. 전화선을 놓거나 network를 구성할 때 응용된다.

12. 가장 짧은 spaning tree을 구하기 위해서 한 edge를 선택해 나갈 때, cycle이 되는 edge는 제거하여 구한다.

13. 가장 짧은 path를 구하려면 처음 1에서 부터 시작할 때, 모든 경우중에서 가장 짧은 길을 찾아 하나씩 찾아 나가겠다는 생각이다.

14. maximum flow을 구하고자 할 때 사용되고 이것과 관련된 유명한 정리는 Sec 21.6의 정리 4이다.

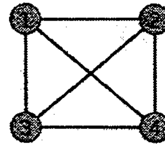
15. flow augumenting path : a path ($s \to t$) such that no forward edge is used to capacity and no backward edge has flow 0.
    forward edge : an edge in its given direction.
    backward edge : an edge opposite its given direction.

16. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

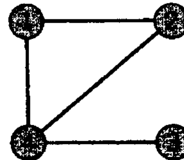
17. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

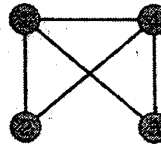
19.



20.



21.



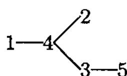
22.

Vertex	Incident Edges
1	e_1, e_3
2	e_1, e_2, e_4
3	e_2, e_5
4	e_3, e_4, e_5, e_6, e_7
5	e_6
6	e_7

23. 4

24. (1,2), (1,4), (2,3); $L_2 = 2,\ L_3 = 5,\ L_4 = 5$

25. A shortest path is



26. salesman 문제는 모든 꼭지점을 포함하는 최단거리 cycle을 구해야 하고 postman문제는 모든 모서리를 적어도 한번 지나면서 길이가 최소가 되는 walk를 구해야 한다.

27. 먼저 n=1일 때 tree가 1개이므로 당연히 성립한다.
n=2때도 역시 tree가 1개이므로 당연히 성립한다.
n=3때, tree가 (1,2)(2,3) 그리고, (1,3)(3,2), 그리고 (1,2)(1,3)으로 3개이므로 만족한다.
n=4때, tree가 (1,2)(2,3)(3,4) 그리고, (1,3)(3,2)(2,4) 등으로 16개이므로 만족한다.

28. Tha maxmum flow is $f = 7$.

29. By considering only edges with one labeled end and one unlabeled.

30. Yes.

31. Ford-Fulkerson algorithm에 보면 capacities가 정수이면 maximum flow를 구하는 계산들은 정수들의 합이다.

32.
33. 1-2–3-5

34. (1,6), (4,5), (2,3), (7,8)

CHAPTER 22

Data Analysis. Probability Theory

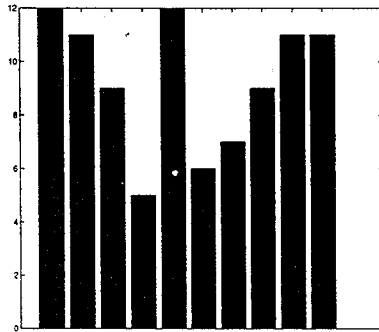
We first show how to handle data numerically or graphically (in terms of figures), in order to see what properties they may have and what kind of information we can extract from them. If data are influenced by chance effect (e.g., weather data, properties of steel, stock prices, etc.), they may suggest and motivate concepts and rules of probability theory because this is the theoretical counterpart of the observable reality whenever "chance" is at work. This theory gives us mathematical models of such chance processes (briefly called "experiments"; Sec. 22.2). In any such experiment we observe a "random variable" X, a function whose values in the experiment occur "by chance" (Sec. 22.5), which is characterized by a probability distribution (Secs. 22.5–22.8). Or we observe more than one random variable, for example, height and weight of persons, hardness and tensile strength of copper. This is discussed in Sec. 22.9, which will also give the basis for the mathematical justification of statistical methods in Chap. 23.

Prerequisite for this chapter: Calculus.
References: Appendix 1, Part G.
Answers to problems: Appendix 2.

22.1. Data: Representation, Average Spread

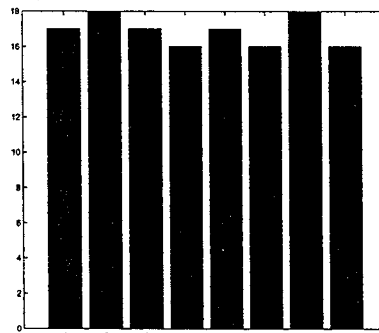
1.

		* unit(1.0)
1	0	5
5	0	6799
10	1	11122



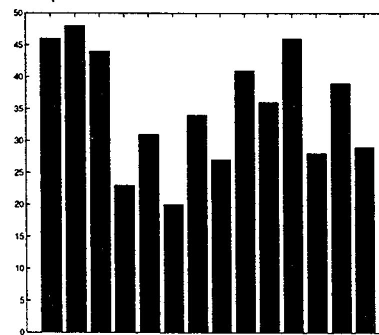
2.

		* unit(1.0)
3	1	666
6	1	777
8	1	88



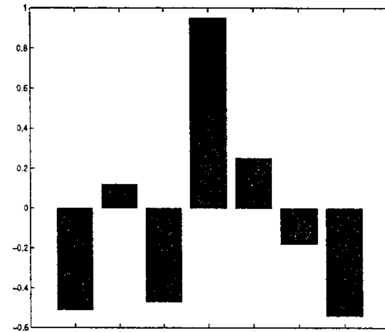
3.

		* unit(1.0)
6	2	037889
10	3	1469
14	4	1468



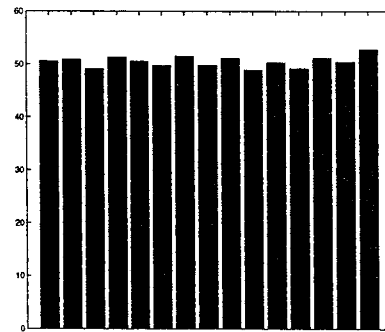
4.

		* unit(0.01)
2	-0.5	14
3	-0.4	7
4	-0.1	8
5	0.1	2
6	0.2	5
7	0.9	5



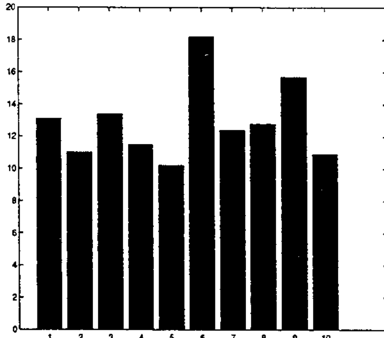
5.

		* unit(0.1)
1	48	9
5	49	1278
10	50	34569
14	51	1235
15	52	8



6.

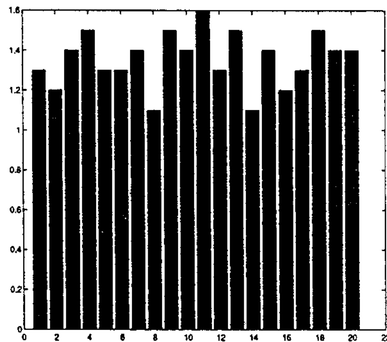
		* unit(0.1)
2	10	29
4	11	05
6	12	48
8	13	14
9	15	7
10	18	2



* unit(0.1)

7.

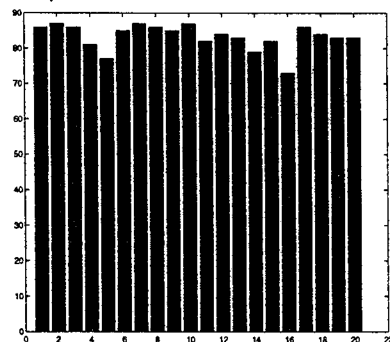
4	1	1122
9	1	33333
15	1	444444
20	1	55556



* unit(1.0)

8.

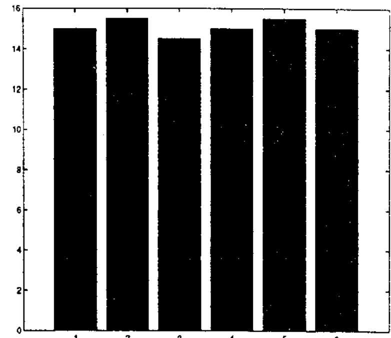
3	7	379
9	8	122333
13	8	4455
17	8	6666
20	8	777



* unit(0.1)

9.

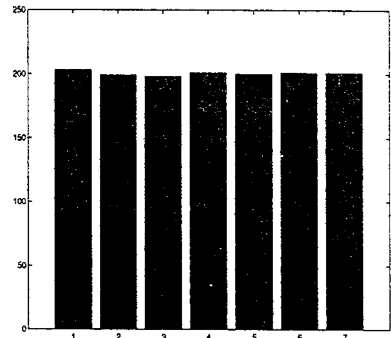
1	14	5
4	15	000
6	15	55



* unit(1.0)

10.

2	19	89
6	20	0111
7	20	3



11. 평균은 9.3이고 median은 10이다. 표준편차는 2.5408이고 interquartile range는 11.4-7.2=4.2이다.

12. 평균은 16.875이고 median은 17이다. 표준편차는 0.8345이고 interquartile range는 18-16=2이다.

13. 평균은 35.1429이고 median은 35이다. 표준편차는 9.1134이고 interquartile range는 42.5-28.75=13.75이다.

14. 평균은 12.6이고 $q_m = 7$이므로 $\bar{x} - q_m = 15.6$. 표준편차(자료의 이산도)가 크므로 이 값이 크다.

15. -1, 0, 301.

16. $nx_{min} \le x_1 + \cdots + x_n \le nx_{max}$에서 양변을 n으로 나누면 된다.

17. 3.5355, 1.2910 특이값이 없어지면 데이터의 이산도는 줄어든다.

18. Q_M과 IQR은 $\bar{x}$, s보다 구하기 쉬운 장점이 있다.

22.2. Experiments, Outcomes, Events

1. 오른나사3개, 오른나사2개와 왼나사1개, 오른나사 1개와 왼나사 2개, 왼나사 3개.

2. 주사위 A,B를 던진 눈금을 x,y라 하고 (x,y)로 표현하면 (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

3. 앞면 두개, 앞면하나 뒷면하나(구별이 있으면 결국 두가지), 뒷면 두개.

4. 6이 나올 때까지 주사위(die)를 계속 던진다면 이는 무한히 계속될 수도 있다. 즉, 경우의 수는 무한가지.

5. 불량품이 각각 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10번째에 나오는 경우가 있다.

6. $A \cup B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$. A^c=(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5). B^c=(1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

7. 서로 mutually exclusive이다.

8. mutually exclusive가 아니려면 15의 배수가 합으로 나타나는 경우가 있어야 한다. 서로 mutually exclusive이다. 주사위가 3개이면 (6,6,3)같은 경우가 생기므로 서로 mutually exclusive가 아니다.

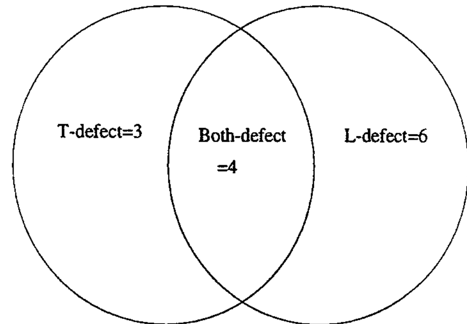
9. A=(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) . B=(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1) . $A \cup B$=(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (2,1), (3,1), (1,3) . $A \cap B$= (1,1), (2,2) . A^c=(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5). B^c=(1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

10. ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a.c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$.

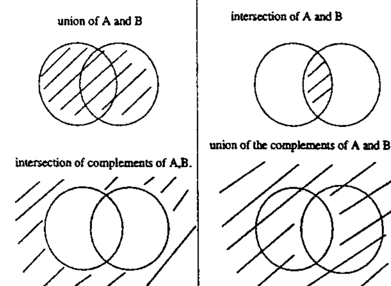
11. 처음에 6이 나오는 경우는 1가지, 두번째는 5가지, 세번째는 25가지, 네번째는 125가지, 다섯번째는 625가지, 즉, 781가지. E^c는 다섯번째까지도 6이 나타나지 않은 경우. 즉, 시행이 6번째 이후에 끝나는 경우들의 합집합이다.

12. 1. 파리를 보고 즐거우며 돈이 남아있다. 2. 파리를 보고 즐거우며 돈이 남아있다. 3. 파리를 안보고 있으며 즐거우며 돈이 남아있다. 4. 파리를 안보고 있으며 즐거우며 돈을 다썼다. 5. 파리를 안보고 있으며 즐겁지 않고 돈을 다썼다. 6. 파리를 보고 즐겁지 않고 돈을 다썼다. 7. 파리를 보고 즐거우며 돈을 다썼다.

13.



14.



15. 앞 문제와 같이 하거나 과거의 교과서를 참조.

16. 전체 집합에서 A에 속하지 않는 것으로 모인 집합에 속하지 않는 것은 A에 속한다. A에 속하면 A에 속하지 않는 것을 포함하는 집합에 속하지 않는다. 즉, $(A^c)^c = A$이다. 전체집합에 곳하지 않는 것은 아무것도 없다. $S^c = \Phi$. 아무것도 없는 집합에는 아무도 속하지 않는다. 즉, 공집합의 여집합은 전체집합이다. A에도 속하고 A^c에도 속하면 결국 A에 속하면서 속하지 않는다는 말이다. 즉, 공집합이다.

22.3. Probability

1. 합이 4일 때 3가지, 5일때 4가지, 6일때 5가지이므로 $12/36 = 1/3$.

2. 합이 7일때 6가지, 8일때 5가지, 9일때 4가지, 10일때 3가지이므로 $30/36 = 5/6$이다.

3. 각 시행에 대해서 윈나사만 나올 확률을 계산하면 $1/3 \times 1/3 = 1/9$. 즉, $1 - 1/9 = 8/9$.

4. 윈나사만 나올 확률은 $10/30 \times 9/29 = 3/29$. 즉, $1 - 3/29 = 26/29$. 비교하면 $8/9 = 232/361$과 $26/29 = 234/361$. 즉, 비복원추출일 때의 확률이 더 크다.

5. (a) 복원추출일 때 $9/10 \times 9/10 \times 9/10 = 729/1000$. (b) 비복원추출일 때$9/10 \times 89/99 \times 88/98$.

6. 6이 하나도 나오지 않을 확률은 $(5/6)^3 = 125/218$이므로 $1 - 125/218 = 93/218$.

7. 무한개의 표본집단이 있다면 복원추출과 비복원 추출의 결과는 같게 나온다.

8. 4보다 작거나 같은 합이 나오는 경우는 (1,1), (1,2), (2,1) (3,1), (2,2), (1,3)이다. 즉, $94/100 = 47/50$이 4보다 클 확률이다.

9. 네개의 타이어에 대한 것이므로 0.9^4이다.

10. (a) $(1/2)^2 = 0.25$. (b) $(1/2)^2 \times 2 = 0.5$. (c) $(1/2)^2 = 0.25$. (d) $50/200 \times 49/199$.

11. $96/100 \times 95/99 \times 94/98 \times 93/97$.

12. 한개에 대한 오작동의 확률을 P라 하자. 그럼 적어도 하나 이상이 제대로 작동할 확률은 $1 - P^4$이다. 이것이 0.99보다 크기를 바라므로 $P^4 \leq 0.01$이고 $P^2 \leq 0.1$이다. 즉, $P \leq 0.31622777$이면 된다.

13. 적어도 한개이상이 오작동하는 확률은 $1 - (1 - 0.04)^3 = 0.125364$. 즉, 모두 작동하는 확률은 0.874636.

14. (a) 불량이 없으려면 $0.98^2 = 0.9604$. (b) 불량이 1개이면 $0.02 \times 0.98 \times 2 = 0.0392$. (c) 모두 불량이면 $0.02^2 = 0.0004$.

15. (a) 한번 시행이므로 1/2. (b) $(1/4)^2 \times 2 = 1/8$. (c) 비복원인 경우: 첫번째 카드가 각각 male과 female인 경우로 나누어 계산하면 $100/200 \times 100/199 \times 99/198$과 $100/200 \times 99/199 \times 100/198$의 합. 복원인 경우: $(1/2)^2 = 0.25$.

16. 역시 같다.

17. $P(A - B) + P(B) = P(A)$. $P(A - B) \geq 0$이므로 $P(B) \leq P(A)$.

18. $P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C)$이므로 $= P(A \cap B)P(C|A \cap B) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$.

19. $P(A) = 0.5, P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.25$, $P(B \cap C) = 0.25$, $P(C \cap A) = 0.25$이다. 그런데 $P(A \cap B \cap C) = 0$. 따라서 (16)의 마지막 식은 성립하지 않는다. 세 집합에 대해서 독립이라는 말과 셋 중 임의의 둘이 독립이라는 말은 다른 뜻이다.

22.4. Permutations and Combinations

1. (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432), (2134), (2143), (2314), (2341), (2413), (2431), (3124), (3142), (3214), (3241), (3412), (3421), (4123), (4132), (4213), (4231), (4312), (4321).

2. (a) (a,e), (a,i), (a,o), (a,u), (e,i), (e,o), (e,u), (i,o), (i,u), (o,u), (e,a), (i,a), (o,a), (u,a), (i,e), (o,e), (u,e), (i,o), (u,i), (u,o). (b) (a,e), (a,i), (a,o), (a,u), (e,i), (e,o), (e,u), (i,o), (i,u), (o,u). (c) (a,e), (a,i), (a,o), (a,u), (e,i), (e,o), (e,u), (i,o), (i,u), (o,u), (a,a), (e,e), (i,i), (o,o), (u,u).

3. 50개에서 4개를 뽑는 조합이므로 $(50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47)/(4 \cdot 3 \cdot \cdot 2)$ 이고 결국 230300개.

4. $7! = 5040$.

5. 8명에서 3명을 뽑는 조합이므로 $(8 \cdot 7 \cdot 6)/(3 \cdot 2) = 56$.

6. 먼저 10개중 2개의 녹색을 뽑고 8개중 3개의 노란공을 뽑고 남은 것에 대해서는 선택의 여지가 없다. 10개중 2개의 녹색을 뽑을 확률은 1/45이고 8개중 3개를 뽑는 확률은 1/56이므로 $1/(45 \cdot 56) = 1/2520$.

7. ${}_97C_7/{}_100C_{10}$이므로 2/2695.

8. 26^3만큼의 글자부분에 대해 10^3개의 숫자부분. 17576000,

9. $6!/6 = 120$.

10. 아홉개의 남은 수 중에서 남은 두 수를 선택하므로 $9 \cdot 8 = 72$가지.

11. 완전히 맞출 확률은 ${}_3C_3/{}_9C_3 = 1/84$이고 완전히 틀릴 확률은 ${}_6C_3/{}_9C_3 = 5/21$이다.

12. (a) ${}_8C_3 = 54$가지. (b) ${}_6C_3 = 20$가지. (c) ${}_2C_1 \cdot {}_6C_1 = 12$가지. (d) ${}_2C_2 = 1$가지.

13. ${}_{20}C_2 = 190$. 즉, $190/365 = 0.52$.

14. CAS PROJ

15. (a) 처음의 선택은 n가지 두번째는 $n-1$가지, 세번째는 $n-2$가지. 이렇게 계속하면 k번째의 선택은 $(n-k+1)$가지. 이것을 모두 곱하면 n개에서 k개를 차례로 선택하여 늘어놓는 가짓수. (b) 이중 수학적 귀납법을 사용하기로 한다. 먼저 $n=1$인 경우는 k가 어떠한 자연수이든 항상 성립한다. $n=p-1$일 때 모든 자연수 k에 대해서 중복조합의 식이 성립된다고 가정하자. 이제 $n=p$일때, 모든 자연수 k에 대해 중복조합의 식이 만족됨을 보이면 된다. $k=1$인 경우는 p개에서 1개를 뽑는 것이므로 식에 대입하면 중복 조합의 식이 성립함은 자명하다. $k=m$일 때 만족된다고 가정하자. $k=m+1$인 경우를 보이면 된다. 이 경우에는 m개를 뽑은 후에 다시 1개를 더 뽑는 것이므로 m개를 뽑은 가짓수 ${}_{p+m-1}C_m$에 1을 한개씩 붙이면 그것은 모두 새로운 경우이다. 이제 2를 붙이는 방법에 대해 고려하면, 이렇게 만든 것에는 1을 붙여서 만든 것과의 사이에 중복이 생길 수 있다. 2를 붙여서 새로운 $m+1$개짜리 조합이 되려면 과거의(2를 새로 붙이기 전) m개 짜리의 조합이 1을 포함하지 않았어야 한다는 것을 알 수 있다. 이것의 개수는 $2, \cdots, p$로 만드는 m개 짜리 중복조합이므로 가정에 의하여 ${}_{p-1+m-1}C_m$이다. 이제 3을 붙여서 나타나는 새로운 $m+1$개 짜리 중복조합은 원래 m개 짜리 중복조합 중에서 $1, 2$가 없던 것들에 3을 붙여서 만든 것들이다. 이렇게 p를 붙이는 경우까지 모두 생각하면 ${}_{p+m-1}C_m + {}_{p+m-2}C_m + \cdots + {}_mC_m$이 되고 이는 ${}_{p+m}C_{m+1}$이다. (c) $\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1}$은 $a!/(k!\cdot(a-k)!) + a!/((k+1)!\cdot(a-k-1)!)$이다. 통분하면 분자는 $a!(k+1) + a!(a-k) = (a+1)!$이고 분모는 $(k+1)!\cdot(a-k)! = (k+1)!\cdot((a+1)-(k+1))!$가 된다. 즉, $\binom{a+1}{k+1}$이다. (d) $(a+b)$를 n번 곱하고 전개한다고 생각하자. 고정된 k에 대해서 곱셈의 교환법칙을 사용하지 않고 전개된 후의 식을 고려하면 교환법칙을 사용한 후에 a^kb^{n-k}가 되는 항의 개수는 a를 k개, b를 $n-k$개 사용하여 얻은 순열의 개수와 같다. 동시에 비어있는 n개의 칸에서 a가 들어갈 자리 k를 조합하여 뽑아낸 것과도 동일하다. 이것이 계수가 조합으로 정해지는 이유이다. (e) $\binom{p}{k}$는 $(1+x)^p$에서 x^k의 계수이고 $\binom{q}{r-k}$은 $(1+x)^q$에서 x^{r-k}의 계수이다. 이것을 곱하면 x^r의 계수가 되고 k에 대해 합한다는 것은 가능한 모든 경우를 모두 구하여 x^r의 계수를 구한다는 뜻이다. 이는 $(1+x)^{p+q}$의 x^r계수와도 같다. (f) $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k$, $n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\,{}_nC_k$, $(a+b+c)^n = \sum_{p+q+r=n} n!/(p!q!r!)a^pb^qc^r$등 그 이외에도 많이 있다.

22.5. Random Variables, Probability Distributions

1. $f(1) = 1/14$, $f(2) = 2/7$, $f(3) = 9/14$.

2. 앞장의 맨 마지막에서 $2^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k$를 인용하면 $2^3 = \sum_{k=0}^{3} {}_3C_k$이다. 즉, $k = 2^{-3}$.

3. $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$이므로 더이상의 양의 값은 있을 수 없다.

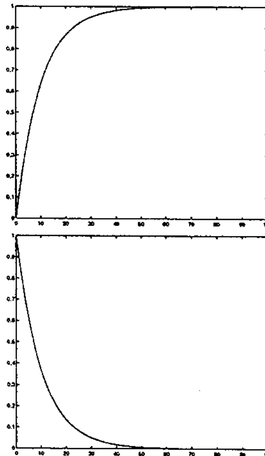
4. $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 100k = 1$에서 $k = 0.01$.

5. $\sum_{m=1}^{\infty} k/m! = 1$에서 $k^{-1} = \sum_{m=1}^{\infty} 1/m!$. $1 - k(1 + 1/2!)$.

6. $P(X \geq 4) = 0.5$. $P(X \leq 3) = 0.25$.

7. (a) 함수가 상수함수이므로 정의역 내의구간의 길이에 비례한다. $c = 5.6$. (b) 구간의 중심이므로 $c = 4$. (c) $c = 2.2$.

8. $P(X \leq c) = 0.95$가 되는 곳은 $F(x) = 0.95$인 곳이므로 $1 - e^{-0.1x} = 0.95$에서 $\ln(0.05)/-0.1 = 29.957323$. F와 f의 그래프는 각각 다음과 같다.



9. $\int_{0.9}^{1.1} kx = 1$에서 $k(1.1^2 - 0.9^2) = 2$. 즉, $k = 5$.

10. $P(X=0) = {}_7C_2/{}_{10}C_2 = 7/15$, $P(X=1) = {}_3C_1 \cdot {}_7C_1/{}_{10}C_2 = 7/30$, $P(1 < X < 2) = 0$, $P(0.5 < X < 5) = 1 - P(X=0) = 8/15$.

11. 1500시간까지 세개의 전구 모두가 고장나지 않아야 한다. 한개의 전구가 1500시간까지 고장나지 않을 확률은 $\int_{1.5}^{2} f(x)dx = 0.5$이므로 $0.5^3 = 0.125$.

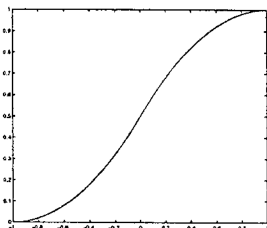
12. 전체의 확률이 1이므로 $k = 5$가 된다. 한개의 axle 가 불량일 확률은 $0.02 \times 5 = 0.1$이므로 500개에 대한 불량품의 개수는 대략 $500 \times 0.1 = 50$개이다.

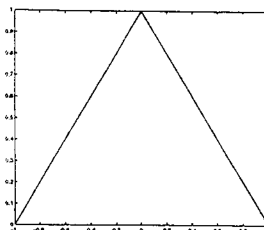
13. 전체 확률이 1이므로 적분하여 구하면 $k = 0.2/(1 - e^{-20})$. $P(X \geq 5) = (e^{-1} - e^{-2})/(1 - e^{-20})$.

14. k번째에 처음으로 6이 나오려면 $k - 1$째까지는 6이 나오면 안된다. 즉, 확률은 $(5/6)^{k-1} \times (1/6)$. k에 대해 1부터 이 확률들을 무한대까지 더하면 $1/6 \times 1/(1 - 5/6) = 1$.

15. $\int_0^x f(x) = 0.475$인 x는 대략 0.8.

16. 1개의 캔이 100갤론이상의 내용을 가질 확률은 0.5. 즉 1000개에 대해서는 500개. $P(X \leq 99.5) = 0.375$. $P(X < 99) = 0$. F와 f의 그래프는 각각 다음과 같다.





17. 전체의 확률이 1이므로 $k = 3/8$이 된다. $P(X \leq c_1) = 0.1$에서 $c_1^3 = 0.8$이고 $c_1 \sim 0.929$. $P(X \leq c_2) = 0.9$에서 $c_2^3 = 7.2$이고 $c_2 \sim 1.918$.

18. $f(x) = 0.4x$. $0.2(3^2 - 2.5^2)2.75/5 = 5.05$.

19. 차례로 $X > b$, $X \geq b$, $X < c$, $X \leq c$, $X < b$ or $X > c$, $X \leq b$ or $X > c$이다.

20. $\{X : X \leq b\} \subset \{X : X \leq c\}$이므로 연습문제 22.3의 18번 을 참조하면 된다.

22.6. Mean and Variance of a Distribution

1. $k = 1/8$임은 앞절의 연습문제 2번에서 구하였다. 평균은 $(0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1)/8 = 1.5$. 분산은 $(0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 1)/8 - 1.5^2 = 3 - 2.25 = 0.75$.

2. 평균은 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3.5$. 분산은 $(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)/6 - 3.5^2 = 91/6 - 12.25 = 2.917$.

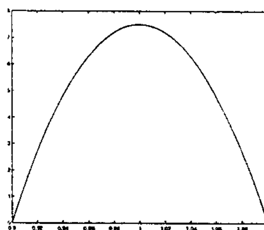
3. 평균은 $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$. 분산은 $\int_0^1 x^3 dx - 1/9 = 5/36$.

4. 평균은 $\int_0^\infty x e^{-x} dx = 1$. 분산은 $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx - 1^2 = 1$.

5. 평균은 1/10이고 분산은 0.

6. 평균은 $4 - 2 = 2$. 분산은 $4^2 \cdot 1 = 16$.

7. $k = 6/0.2^3 = 750$. 평균은 $\int_{0.9}^{1.1} f(x) dx$이고 이 적분을 계산하면 평균값은 1이다. 분산은 $\sim 0.204 - 0.404 + 0.205 - 0^2 \to 0.005k = 3.75$.



8. 정상일 확률이 $2k \int_1^{1.06} f(x) dx = 0.375 \cdot 2 = 0.75$이므로 불량률은 0.25이다.

9. 10퍼센트의 불량은 90퍼센트의 정상률을 의미한다. $2k \int_1^C f(x) dx \geq 0.9$를 만족하는 C를 구하면 된다. $c^3 - 3c^2 + 2.18 \geq$를 만족하는 c를 구하면 된다. 이 값은 대략 1.0729이다. 즉 1을 중심으로 ± 0.0729.

10. 한개에 대한 평균값이 7/2이므로 20개에 대해서는 70이 합의 기대값이다..

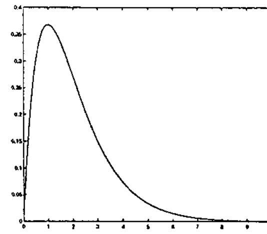
11. $\int_0^1 f dx$를 계산하면 평균은 0.5. 분산은 $0.3 - 0.5^2 = 0.05$. standardized variable은 $Z = (X - 0.5/\sqrt{0.05})$.

12. 주어진 때에 탱크가 빌 확률이 5퍼센트라는 뜻은 95퍼센트의 매상에 대한 용량을 구하는 문제로 $\int_0^c f = 0.95$일때의 c를 구하면 된다. 약 0.865이다. 즉 탱크의 용량은 8650갤런.

13. $\int_0^\infty xf(x)dx = \theta$. 30000마일이상 갈 확률은 $\int_{30000}^\infty f(x)dx = e^{-1500}$.

14. 그가 받는 기대값은 $(10+20+30+40+50+60)/6 = 35$이다. 즉 한번에 35센트씩 걸면 된다.

15. (a) $E(X-\mu) = E(X) - E(\mu) = E(X) - \mu = 0$. (b) (1)과 (8)을 비교하면 (10)이 나온다. (2)와 (9)를 비교하면 (11)이 나온다. 상수에 대한 평균은 그 상수 자신이다. 임의의 유한측도 부분집합에 대해서 항상 성립하므로 그를 포함하는 무한측도 공간에 대해서도 확장이 가능하다. (c) $E(X^k) = \int_a^b x^k/(b-a)dx = (b^{k+1} - a^{k+1})/[(k+1)(b-a)]$. (d) 기함수와 우함수의 곱은 기함수이다. 우함수이므로 평균은 0이고 $x^3 f$는 기함수이다. 즉 $\int x^3 f(x)dx = 0$. (e) $\int_0^\infty (x-1)^3 f(x)dx = 11$.



(f) 다항식을 예제로 들 수 있다.

22.7. Binomial, Poisson, and Hypergeometric Distributions

1. ${}_5C_X(1/2)^5$. 차례로 1/32, 5/32, 31/32, 31/32이다.

2. 안 맞을 확률이 0.75니까 $1 - 0.75^4 = 0.68459375$.

3. 안 맞을 확률이 0.95니까 $1 - 0.95^{20} = 0.64251408$이 적어도 한방 맞출 확률.

4. 평균이 4개이므로 $f(x) = 4^x/x!e^{-4}$. $f(0) = e^{-4}$, $f(1) = 4e^{-4}$, $f(2) = 4^2/2e^{-4}$, $f(3) = 4^3/3!e^{-4}$, $f(4) = 4^4/4!e^{-4}$, $f(5) = 4^5/5!e^{-4}$.

5. $\mu = 0.5$에서 $f(x) = 0.5^x/x!e^{-0.5}$이다. $P(X \geq 2) = 1 - f(0) - f(1) = 1 - e^{-0.5} - 0.5e^{-0.5}$.

6. $(1-0.02)^{15} = 0.98^{15} = 0.7385691$.

7. $(1-0.02)^{100} = 0.98^{100} = 0.13261956$.

8. 평균적으로 분당 2명, 1명을 처리하는 시간은 최대 15초이다.

9. 불량률이 0.1퍼센트, 100개에 대해 평균적으로 0.1개의 불량. $0.1^x/x!e^{-0.1}$로부터 $1 - e^{-0.1}$.

10. 차례로 불량품이 0,1,2,3일 확률은 다음과 같이 계산된다. ${}_15C_3/{}_20C_3 = 91/228$, ${}_5C_1{}_15C_2/{}_20C_3 = 105/228$, ${}_5C_2{}_15C_1/{}_20C_3 = 15/114$, ${}_3C_3/{}_20C_3 = 1/114$.

11. (a) ${}_10C_3/{}_13C_3 = 120/286$. (b) ${}_3C_1{}_10C_2/{}_13C_3 = 135/286$. (c) ${}_3C_2{}_10C_1/{}_13C_3 = 30/286$. (d) ${}_3C_3/{}_13C_3 = 1/286$.

12. 반품이 없을 확률은 모두 정품일 확률이고 1개의 정품 확률은 0.9. 즉, $1 - 0.9^{10}$

13. (a) $d^kG/dt^k = \sum_j d^k(e^{tx_j})/dt^k f(x_j) = \sum_j x_j^k e^{tx_j} f(x_j)$. 따라서 $G^{(k)}(0) = \sum_j x_j^k f(x_j) = E(X^k)$. $G'(0) = \sum_j x_j f(x_j) = E(X)$. 그리고 $d^kG/dt^k = \int d^k(e^{tx})/dt^k f(x)dx = \int x^k e^{tx} f(x)dx$. 따라서 $G^{(k)}(0) = \int x^k f(x)dx = E(X^k)$. $G'(0) = \int xf(x)dx = E(X)$. (b) $G^{(k)}(0) = \sum_{x=0}^n x^k {}_nC_x p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^n x^k f(x)$. (c) $G'(0) = p!n!/(n-1)! = np = \mu$. (d) $G^{(2)}(0) = p^2 n(n-1) - \mu^2 = npq$. (e) $G(t) = \sum_{x=0}^n e^{tx}e^{-\mu}/x!\mu^x = e^{-\mu}\sum(e^t\mu)^x/x! = e^{-\mu}e^{\mu e^t}$. $\mu = G'(0) = e^{-\mu}\mu e^{\mu} = \mu$. $\sigma^2 = G^{(2)}(0) - \mu^2 = e^{-\mu}\mu e^{\mu}(1+\mu) - \mu^2 = \mu$. (f) $x_M C_x = xM!/[x!(M-x)!] = M(M-1)!/[(x-1)!(M-1-(x-1))!] = M_{M-1}C_{x-1}$. 이를 이용하여 제시된 식을 증명하기로 한다. $\mu = \sum xf(x) = \sum x_M C_{xN-M} C_{n-x}/{}_N C_n = \sum M_{M-1}C_{x-1}N - MC_{n-x}/{}_N C_n = M_{N-1}C_{x-1}/{}_N C_n = Mn/N_N C_n/{}_N C_n = nM/n$.

14. $(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k(a+b)^k c^{n-k} = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k n!/[k!(n-k)!] \cdot k!/[l!(k-l)!]a^l b^{k-l} c^{n-k}$이 된다. $l, k-l, n-k$를 각각 $p.q.r$로 놓으면 $= \sum_{p+q+r=n} n!/[p!q!r!]a^p b^q c^r$. 일반적으로는 이 과정에 귀납법을 적용하면 증명을 구할 수 있다.

22.8. Normal Distribution

1. $P(X > 12) = P(Z > 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$, $P(X < 10) = P(Z < 0) = 0.5$, $P(X < 11) = P(Z < 0.5) = 0.5 + 0.1915 = 0.6915$, $P(9 < X < 13) = P(-0.5 < Z < 1.5) = 0.1915 + 0.4322 = 0.6247$.

2. $P(X \leq 112.5) = P(Z \leq 1.5) = 0.4332 + 0.5 = 0.9332$, $P(X > 100) = P(Z > -1) = 0.3413 + 0.5 = 0.8413$, $P(110.5 < X < 111.25) = P(1.1 < Z < 1.25) = 0.0301$,

3. $P(X < c) = 0.05$에서 $(c-50)/3 = 1.65$. $c = 54.95$. $P(X > c) = 0.01$에서 $(c-36)/0.1 = 1.28$. $c = 48.8$. $P(|3z| < c) = 0.5$에서 $c/3 = 0.67$. $c = 2.01$.

4. $P(X < c) = P(Z < (c-3.6)/0.1) = 0.5$에서 $c = 3.6$. $P(X > c) = P(Z < (c-3.6)/0.1) = 0.1$에서 $(c-3.6)/0.1 = 1.28$. 즉, $c = 3.728$. $P(-c < X - 3.6 \leq c) = 0.999$에서 $c/0.1 = 3.29$. 즉, $c- = 0.329$.

5. $P(X < 4) = P(Z < -1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$.

6. $P(X < 4) = P(Z < -c^{-1})$이므로 확률은 줄어든다.

7. $P(0.009 < X < 0.011) = P(-1 < Z < 1) = 0.6826$. 즉, $1000 \times 0.6826 \sim 682$.

8. $P(X \geq 2048) = P(Z \geq 208/\sqrt{1010}) = P(Z \geq 0.881) = 0.5 - 0.3106 = 0.1894$.

9. $P(X < 500) = P(Z < 0.2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$.

10. $P(0 \leq X \leq 10) \sim \Phi((10-10+0.5)/\sqrt{9.9}) - \Phi((0-10-0.5)/\sqrt{9.9}) \sim \Phi(0.159) - \Phi(-3.337) \sim 0.564$.

11. $P(X > 15000) = P(Z > 1.5) = 0.5 - 0.4332 = 0.0668$.

12. $P(X \leq c) \leq 0.05$, $(c - 1500)/50 = Z = -1.65$에서 $c = 1417.5$.

13. $P(X > c) \leq 0.2$, $(c - 1000)/100 = Z = 0.85$에서 $c = 1085$.

14. (a) 정규분포표를 참조한다. (b) $\sqrt{2\pi}\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-} ze^{-\mu^2/2}d\mu$이다. 변수를 $z = -t$로 바꾸면 $= \int_{\infty}^{t} -e^{-t^2/2}dt = \int_{z}^{\infty} e^{-t^2/2}dt$. 다시 변수를 z로 바꾸어서 $= \sqrt{2\pi} - \int_{-\infty}^{z} e^{-\mu^2/2}d\mu = 1 - \Phi(z)$. (c) 두번 미분은 $(-1/\sigma^2 + (x-\mu)^2/\sigma^4)exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2))$. 변곡점은 $(x-\mu)^2 = \sigma^2$. 즉, $x = \mu \pm \sigma$. (d) $2\pi\Phi^2(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}du \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2}dv = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)/2}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}drd\theta = 1$. (e) $\sqrt{2\pi}\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2e^{-(x-\mu)^2/\beta^2}dx = 1/\beta\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2u^2e^{-u^2/2}\beta du = \beta^2\int_{-\infty}^{\infty}(-u)(-ue^{-u^2/2})du$. 여기에 부분적분을 이용하여 적분값을 구하면 된다. $= \beta^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}du = \beta^2$. (f) binomial distribution을 normal distribution에 근사시키면 평균과 분산은 각각 $np.npq$이다. $P(np - n\varepsilon \leq X \leq np + n\varepsilon)$를 고려하자. np가 평균이므로 이는 $P(-n\varepsilon \leq X - m \leq n\varepsilon)$과 같고 고정된 ε에 대해 $n \to \infty$이면 이 값은 1로간다. (g) $\mu^* = \int x^* f(x)dx = \int(c_1x + c_2)f(x)dx = c_1\int xf(x)dx + c_2 = c_1\mu + c_2$. $\sigma^{*,2} = \int(x^* - \mu^*)^2f(x)dx = \int(c_1x+c_2-c_1\mu-c_2)^2f(x)dx = c_1^2\int(x-\mu)^2f(x)dx = c_1^2\sigma^2$.

15. b가 양수이면 $P(X < b) = 0.5 + P(0 \leq X < b)$, b가 음수이면 $P(X < b) = 0.5 - P(0 \leq X \leq -b)$. a가 양수이면 $P(X > a) = 0.5 - P(0 \leq X \leq a)$, a가 음수이면 $P(X > a) = 0.5 + P(0 \leq X \leq -a)$, 모두 양수이면 $P(a < X < b) = P(0 < X < b) - P(0 < X < a)$, b만 $P(a < X < b) = P(0 < X < b) + P(0 < X < -a)$, 모두 음수이면 $P(a < X < b) = P(0 < X < -a) - P(0 < X < -b)$. k가 0.5보다 크면 $P(X < c) = k$는 $P(0 < Z < (c-m)/\sigma) = k - 0.5$로 보고 c를 구한다. $P(X > c) = k$는 $P(0 < Z < -(c-m)/\sigma) = k - 0.5$로 보고 c를 구한다. k가 0.5보다 작으면 $P(X < c) = k$는 $P(0 < Z < -(c-m)/\sigma) = 0.5 - k$로 보고 c를 구한다. $P(X > c) = k$는 $P(0 < Z < (c-m)/\sigma) = 0.5 - k$로 보고 c를 구한다. 그리고 $P(\mu - c < X < \mu + c) = k$는 $P(0 < X < \mu + c) = k/2$로 놓고 위의 해법을 적용한다.

22.9. Distrubutions of Several Random Variables

1. 면적으로 나누어 $k = 1/30$. $P(9 \le X \le 13, Y \le 1) = 1/30$, $P(X \le 8, 3 \le Y \le 4) = 1/15$,

2. $P(X > 4, Y > 4) = 0$, $P(X \le 1, Y \le 1) = 1/32$.

3. $k = 2.9$. $P(X + Y \le 1) = 1/9$, $P(Y > X) = 0.5$.

4. $f_1(x) = (8 - x)/32$. $f_2(y) = (8 - y)/32$.

5. $f_1(x) = 1/(\beta_1 - \alpha_1)$, $f_2(y) = 1/(\beta_2 - \alpha_2)$.

6. 평균은 2. 분산은 $0.03^2/10000$.

7. 변수는 $50X + 49Y$로 잡는다. 평균은 $50 \cdot 0.5 + 49 \cdot 0.05 = 27.45$. $E((X + Y)^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$에서 $E(X^2) = 0.05^2 + 0.5^2 = 0.2525$ $E(XY) = 0.5 \cdot 0.05 = 0.025$ $E(Y^2) = 0.02^2 + 0.05^2 = 0.0029$를 대입하여 분산은 $0.2525 \cdot 2500 + 25 \cdot 49 \cdot 0.025 + 49^2 \cdot 0.0029 - (50 \cdot 0.5 + 49 \cdot 0.05)^2$.

8. (a) $f_1(x) = 1/0.04$, $f_2(y) = 1/0.04$. (b) 1보다 작아야 구멍에 들어가므로 0.5.

9. (a) $f_1(x) = 2e^{-2x}$, $f_2(y) = 2e^{-2y}$이고 곱하면 f가 된다. 즉, 독립이다. (b) (a)에서 구했다. (c) $1 - \int_0^2 f_1(x)dx = 1 - e^{-4}$.

10. 평균은 $5 + 100 = 105$, $E((X + Y)^2) = E(X^2) + E^(Y^2) + 2E(X)E(Y) = 11025$에서 $E(X^2) = 0.2^2 + 5^2 = 25.004$, $E(Y^2) = 0.5^2 + 100^2 = 10000.25$. 따라서 분산은 $11025.254 - 105^2 = 0.254$.

11. 각 시행의 번호를 $1, \cdots, n$라 한다면 X_i는 서로 독립이다. $Z = X_1 + \cdots X_n$은 이항분포이고 $\mu(Z) = E(Z) = \sum E(X_i) = np$. $\sigma^2 = \sum(x^2 - 2x\mu + \mu^2)f(x) = \sum x(x-1)f(x) + \mu - \mu^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq$.

12. $E(X) = p = M/N$에서 $E(\sum X_i) = \sum E(X_i) = nM/N$. 분산에 대해서는 독립의 조건이 개입되므로 구할 수 없다.

13. $E_1(1,1) = E_1(1,2) = E_1(2,1) = E_1(2,2) = 1/4$, $E_2(1,1) = E_2(2,2) = 1/8$, $E_2(1,2) = E_2(2,1) = 3/8$. E_1 과 E_2는 marginal distribution이 서로 같다.

14. $F(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) = F(X \le b_1, a_2 < Y \le b_2) - F(X \le a_1, a_2 < Y \le b_2) = F(X \le b_1, Y \le b_2) - F(X \le b_1, Y \le a_2) - (F(X \le a_1, Y \le b_2) - F(X \le a_1, Y \le a_2))$.

15. 각각을 적분해주면 된다.

16. 정의에 의해 자명하다.

Chapter 22. Review

1. 정의는 1절을 참조한다. 히스토그램은 한눈에 데이터의 크기를 대강 알아볼수 있고 줄기잎도시는 데이터의 직접적 수치들을 알아보기가 쉽다. 상자도시는 데이터의 전체적인 주요 평가자료를 보기 쉽게 표현한다.

2. 모든 통계와 확률론은 데이터의 처리가 그 주된 목적이며 그 이론 의 기반 또한 거기에 있다.

3. 대개 잘못된 실험에 의한 데이터를 의미한다.

4. 여러가지 기준이 있으나 여기서는 평균과 분산(표준편차)를 주로 이용한다.

5. 여러 현상을 분석하는 데에 있어서 결과가 예측하는 대로 정확하게 나오는 경우는 드물다. 확률론은 여기에 개입하여 데이터를 처리하고 신빙성, 나아가 시행의 정확성까지도 검증하는 일을 한다. 여기에 통계가 개입된다.

6. 결과가 정확히 예측되지는 않으나 그 범위가 정해지고 그 결과를 조작할 수 없을 때 그 예측값은 변수의 형태를 갖는다. 이것이 임의변수이다.

7. 사건의 분류에 있어서 개입되는 집합론의 도구가 벤 다이어그램.

8. 주어진 시행에 대해서 정해진 사건이 발생할 빈도의 수치.

9. 유한 시행에 대한 확률이 상대빈도이고 이는 시행의 횟수가 늘어날수록 확률로 근사한다.

10. 본문을 참조하여 각 확률분포에 대한 평균과 분산을 구하는 법을 숙지하고 이들이 결합될 때에 나타나는 독립등의 개념을 확인하기 바란다.

11. 각 변수의 marginal 분포에 대한 확률을 곱하여 원래 분포가 얻어지면 이를 독립이라 한다. 그리고 그때의 확률변수들을 서로 독립이라 한다.

12. 일정한 집합에서 부분을 뽑아 나열하는 것을 순열이라 하며 부분을 뽑는 것을 조합이라 한다. 이는 이항분포 등의 여러 상황으로 전개된다.

13. 임의변수는 시행에 대해 그 결과를 채택하는(지칭하는) 변수이다. 이에 대한 확률을 확률분포함수라 한다.

14. 독립변수와 의존변수가 있다. 이들에 대한 복합분포에 있어서 평균과 분산을 구하는 등 그 분포의 특성을 구하는 데에 중요한 기준으로 작용한다. 독립인 경우가 더 편리하다. 이산변수와 연속변수가 있다. 이에 대한

자세한 것은 본문을 참조한다.

15. 이산인 경우는 변수와 확률을 곱하여 합한것으로, 연속인 경우는 변수와 확률분포함수를 곱하여 적분한 것으로, 평균은 정의된다. 분산역시, 이에 대해 합과 적분으로 정의된다. p1075.

16. 표준 변수는 선형변환을 통해서 주어진 분포에 대응하는 평균이 0이고 분산이 1인 분포를 만드는 식을 말한다. 이는 정규분포등에 많이 이용된다.

17. 고정된 확률을 가진 시행을 여러번 반복하는 경우에 그 사건이 일어나는 횟수가 나타내는 확률분포가 바로 이항분포이다.

18. 이항분포의 시행횟수를 무한으로 보내면 포아송분포가 된다. 따라서 포아송분포는 평균만으로 기술될 수 있다. hypergeometric distribution은 두 종류의 물건에서 일정 개수를 뽑을 때 나타나는 결과에 대한 분포이다.

19. 확률을 구하거나 거꾸로 확률에 대한 데이터의 범위를 구하는 데 이용하는 것이 표준정규분포표이며 이는 주어진 정규분포를 표준화하고(표준정규분포, 표준정규변수) 이용한다.

20. 독립과 의존에 대한 개념이 분산을 구하는데 이용되며 평균에 대해서는 그 분포에 관계없이 선형성이 유지된다.

21. 가능하다. $P(B-A)=0$이면 된다. $P(S-E)=0$이면 된다.

22. 전체 적분값이 1이고 함수값이 0보다 크거나 같은 함수는 확률분포함수로 볼 수 있다.

23. 정수를 택하는 시행을 예로들면 된다. 그 정수에 대한 확률을 정규분포 형태로 취할 수도 있다.

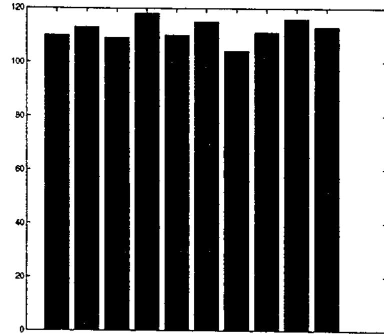
24. 점에 대한 확률은 그 점에 대해 주어진 확률밀도함수의 측도를 따른다. 연속함수인 경우에는 점의 확률은 0이다.

25. 분산에 대해서는 독립의 조건이 필요하지만 평균에 대해서는 항상 각각의 평균의 합이다.

26.

* unit(1.0)

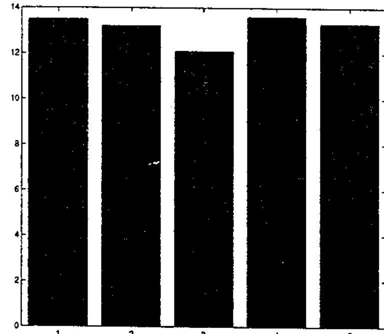
2	10	49
5	11	001
8	11	335
10	11	68



27.

* unit(0.1)

1	12	1
3	13	23
5	13	56

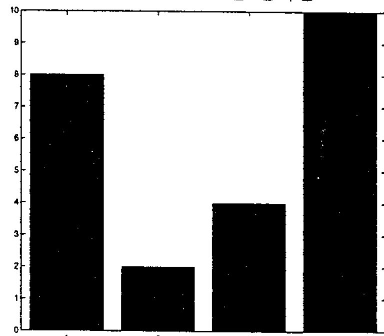


28. 평균은 111.9 이고 분산은 4.0125. 표준편차는 2.0031.

29. 평균은 13.14 이고 분산은 0.6025. 표준편차는 0.7762.

30. $nx_{min} \leq x_1 + \cdots + x_n \leq nx_{max}$에서 양변을 n으로 나누면 된다.

31. 평균은 6. 분산은 3.6515. 표준 편차는 1.9109.



32. 앞면이 나타나는 횟수가 각각 0,1,2,3인 4가지가 있다.

33. 모든 자연수가 가능한 데이터. 각각의 확률은 0.5^n.

34. 이전의 교과서 참조.

35. 이전의 교과서 참조.

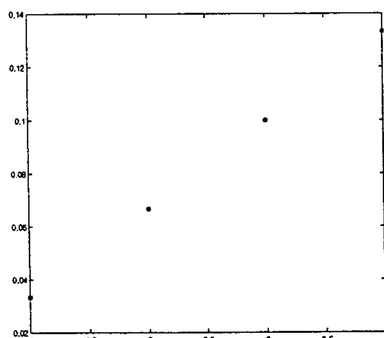
36. (a) 물건의 구별이 불가하면 불량품이 각각 0,1,2,3인 네가지의 결과가 생긴다. 모두 구별이 가능하면 ${}_{12}C_3 = 110$. (b) ${}_9C_3 = 84$. (c) ${}_9C_2{}_3C_1 = 108$. (d) ${}_9C_1{}_3C_2 = 27$. (e) ${}_3C_3 = 1$.

37. 전체사건의 1확률이 1이므로 $P(\phi) = P(S^c) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$.

38. n번째에 처음으로 앞이 나올 확률은 $(1/2)^n$. 평균은 $\sum_{k=0}^{\infty} k(1/2)^k = 2$.

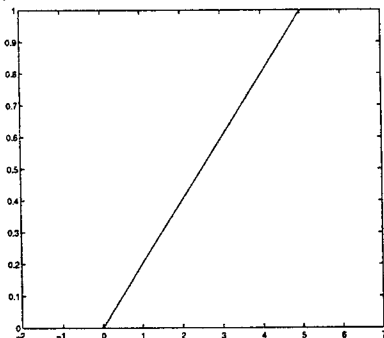
39. ${}_52C_13$.

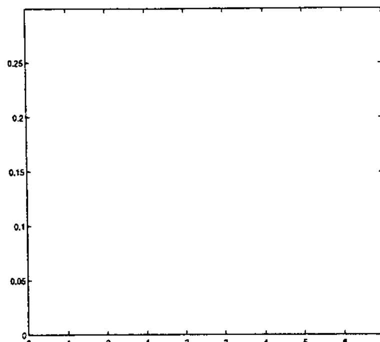
40. $6!/6^6$.



41.

42. F와 f는 각각 다음과 같다.





43. $k = 1/(1-e^{-2})$. $P(X \geq 1) = (e^{-1} - e^{-2})/(1 - e^{-2})$.

44. 평균은 $0 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 = 1$. 분산은 $0^2 \cdot 1/4 + 1^2 \cdot 1/2 + 2^2 \cdot 1/4 - 1^2 = 2$.

45. 평균은 변수변환을 이용하여 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-x}dx - \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 0$. 분산은 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = 4 - 0^2 = 4$.

46. 평균은 $\int_0^1 (2x - 2x^2)dx = 1/3$. 분산은 $\int_0^1 (2x^2 - 2x^3)dx - 1/3^2 = 1/18$. $2\int_0^1 (x - 1/3)^3(1-x)dx = 1/135$. 즉, skewness는 $54\sqrt{2}/135 = 2\sqrt{2}/5$.

47. 100미터의 결함률은 0.02. (a) ${}_3C_x 0.02^x 0.98^{3-x}$. (b) 0.98^3.

48. $P(X > 83) = P(Z > 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$, $P(X < 81) = P(Z < 0.33) = 0.5 + 0.1293 = 0.6293$, $P(X < 80) = P(Z < 0) = 0.5$, $P(78 < X < 82) = 2P(0 < Z < 0.67) = 2 \cdot 0.2486 = 0.4972$.

49. $P(X \leq c) = 0.95$에서 $(c - 14)/2 = 1.65$이 되고, $c = 17.3$. $P(X \leq c) = 0.05$에서 $(c-14)/2 = -1.65$가 되고, $c = 10.7$. $P(X \leq c) = 0.995$에서 $(c - 14)/2 = 2.58$이 되고, $c = 19.16$.

50. $5X + 4Y$에 대한 평균과 분산. $E(5X + 4Y) = 5E(X) + 4E(Y) = 5 \cdot 5.03 + 4 \cdot 0.14 = 25.71$. $E((5X+4Y)^2) = 25E(X^2) + 40E(XY) + 16E(Y^2) = 25(0.008^2 + 5.03^2) + 40(5.03 \cdot 0.14) + 16(0.005^2 + 0.14^2) \sim 685.8405$. $V(5X + 4Y) = 685.8405 - 25.71^2 = 24.8364$.

CHAPTER 23

Mathematical Statistics

In **probability theory** we set up mathematical models of processes and systems that are affected by "chance." In mathematical statistics or, briefly, **statistics,** we check these models against the reality, to determine whether they are faithful and accurate enough for practical purposes. This is done mainly as a basis for predictions, decisions, and actions, for instance, in analyzing markets, planning productions, buying equipment, investing in business projects, and so on. The process of checking models is called **statistical inference.**

In this process we draw random samples, briefly called **samples.** These are sets of data values from a much larger set of data values that could be studied, called the **population.** Examples are 10 diameters of screws from a large lot of screws, 100 household incomes in your community, 5 values a die turns up in 5 trials (here the population is *hypothetical,* consisting of an infinite sequence of outcomes of trials). Such an inference from samples to a population holds true, not absolutely, but with some high probability, that we can choose (95%, for instance) or at least compute.

Methods of statistical inference are based on drawing samples ("sampling," Sec. 23.1). Most important are **estimation of parameters** (Secs. 23.2, 23.3) and **hypothesis testing** (Sec. 23.4, 23.7, 23.8) with application to *quality control* (Sec. 23.5) and *acceptance sampling* (Sec. 23.6). The last two sections (Secs. 23.9, 23.10) give an introduction to **regression** and **correlation analysis,** which concern experiments involving two variables.

Prerequisites for this chapter: Chap. 22.
Sections that may be omitted in a shorter course: 23.5, 23.6, 23.8, 23.10.
References: Appendix 1, Part G.
Answers to problems: Appendix 2.
Statistical tables: Appendix 5.

23.2. Estimation of Parameters

1. $l = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-h}$, $h = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$.
   $\ln l = -n\ln\sqrt{2\pi} - n\ln\sigma - h$.
   $\frac{n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$. $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2$.
2. $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = \bar{x}$.
3. $\hat{\mu} = \bar{x}$.
4. $b-a$ 가 가장 작은 경우, 즉 a 가 가장 작은 표본 값이고 b 가 가장 큰 값이면 $l = \frac{1}{(b-a)^n}$ 이 가장 큰 값을 가진다.
5. $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x_j} = \frac{1}{\bar{x}}$.
6. $\mu = \frac{1}{\theta}$, $\hat{\mu} = \bar{x}$.
7. $\hat{\theta} = 1$.
8. $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}} = 2$, $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$
   그림을 보면 계단 함수 $\tilde{F}(x)$ (표본 분포 함수) 가 $F(x)$ 를 잘 근사함을 알 수 있다.
9. k : n 번의 시행에서 성공한 횟수,
   $l = p^k(1-p)^{n-k}$,
   $\ln l = k\ln p + (n-k)\ln(1-p)$,
   $\frac{k}{p} = \frac{n-k}{1-p}$, $k = np$, $\hat{p} = \frac{k}{n}$.
10. $l = p^{k_1}(1-p)^{n-k_1}\cdots p^{k_m}(1-p)^{n-k_m}$.
   $\ln l = (k_1+\cdots+k_m)\ln p$
   $\quad + [nm - (k_1+\cdots+k_m)]\ln(1-p)$.
   $(k_1+\cdots+k_m)\frac{1}{p} = [nm-(k_1+\cdots+k_m)]\frac{1}{1-p}$.
   $k_1+\cdots+k_m = nmp$.
   $\hat{p} = \frac{1}{nm}\sum_{i-1}^{m} k_i$.
11. $\hat{p} = \frac{2+3+2}{3\cdot 4} = \frac{7}{12}$.
12. $l = f = p(1-p)^{x-1}$.
   $\ln l = \ln p + (x-1)\ln(1-p)$.
   $\frac{1}{p} - \frac{x-1}{1-p} = 0$. $\hat{p} = \frac{1}{x}$.
13. $\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$.
14. 문제 13 에 의해 $\hat{p} = \frac{1}{7+6} = \frac{2}{13}$.

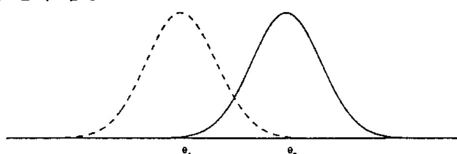
23.3. Confidence Intervals

1. 구간의 중점을 근사값으로 택하고 구간의 절반을 오차 한계로 여길 수 있기 때문이다.
2. $2.576 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0.773$.
   길이가 30% 정도 늘어난다.
   $\bar{x}$ 의 이동이 구간의 이동 (단위 3 만큼) 에 해당한다.
3. 신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{28.45 \le \mu \le 33.71\}$.
4. $n = 8$, $c = 1.960$, $\bar{x} = 10.25$, $k = 0.832$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{9.41 \le \mu \le 11.09\}$.
5. 신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{74.25 \le \mu \le 75.37\}$.
6. 표본 크기를 $\frac{1}{4}$ 배 하면 구간의 길이가 2 배.
7. (a) $n = \left(2\cdot 1.960\frac{\sigma}{2\sigma}\right)^2 \approx 4$.
   (b) $n = \left(2\cdot 1.960\frac{\sigma}{\sigma}\right)^2 \approx 16$.
8. $n = 290$, $\frac{L}{\sigma} \approx 0.3$, $L \approx 0.18$, $\frac{L}{2} \approx 0.09$, $k = 0.832$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{16.21 \le \mu \le 16.39\}$.
9. 신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{15.308 \le \mu \le 15.692\}$.
10. $n-1 = 4$; $F(c) = 0.995 \Rightarrow c = 4.60$,
   $\bar{x} = 659.2$, $s^2 = 22.70$, $k = \frac{sc}{\sqrt{n}} = 9.8$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{649.4 \le \mu \le 669.0\}$.
11. 신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{62.71 \le \mu \le 65.29\}$.
12. $n = 24000$, $\bar{x} = 12012$, $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n} = 0.5005$,
   이제 확률 변수 X 를 24000 번의 시행에서 나타나는 앞면의 갯수라 하면, 이는 평균 $24000p$ 편차 $24000p(1-p)$ 인 정규 분포로 근사할 수 있다.
   $24000\hat{p} = 12012$, $24000\hat{p}(1-\hat{p}) = 5999.99$,
   $\Phi(c) = 0.995 \Rightarrow c = \frac{c^* - 12012}{\sqrt{6000}} = 2.576$,
   $c^* - 12012 = 2.576\sqrt{6000} = 199.5$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{11812 \le \mu \le 12212\}$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.99}\{0.492 \le p \le 0.509\}$.
13. $c = 1.96$, $\bar{x} = 87$, $s^2 = 71.86$, $k \approx \frac{cs}{\sqrt{n}} = 0.742$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{86 \le \mu \le 88\}$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{0.17 \le p \le 0.18\}$.
14. $n-1 = 9$, $F(c_1) = 0.025 \Rightarrow c = 2.70$,
   $F(c_2) = 0.975 \Rightarrow c = 19.02$,
   $\bar{x} = 253.5$, $9s^2 = 54.5$,
   $k_1 = \frac{sc_1}{\sqrt{n}} = \frac{54.5}{2.70} = 20.19$,
   $k_2 = \frac{sc_2}{\sqrt{n}} = \frac{54.5}{19.02} = 2.86$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{2.8 \le \sigma^2 \le 20.2\}$.
15. 신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{23 \le \sigma^2 \le 553\}$.
16. $n-1 = 7$, $F(c_1) = 0.025 \Rightarrow c = 1.69$,
   $F(c_2) = 0.975 \Rightarrow c = 16.01$,
   $\bar{x} = 17.7625$, $7s^2 = 0.73875$,
   $k_1 = \frac{sc_1}{\sqrt{n}} = 0.437$,
   $k_2 = \frac{sc_2}{\sqrt{n}} = 0.046$,
   신뢰 구간 CONF$_{0.95}\{0.046 \le \sigma^2 \le 0.437\}$.
17. 각각 평균 120, 198 이고 분산 36, 100 인 정규 분포.
18. 정리 1 과 22.8 절의 문제 14(g) 에 의해 $4X_1 - X_2$ 는 평균 $4\cdot 16 - 12 = 52$ 와 분산 $16\cdot 8 + 2 = 130$ 인 정규 분포이다.

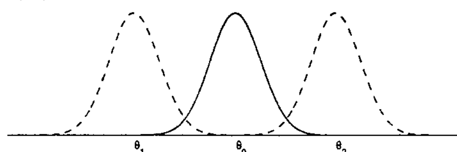
19. $Z = X + Y$ 는 평균 210 이고 분산 4.25 인 정규 분포, $P(208 \le Z \le 212) = 67\%$.
20. 정리 1 에 의해 하중 Z 는 평균 $40N$, 분산 $4N$ 인 정규 분포이다. 여기서 N 은 가방의 수이다.
$P(Z \le 2000) = \Phi\left(\frac{2000 - 40N}{2\sqrt{N}}\right) = 0.95$,
$\frac{2000 - 40N}{2\sqrt{N}} \ge 1.645$, $N = 49$.

23.4. Testing of Hypotheses, Decisions

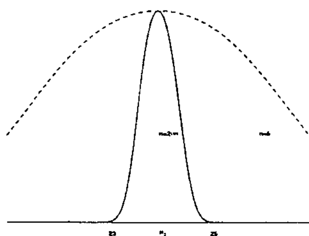
1. $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = 0.18 < c = 1.94$, 가설 채택.
2. 가설 : $p = 0.5$.
확률 변수 X : 4040 번의 시행에서 앞면이 나오는 수.
$\mu = 2020$, $\sigma^2 = 1010$,
$P(X \le c) = \Phi\left(\frac{c - 2020}{\sqrt{1010}}\right) = 0.95$,
$c = 2072 > 2048$,
따라서 가설을 기각할 수 없다.
3. $c = 6090 > 6019$, $c = 12127 > 12012$, 가설 채택.
4. 가설 : $\mu = 60.0$, 대안 : $\mu = 57.0$.
좌 단측 검증, $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{20} = 0.45$,
$P(\bar{X} \le c)_{\mu=60.0} = \Phi\left(\frac{c - 60.0}{\sqrt{0.45}}\right) = 0.05$,
$c = 60.0 - 1.645\sqrt{0.45} = 58.9 > \bar{x}$,
따라서 가설을 기각한다.
5. $\frac{\sigma^2}{n} = 1.8$, $c = 57.8$, 가설 채택.
6. $\eta(57.0) = P(\bar{X} \le c)_{\mu=57} = \Phi\left(\frac{58.9 - 57.0}{\sqrt{0.45}}\right)$
$= \Phi(2.83) = 99\frac{3}{4}\%$.
7. $\mu < 58.69$, $\mu > 61.31$.
8. 좌 단측 검증.



양측 검증.

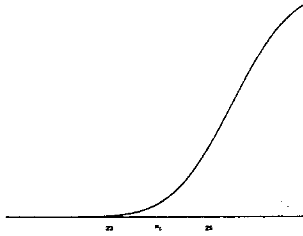


9. $n = 5$, $n = 200$.

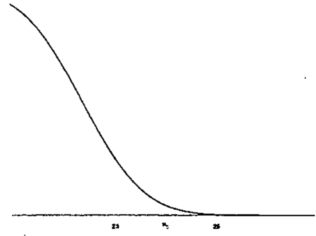


10. 가설 : $\mu_0 = 35000$, 대안 : $\mu > 35000$,
$t = \frac{37000 - 35000}{\frac{5000}{\sqrt{25}}} = 2.00 > c = 1.71$,
가설 기각. 제조 업자의 이의는 타당.
11. 가설 : $\mu = 5000g$, 대안 : $\mu \ne 5000g$, t-분포표 이용,
$t = \frac{4900 - 5000}{\frac{20}{\sqrt{50}}} = -3.54 < c = -2.01$, 가설 기각.
12. 가설 : 나아지지 않음, 대안 : 나아짐,
확률 변수 X : 400 번의 경우에서 치료된 경우의 수,
$\mu = np = 300$, $\sigma^2 = npq = 75$, $\alpha = 5\%$
$\frac{c - 300}{\sqrt{75}} = 1.645$, $c = 300 + 1.645\sqrt{75} = 314$,
관찰된 값 310 이 c 보다 크지 않음. 가설 기각 불능. 결과가 더 나아지지 않음.
13. 양측 검증,
가설 : 차이 없음, 대안 : 차이남, t-분포표 이용,
$t = \frac{0.55 - 0}{\sqrt{\frac{0.546}{8}}} = 2.11 < c = 2.37$, 가설 채택.
14. 가설 : $\sigma_0^2 = 25$, 대안 : $\sigma_0^2 < 25$,
$n - 1 = 27$, $Y = (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} = \frac{27S^2}{25} = 1.08S^2$,
$P(Y > c) = \alpha = 5\% \Rightarrow c = 16.2$,
$y = 1.08s^2 = 1.08 \cdot 3.5^2 = 13.23 < c$,
좌 단측 검정이므로 가설 기각. 모든 축전지를 동시에 교환하는 것이 덜 비싸다.
15. 가설 $H_0 : \sigma = 0.8$, 대안 $H_1 : \sigma > 0.8$,
$n - 1 = 19$, $y = (n-1)\frac{s^2}{\sigma_0^2} = 29.69$,
$P(Y \le c) = 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow c = 30.14 > y$,
가설 채택.
16. 가설 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 대안 : $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$,
$n_1 - 1 = 5$, $n_2 - 1 = 6$, $v_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{350}{61.9} = 5.65$,
$P(V \le c) = 1 - \alpha = 95\%$, $\Rightarrow c = 4.39 < v_0$,
가설 기각. 첫번째 모집단의 분산이 두번째 모집단의 분산보다 크다.
17. $t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} = 3.33 > c = 1.70$,
B 가 나음.
18. 양측 검증
$n_1 + n_2 - 2 = 28$,
$t_0 = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}}$
$= -3.58$,
$c_2 = 2.05$ $(\alpha = 97\frac{1}{2}\%)$, $c_2 = -2.05$ $(\alpha = 2\frac{1}{2}\%)$,
$t_0 = -3.58 < -2.05 = c_2$ 이므로 가설 기각. 모집단 평균이 다르다.
19. 가설 $H_0 : \mu = \mu_0$, 대안 $H_1 : \mu = \mu_1$.
$n \to \infty$ 이면 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \to \pm\infty$.
여기서 부호는 분자의 부호에 의해 결정된다.
따라서 표본의 크기를 증가시키면 오차를 원하는 만큼 줄일 수있지만 결국 모집단 전체를 조사하는 것에 귀착된다.

20. 예 2(a).

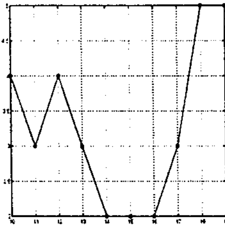


예 2(b).



23.5. Quality Control

1. LCL $= 1 - 2.58 \cdot \dfrac{0.02}{2} = 0.974$, UCL $= 1.026$.
2. $1 \pm 3 \cdot \dfrac{0.02}{\sqrt{4}} = 1 \pm 0.03$.
3. $n = \left(2 \cdot 2.58 \dfrac{0.02}{0.02}\right)^2 \approx 27$.
4. $\sqrt{2} = 1.41$ 만큼 감소; $\dfrac{2.58}{1.96} = 1.32$ 만큼 감소; 두 조작이 거의 같은 효과를 준다.
5. LCL $= 3.5 - 2.58 \cdot \dfrac{\sqrt{0.0004}}{\sqrt{2}} = 3.464$, UCL $= 3.536$.
6. LCL $= 3.5$, UCL $= 6.5$.
7. 영역=표본의 최대값-표본의 최소값.



8. n 을 증가시키면 표본 추출 영역이 커지지만 σ 는 변하지 않는다.
9. LCL $= np - 3\sqrt{np(1-p)}$, CL $= np$,
   UCL $= np + 3\sqrt{np(1-p)}$.
10. 확률 변수 Z 가 표본 크기 n 에서의 불량품의 갯수이면 이 변수의 분산은 npq 이다. 따라서 $\bar{X} = \dfrac{Z}{n}$ 의 분산은 $\sigma^2 = \dfrac{npq}{n^2} = 0.000384$ 이다.
    UCL $= 0.04 + 3\sigma = 0.0988$.
    따라서 공정이 잘 관리되고 있지 않다.
11. (a) LCL $= \mu - 3\sqrt{\mu}$, CL $= \mu$, UCL $= \mu + 3\sqrt{\mu}$.
    (b) LCL $= \mu - 3\sqrt{\mu} = -2.1 < 0$ 이므로,
    LCL $= 0$, CL $= \mu = 3.6$, UCL $= 9.3$.
12. 원래 표본 크기의 4 배를 고른다.
13. (a) 약 30%.
    (b) 약 5%.
14. 23.3 절의 정리 1 에 의해
    LCL $= n\mu_0 - 2.58\sigma\sqrt{n}$, UCL $= n\mu_0 + 2.58\sigma\sqrt{n}$.
15. 평균값의 연속적인 증가; 급작스런 변화.

23.6. Acceptance Sampling

1. $0.9825(\mu = 0.2, c = 1)$,
   $0.9384(\mu = 0.4, c = 1)$,
   $0.4060(\mu = 2, c = 1)$.
2. $P(A;\theta) \sim e^{-n\theta} \sum_{x=0}^{c} \dfrac{(n\theta)^x}{x!}$ 이므로 값들이 감소;
   $0.9098(\mu = 0.5, c = 1)$ (1%),
   $0.7358(\mu = 1, c = 1)$ (2%),
   $0.0404(\mu = 5, c = 1)$ (10%).
3. $0.8187(\mu = 0.2, c = 0)$,
   $0.6703(\mu = 0.4, c = 0)$,
   $0.1353(\mu = 2, c = 0)$.
4. $P(A;\theta) = e^{-20\theta}(1 + 20\theta)$,
   $\theta = 1.5\% \Rightarrow P(A; 0.015) = 96.3\% \Rightarrow \alpha = 3.7\%$,
   $\beta = P(A; 0.075) = 55.8\%$.
5. $P(A;\theta) = e^{-30\theta}(1 + 30\theta)$.
6. $[\theta e^{-30\theta}(1 + 30\theta)]' = 0 \Rightarrow \theta = 0.054$,
   AOQL $= \theta e^{-30\theta}(1 + 30\theta) = 0.028$.
7. $\alpha = 1 - \dfrac{(20 - 20\theta)(19 - 20\theta)}{380} = 19.47\%$,
   $\beta = \dfrac{(20 - 20\theta)(19 - 20\theta)}{380} = 14.74\%$.
8. 근사식 : $\theta^0(1-\theta)^2$.

θ	참값(2D)	근사값
0.0	1.00	1.00
0.2	0.63	0.64
0.4	0.35	0.36
0.6	0.15	0.16
0.8	0.03	0.04
1.0	0.00	0.00

9. $(1-\theta)^n + n\theta(1-\theta)^{n-1}$.
10. $P(A;\theta) = \dfrac{\binom{20\theta}{0}\binom{20-20\theta}{3}}{\binom{20}{3}}$
    $= \dfrac{(20 - 20\theta)(19 - 20\theta)(18 - 20\theta)}{6840}$,
    $P(A; 0.1) = 0.72$, $P(A; 0.2) = 0.49$,
    문제 1 에서 보다 줄어든다.
11. $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.
12. $P(A;\theta) = e^{-20\theta}(1 + 20\theta)$,
    $[\theta P(A;\theta)]' = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = 0.0809$,
    $\theta_0 P(A;\theta_0) = 0.0420$.

13. $(1-\theta)^5$, $[\theta(1-\theta)^5]' = 0$, $\theta = \frac{1}{6}$, AOQL $= 6.7\%$.
14. $\theta = 0.05$, $P(A;\theta) = 0.98$,
$n = 100$, $np = 5$, $npq = 5 \cdot 0.95 = 4.75$,
$\sum_{x=0}^{c} \binom{100}{x} 0.05^x 0.95^{100-x}$
$\approx \Phi\left(\frac{c-5+0.5}{\sqrt{4.75}}\right) - \Phi\left(\frac{0-5-0.5}{\sqrt{4.75}}\right) = 0.98$,
$\Phi\left(\frac{c-5+0.5}{\sqrt{4.75}}\right) = \Phi\left(\frac{0-5-0.5}{\sqrt{4.75}}\right) + 0.98$
$= 0.9859$
$\Rightarrow c = 4.5 + 2.214\sqrt{4.75} = 9.325$,
따라서 c 값으로 9 나 10 을 택해야 한다.
15. 정규 분포 근사 이용,
$\sum_{x=0}^{9} \binom{100}{x} 0.12^x 0.88^{100-x} = 22\%$.

23.7. Goodness of Fit. χ^2-Test

1. $\chi_0^2 = \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(60-50)^2}{50} = 4 > c = 3.84$,
공정하지 않은 동전.
2. $\chi_0^2 = 0.4 < c = 3.84$, 공정한 동전.
3. $\chi_0^2 = \frac{16}{10} < c = 11.07$, 공정한 주사위.
4. $\chi_0^2 = 1.628 + 26.582 + 7.426 + 52.250 + 3.945 + 2.359 = 94.19 > 11.07$, 기각.
5. $\chi_0^2 = 10.264 < c = 11.07$, 무작위성 때문.
6. $K - 1 - 1 = 1$,
$p = \frac{13+3+8}{600} = 4\% \Rightarrow c = 3.84$,
$\chi_0^2 = \frac{1}{8}[(13-8)^2 + (3-8)^2 + (8-8)^2)] = 6.25 > c$,
불량품 갯수의 차이가 심각하다.

7. $\hat{\mu} = \bar{x} = 3.8704$, $K - 1 - 1 = 10$,

x	$F(x)$	기대값	측정값	식 (1) 의 항
0	0.0209	54.38	57	0.1265
1	0.1015	210.46	203	0.2645
2	0.2577	407.29	383	1.4478
3	0.4592	525.45	525	0.0004
4	0.6541	508.42	532	1.0932
5	0.8050	393.56	408	0.5297
6	0.9024	253.87	273	1.4410
7	0.9562	140.37	139	0.0134
8	0.9823	67.91	45	7.7294
9	0.9934	29.20	27	0.1664
10	0.9978	11.30	10	0.1503
		5.78	6	0.5498

$23.21 > \chi_0^2 = 13.5125$, 표본을 추출한 모집단이 Poisson 분포되어 있다는 가설을 채택한다.

8. $\bar{x} = 59.87$, $\hat{s} = 1.504$, $K - 1 - 2 = 2$,

x	$\frac{x-\bar{x}}{s}$	$\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)$	기대값	측정값	식 (1) 의 항
58.5	-0.91	0.1812	14.31	14	0.01
59.5	-0.25	0.4028	17.51	17	0.01
60.5	0.42	0.6623	20.50	27	2.06
61.5	1.08	0.8608	15.68	8	3.76
			11.00	13	0.36

$9.21 > \chi_0^2 = 6.10$, 표본을 추출한 모집단이 정규 분포되어 있다는 가설을 채택한다.

9. $\chi_0^2 = 1 < c = 3.84$, 공통 질병.
10. $50 + b$ 가 가설을 기각하기 위한 최소의 여자 수,
$\frac{2b^2}{50} > c$, $b > 5\sqrt{c}$,
$50 + b = 60, 63, 64$ (각각 5%, 1%, 0.5%).
11. $\chi_0^2 = \frac{10^2}{40} + \frac{10^2}{120} = \frac{10}{3} < c = 3.84$,
새 공정도 같은 강도를 가지는 철강 생산.
12. $K = 2$ (무딘 것, 예리한 것),
기대값 : 무딘 것=10, 예리한 것=390,
자유도 1,
$\chi_0^2 = \frac{49}{10} + \frac{49}{390} = 5.03 > 3.84$,
이의 기각.
13. $\chi_0^2 = \frac{73^2 + 23^2 + 97^2}{847} = 18.02 > c = 5.99$,
세 차선의 통행량이 다르다.
14. $n = 3 \cdot 77 = 231$.
(a) $a_j = \frac{231}{20} = 11.55$, $K = 20$, $\alpha = 5\%$,
자유도 19, $\chi_0^2 = 24.32 < c = 30.14$,
가설 채택.
(b) $\alpha = 5\%$,
자유도 1, $\chi_0^2 = 13.10 > c = 3.84$,

가설 기각.
(c) $\alpha = 5\%$,
자유도 1, $\chi_0^2 = 10.62 > c = 3.84$,
가설 기각.

23.8. Nonparametric Tests

1. $P(X=5) = \binom{5}{5}(0.5)^5 = 3.12\% < \alpha$, 가설 기각.
   $P(X=4) = \binom{4}{4}(0.5)^4 = 6.25\% > \alpha$, 가설 채택.
2. 가설 : $\tilde{\mu} = 0$,
   음수가 기껏해야 2개 있을 확률
   $P = \frac{1}{2}^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 34\%$,
   가설 기각 불능.
3. 가설 : A 와 B 는 차이가 없슴,
   표본에서 차이가 없는 경우를 소거, 8 번 시행,
   A 가 B 보다 7 번이나 8 번 우수할 확률
   $P = [1+8]\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 3.5\%$,
   가설 기각. A 가 B 보다 우수하다.
4. 가설 : A 와 B 는 차이가 없슴,
   표본에서 0 을 소거, X : 양수의 갯수,
   $P(X=9) = \binom{9}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0.2\%$,
   가설 기각. A 와 B 는 차이가 있다.
5. 가설 : $\mu = 0$, 대안 : $\mu > 0$,
   $\bar{x} = 1.58$, $t = \frac{1.58}{\frac{1.23}{\sqrt{10}}} = 4.06 > c = 1.83$, 가설 기각.
6. 가설 : 두 방법의 차이가 없슴,
   음수가 기껏해야 3개 있을 확률
   $P = \left[1 + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 1.76\%$,
   가설 기각. B 가 더 나은 방법이다.
7. 가설 : 두 방법의 차이가 없슴,
   $\bar{x} = 9.67$, $s = 11.87$,
   $t = \frac{9.67}{\frac{11.87}{\sqrt{15}}} = 3.15 > c = 1.76$, 가설 기각.
8. X : 양수의 갯수,
   가설 : 온도 조절이 적합 ($\tilde{\mu} = 0$),
   음수가 기껏해야 1개 있을 확률
   $P = \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 3.5\%$,
   가설 기각. 온도가 너무 낮게 조절되어 있다.
9.
10. $n = 5$,
    111.1 이 110.9 와 111.0 앞에 나옴 : 뒤집힌 위치 2,
    표 A12 에 의해
    $P(T \le 2) = 0.117$,
    가설 기각 불능.
11. 가설 : 추세 없슴, 대안 : 양의 추세 (증가 경향),
    표 A12 이용, $n = 10$,
    $22 > 19, 21, 20, 18$,
    $19 > 18$,
    $21 > 20, 18$,
    $20 > 18$,
    $25 > 18, 24$,
    $27 > 26, 24$ $30 > 26, 24$,
    $26 > 24$: 뒤집힌 위치 15,
    $P(T \le 15) = 10.8\%$,
    가설 채택.
12. $n = 8$,
    33.4 가 31.6 앞에 나옴,
    35.3 이 31.6 과 35.0 앞에 나옴,
    37.6 이 36.5 앞에 나옴 : 뒤집힌 위치 4,
    표 A12 에 의해
    $P(T \le 4) = 0.007$,
    가설 기각. 비료를 증가하면 생산량도 증가.
13. 가설 : 추세 없슴, 대안 : 양의 추세 (증가 경향),
    표 A12 이용, $n = 6$,
    $2.1 > 1.9$,
    $2.6 > 2.2$: 뒤집힌 위치 2,
    $P(T \le 2) = 2.8\%$,
    가설 기각.
14. 가설 : 추세 없슴, 대안 : 양의 추세 (증가 경향),
    x 값이 증가하는 순서로 재배열,
    $n = 10$,
    $418 > 301, 352, 395, 375, 388$,
    $395 > 375, 388$,
    $465 > 455$,
    $521 > 455, 490$: 뒤집힌 위치 10,
    표 A12 에 의해
    $P(T \le 10) = 1.4\%$,
    가설 기각.
15. 가설 : 추세 없슴, 대안 : 음의 추세 (감소 경향),
    표 A12 이용, $n = 8$,
    $37 < 40, 38$: 뒤집힌 위치 2,
    $P(T \le 2) = 0.1\%$,
    가설 기각.